

TEKIJÄ

PITKÄ MATEMATIIKKA 3

Paavo Heiskanen
Päivi Kaakinen
Pertti Lehtinen
Jukka Lehtonen
Mika Leikas
Jorma Tahvanainen

Sanoma Pro Oy

GEOMETRIA

Tiedustelut

Sanoma Pro Oy, Helsinki
puh. 020 391 000
sähköposti: asiakaspalvelu@sanomapro.fi

www.sanomapro.fi

Kustantaja: Sanoma Pro Oy

Tämä aineisto on digitaalinen rinnakkaisversio
tuotteesta Tekijä Pitkä matematiikka 3 Geometria
ISBN 978-952-63-3887-3 1. painos, 2016

6 kk lisenssi ISBN 978-952-63-3888-0
48 kk lisenssi ISBN 978-952-63-3889-7

Toimitus: Timo Pitkänen, Jussi Laitila, Ville Sipiläinen
Kuvatoimitus: Suvi-Tuuli Kankaanpää
Ulkoasu: Liisa Holm, Sari Jeskanen
Taitto: Eija Högman
Kuvitus: Marja Venäläinen
Kansi: Vaidas Bagonas, Sari Jeskanen

Kansikuva: Ivan Pavlov, Shutterstock
Kuvankäsittely: Vaidas Bagonas

s. 11 MattiaATH, Shutterstock
s. 17 Helena Hagberg, WSOY
s. 18 Olli Karttunen, Sanoma Pro
s. 21 Anita Kokkila Sanoma Pro
s. 28 Mia Saarinen, Kokkila Sanoma Pro
s. 29 Billion photos, Fotolia
s. 41 Hans Wretling, Corbis
s. 36 Pierre Landry, Mostphotos
s. 38 JohanH, Mostphotos
s. 41 Wire_man, Shutterstock
s. 44 Erika Nacke, Panthermedia
s. 46 Telia, Shutterstock.com
s. 51 Artalis, Shutterstock
s. 54 Rawpixel, Shutterstock
s. 58 Rawpixel, Shutterstock
s. 59 Bogdanhoda, Shutterstock
s. 60 Offscreen, Shutterstock
s. 67 Kari Hirvo, WSOY
s. 68 Tandemich, Shutterstock
s. 76 Pyzata, Shutterstock
s. 78 Jari Kurvinen_vastavalo
s. 81 Maximchuk, Shutterstock
s. 83 Kari Hirvo, WSOY
s. 93 Anita Kokkila Sanoma Pro
s. 95 Anatoli Styf, Shutterstock
s. 97 Ingram Publishing
s. 98 Eastimages, Shutterstock
s. 108 Mark Herreid, shutterstock
s. 116 Leonid Andronov, Shutterstock
s. 117 Ingram Publishing
s. 120 Lagui, Shutterstock
s. 131 Dailin, Shutterstock
s. 136 A_Lesik, Shutterstock
s. 138 Stephen Finn, Shutterstock
s. 139 Minna Hopia, WSOY
s. 140 MV-photos
s. 149 GoodMood Photo, Shutterstock
s. 153 Victeah, Shutterstock
s. 159 Evgeniya Porechenskaya, Shutterstock
s. 160 Mirva Kakko, Lehtikuva
s. 164 Anastasios71, Shutterstock

© Paavo Heiskanen, Päivi Kaakinen, Pertti Lehtinen, Jukka Lehtonen, Mika Leikas,
Jorma Tahvanainen ja Sanoma Pro Oy

Kopiointiehdot

Tämä teos on digitaalinen oppikirja, joka on suojattu tekijänoikeuslailla (404/61).

Käyttäjälle

Tekijä, pitkä matematiikka 3

Geometria-kurssilla opiskellaan taso- ja avaruusgeometriaa. Kurssilla harjaannutaan muotoilemaan, perustelemaan ja käyttämään kuvioita ja kappaleita koskevia lauseita, joiden avulla lasketaan muun muassa kulmia, janojen pituuksia, pinta-aloja ja tilavuuksia.

Eteneminen

Luvun avaa tutkimus tai johdanto, joka ohjaa opiskelijan löytämään uutta tietoa. Uusi teoreettinen tieto esitetään täsmällisesti määritelmänä ja lauseina, jotka perustellaan. Esimerkit ohjaavat löydetyn tiedon soveltamiseen. Teoria ja esimerkit on kirjoitettu niin, että opiskelija voi omaksua ne itsenäisesti, ja siksi kirja tukee hyvin myös käänteisen opetuksen menetelmiä.

ESIMERKKI 1



Kirjaan on merkitty esimerkit, jotka on tarkoitus oppia tekemään ilman laskinta.

ESIMERKKI 2

Muissa esimerkeissä opastetaan, kuinka laskinta voidaan käyttää apuna tarkoituksenmukaisella tavalla. Kirjassa laskimella tarkoitetaan myös symbolisen laskennan ohjelmistoa tai muuta teknistä apuvälinettä.

Harjoitustehtävät ovat kahtena sarjana. Sarja I sisältää perustehtäviä, jotka noudattavat esimerkkien järjestystä. Sarja II sisältää perustehtäviä ja vaativampia tehtäviä.

1. Tehtävät, jotka ratkaistaan ilman laskinta, on merkitty taustavärillä.
 2. Laskinta voidaan käyttää apuna erityisesti soveltavissa tehtävissä.
- E1** Viittaukset esimerkkeihin auttavat harjoittelussa.
-  Videologolla merkittyihin tehtäviin liittyy opiskelijan digikirjassa ja opettajan digiaineistossa opetusvideo.
-  Geometrialogolla merkityt tehtävät ratkaistaan geometriaohjelman avulla.

Kertaaminen

Kertaustehtävät on jaettu kolmeen osaan: ensin käydään läpi kurssin sisältö otsikoiden mukaan järjestettynä, minkä jälkeen on monivalintatehtäviä sekä tehtävsarja koko kurssin alueelta.

Toivotamme innostavia opiskeluhetkiä.

Turussa 1.6.2016

Tekijät

Sisällys

1	Tasogeometrian perusteita	6
1.1	Peruskäsitteitä	6
1.2	Monikulmioita	20
2	Yhdenmuotoisuus	36
2.1	Mittakaava	37
2.2	Pinta-alojen ja tilavuuksien suhde	50
3	Kolmio	60
3.1	Suorakulmainen kolmio	60
3.2	Sinilause	70
3.3	Kosinilause	79
3.4	Kolmioon liittyviä lauseita	87
4	Ympyrä	94
4.1	Peruskäsitteitä	94
4.2	Ympyrän osia	106
4.3	Ympyrään liittyviä kulmia	114
5	Avaruusgeometria	126
5.1	Kulma avaruudessa	126
5.2	Pallo	136
5.3	Lieriö	146
5.4	Kartio	156
	Kertaus	169
1	Tasogeometrian perusteita	169
2	Yhdenmuotoisuus	170
3	Kolmio	171
4	Ympyrä	172
5	Avaruusgeometria	174
	Monivalintatehtävät	176
	Tehtäväsarja	179
	Vastaukset	181
	Hakemisto	193

Aikatauluehdotus

	45 min	75 min
1 Tasogeometrian perusteita	3	2
1.1 Peruskäsitteitä	1	1
1.2 Monikulmioita	2	1
2 Yhdenmuotoisuus	3	2
2.1 Mittakaava	2	1
2.2 Pinta-alojen ja tilavuuksien suhde	1	1
3 Kolmio	7	4
3.1 Suorakulmainen kolmio	2	1
3.2 Sinilause	2	1
3.3 Kosinilause	2	1
3.4 Kolmioon liittyviä lauseita	1	1
4 Ympyrä	7	4
4.1 Peruskäsitteitä	2	1
4.2 Ympyrän osia	2	1
4.3 Ympyrään liittyviä kulmia	3	2
5 Avaruusgeometria	7	4
5.1 Kulma avaruudessa	1	1
5.2 Pallo	2	1
5.3 Lieriö	2	1
5.4 Kartio	2	1
Kertaus	1	1
yhteensä	28	17

1

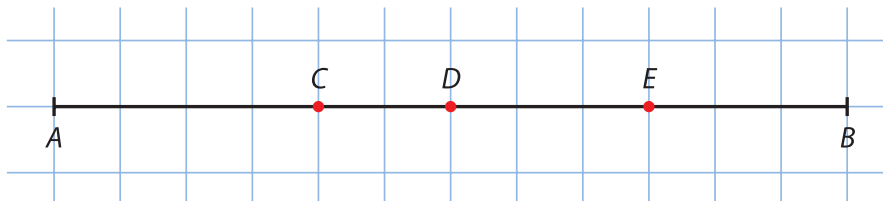
Tasogeometrian perusteita

Tasogeometriassa tutkitaan samassa tasossa sijaitsevia kuvioita, kuten kolmioita ja ympyröitä. Tässä luvussa palautetaan mieleen geometrian työkaluja, määritellään tasogeometrian peruskäsitteitä sekä tutustutaan erilaisiin kulmiin ja monikulmioihin. Näitä tietoja tarvitaan esimerkiksi luvussa 2, kun tutkitaan yhdenmuotoisia kuvioita.

1.1 Peruskäsitteitä

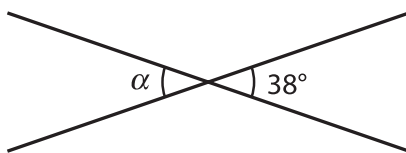
TUTKIMUS

- 1) Päättelä, mikä pisteistä C , D ja E jakaa janan AB suhteessa
 a) $1 : 2$ b) $3 : 1$ c) $1 : 1$.

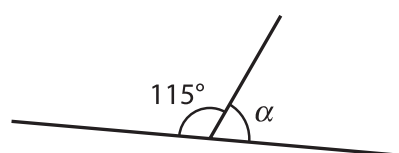


- 2) Päättelä kulman α suuruus ja perustele vastauksesi.

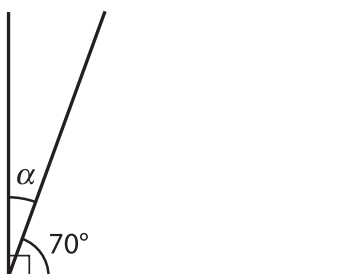
a)



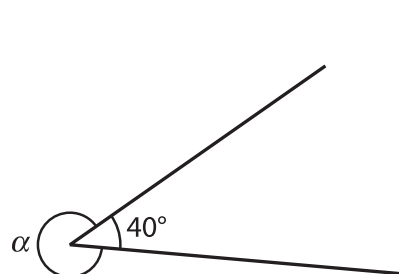
b)



c)



d)

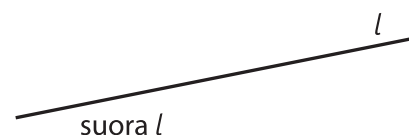


Piste ja suora

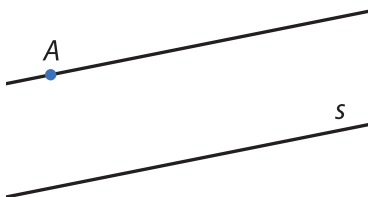
Piste ja *suora* ovat tasogeometrian peruskäsitteitä. Pisteet nimetään yleensä isoilla kirjaimilla.

Suoralla ei ole alku- eikä loppupistettä, vaan se jatkuu rajattomasti molempiin suuntiin.

Kahden pisteen kautta voidaan piirtää täsmälleen yksi suora, joten kaksi pistettä määrää suoran. Suora nimetään usein kahden suoralla olevan pisteen mukaan. Suoralle voidaan antaa myös oma nimi, yleensä pieni kirjain.



Lukion kursseilla tutkittava *euklidinen geometria* sisältää tietyt aksioomat eli sovitut perusoletukset, joita ei voi todistaa. Yksi niistä on *yhdensuuntaisuus*- eli *paralleeliaksioma*: suoran s ulkopuolisen pisteen A kautta voidaan piirtää täsmälleen yksi suoran s suuntainen suora.



Lisää tietoa löydät netistä hakusanoilla "Euklidisen geometrian aksioomat".

Yhdensuuntaiset suorat

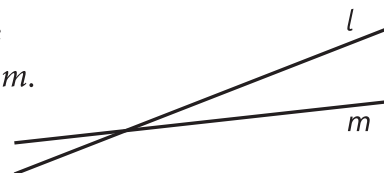
Määritelmä

Tason suorat l ja m ovat *yhdensuuntaiset*, mikäli niillä ei ole yhteisiä pisteitä tai ne yhtyvät.

Tällöin merkitään $l \parallel m$.



Kun suorat eivät ole yhdensuuntaiset, ne ovat *erisuuntaiset*. Tällöin merkitään $l \nparallel m$.

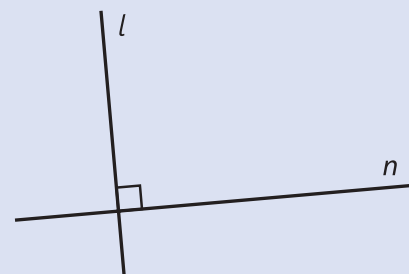


Normaali

Määritelmä

Suorat l ja n ovat toistensa *normaaleja*, mikäli ne ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Tällöin merkitään $l \perp n$.





Geometriaohjelmalla tarkoitetaan dynaamisen geometrian tietokoneohjelmaa, esimerkiksi Geogebraa. Geogebra on ilmainen ohjelma, joka on käytössä myös matematiikan ylioppilaskokeissa. Ohjelman voit ladata netistä. Geometriaohjelmalla ratkaistavat tehtävät ja esimerkit on merkitty logolla .

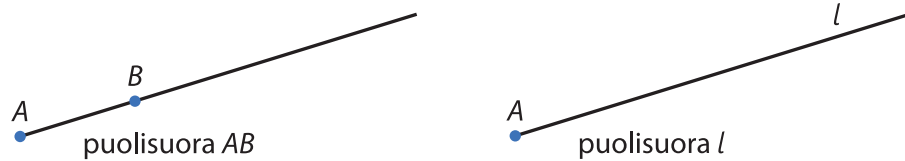
Suorat geometriaohjelmalla

Geometriaohjelmalla voidaan piirtää suora l valitsemalla kaksi pistettä, joiden kautta suora kulkee.

Suoran l kanssa yhdensuuntainen suora m voidaan piirtää valitsemalla suora l ja yksi piste sen ulkopuolelta.

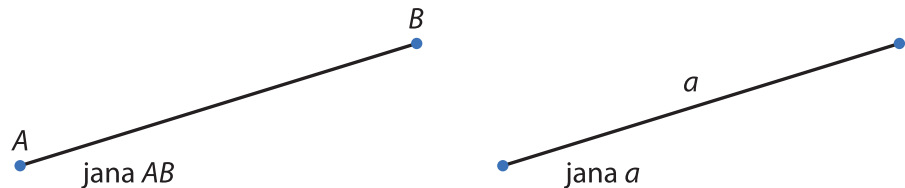
Suoralle l voidaan piirtää normaali n valitsemalla suora l ja yksi normaalin piste joko suoralta l tai sen ulkopuolelta.

Suoralla oleva piste jakaa suoran kahteen osaan. Näitä osia kutsutaan *puolisuoriksi* ja ne jatkuvat rajattomasti vain toiseen suuntaan.



Janan jakaminen osiin

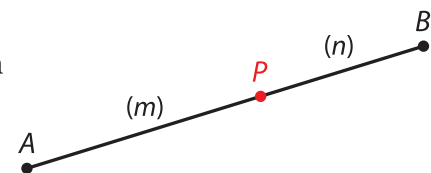
Kaksi pistettä rajaavat suoralta osan, jota kutsutaan *janaksi*. Janan AB pituutta merkitään $|AB|$.



Janan jakaminen osiin aloitetaan ensin mainitusta päätepisteestä.

Oletetaan, että piste P jakaa janan AB osiin AP ja PB siten, että osien pituuksien suhde on

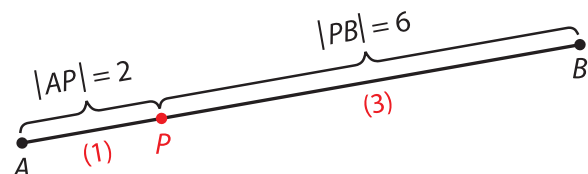
$$\frac{|AP|}{|PB|} = \frac{m}{n} = m : n.$$



Tällöin suhdetta $m : n$ kutsutaan *janan jakosuhteeksi* ja sanotaan, että piste P jakaa janan AB suhteessa $m : n$. Jakosuhteen luvut m ja n ovat osien suhteelliset pituudet ja ne merkitään kuvassa sulkeisiin.

Esimerkiksi, jos janan AB pituus on 8 ja piste P jakaa sen kahteen osaan siten, että $|AP| = 2$ ja $|PB| = 6$, niin janan jakosuhte on

$$\frac{|AP|}{|PB|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 1 : 3.$$



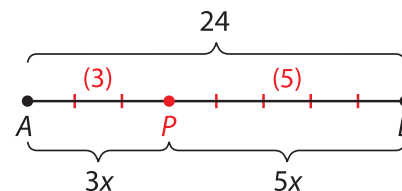


Janan AB pituus on 24.

- a) Piste P jakaa janan AB suhteessa $3 : 5$. Laske janan PB pituus.
 b) Janan AB jatkeella oleva piste Q jakaa janan AB suhteessa $5 : 11$. Laske janan AQ pituus.

RATKAISU

- a) Koska jakosuhde on $3 : 5$, niin jana AB voidaan jakaa $3 + 5 = 8$ yhtä suureen osaan. Merkitään yhden osan pituutta kirjaimella x . Janan AP pituus on kolme osaa eli $|AP| = 3x$ ja janan PB pituus viisi osaa eli $|PB| = 5x$.



Janan PB pituuden voi ratkaista myös seuraavasti :

$$\begin{aligned} |PB| &= \frac{5}{5+3} |AB| \\ &= \frac{5}{8} \cdot 24 = 15 \end{aligned}$$

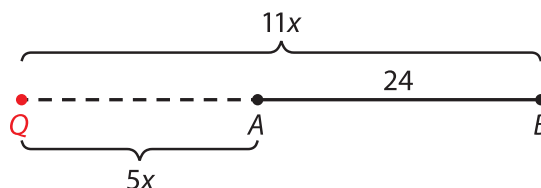
Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan yhden osan pituus x .

$$\begin{aligned} 3x + 5x &= 24 \\ 8x &= 24 & | : 8 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Lasketaan janan PB pituus: $|PB| = 5x = 5 \cdot 3 = 15$

- b) Koska janan AB jakosuhde on $5 : 11$, niin $\frac{|AQ|}{|QB|} = \frac{5}{11}$.

Tällöin piste Q on lähempänä pistettä A kuin pistettä B eli piste Q on pisteen A puoleisella janan jatkeella. Jakosuhteen perusteella $|AQ| = 5x$ ja $|QB| = 11x$.



Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan muuttuja x .

$$\begin{aligned} 11x &= 5x + 24 \\ 6x &= 24 & | : 6 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

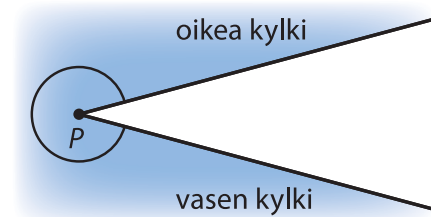
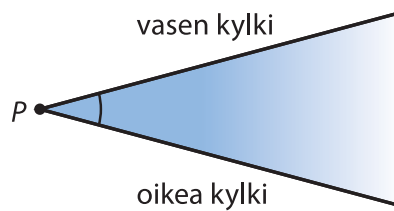
Lasketaan janan AQ pituus: $|AQ| = 5x = 5 \cdot 4 = 20$

VASTAUS

- a) $|PB| = 15$ b) $|AQ| = 20$

Kulma

Pisteestä P alkavat puolisuorat rajaavat kaksi *kulmaa*. Pistettä P kutsutaan kulman kärjeksi ja puolisuoria kulman kyljiksi.



Kreikkalaisia kirjaimia :

α (alfa)

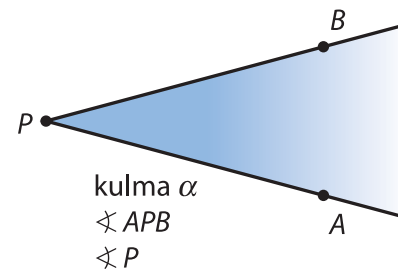
β (beeta)

γ (gamma)

δ (delta)

θ (theeta)

Kulma voidaan nimetä kreikkalaisella kirjaimella tai kärjen ilmaisevalla kirjaimella. Kulma voidaan nimetä myös kolmella kirjaimella, mikäli muu merkintä ei yksilöi kulmaa riittävän hyvin. Tällöin keskimäinen kirjain ilmaisee kärjen ja ensimmäinen sekä kolmas kirjain pisteet kulman kyljiltä.



Maa kiertää vuorokaudessa Auringon ympäri noin 1 asteen.



Kulman suuruuden tutuin mittayksikkö on *aste* (1°). Asteen osat ilmaistaan nykyisin yleensä desimaaleilla: esimerkiksi kulma $20,515^\circ$ on 20 kokonaista astetta ja 515 asteen tuhannesosaa.

Merenkulussa on käytössä merkintätapa, jossa yksi aste jaetaan 60 *kulmaminuuttiin* ($1^\circ = 60'$) ja vasta minuutin osat ilmaistaan desimaaleilla. Esimerkiksi kulma $20,515^\circ$ ilmaistaan muodossa

$$\begin{aligned} 20,515^\circ &= 20^\circ + 0,515 \cdot 60' \\ &= 20^\circ + 30,9' \\ &= 20^\circ 30,9'. \end{aligned}$$

Paikan maantieteellistä sijaintia ilmoitettaessa on tapana jakaa yksi aste 60 *kulmaminuuttiin* ($1^\circ = 60'$) ja yksi kulmaminuutti 60 *kulmasekuntiin* ($1' = 60''$). Esimerkiksi kulma $20,515^\circ$ ilmaistaan muodossa

$$\begin{aligned} 20,515^\circ &= 20^\circ + 30,9' \\ &= 20^\circ + 30' + 0,9 \cdot 60'' \\ &= 20^\circ + 30' + 54'' \\ &= 20^\circ 30' 54''. \end{aligned}$$

Kulman mittayksikkönä käytetään usein myös radiaania, johon tutustutaan kurssilla 7.

Laskimista löytyvää kolmatta kulman yksikköä goonia (eli uusastetta eli graadia) käytetään hyvin harvoin.



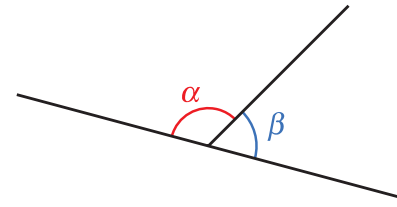
Kulmien luokittelu	
Nollakulma 0°	
Terävä kulma $0^\circ < \alpha < 90^\circ$	
Suora kulma 90°	
Tylppä kulma $90^\circ < \alpha < 180^\circ$	
Oikokulma 180°	
Kupera kulma $180^\circ < \alpha < 360^\circ$	
Täysi kulma 360°	

} Kovera kulma
 $0^\circ < \alpha < 180^\circ$

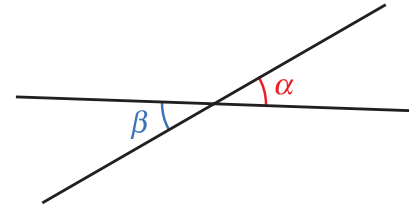
Kahden kulman α ja β summaan liittyvät nimitykset	
Komplementtikulmat α ja β : $\alpha + \beta = 90^\circ$	
Suplementtikulmat α ja β : $\alpha + \beta = 180^\circ$	
Eksplementtikulmat α ja β : $\alpha + \beta = 360^\circ$	

Vieruskulmat ja ristikulmat

Koverat kulmat α ja β , joiden toinen kylki on yhteinen ja toiset kyljet ovat samalla suoralla, ovat *vieruskulmia*. Vieruskulmat muodostavat oikokulman eli vieruskulmien summa on 180° .



Kahden suoran leikkauspisteeseen muodostuu neljä kulmaa. Vastakkaisia kulmia α ja β sanotaan *ristikulmiksi*.

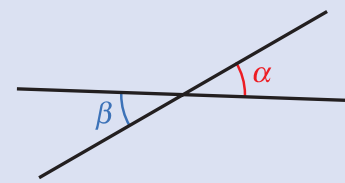


Ristikulmalause

Lause

Ristikulmat ovat yhtä suuret.

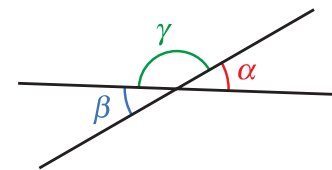
$$\alpha = \beta$$



TODISTUS

Piirretään kaksi leikkaavaa suoraa ja merkitään ristikulmia kirjaimilla α ja β .

Merkitään lisäksi toista niiden väliin jäävistä kulmista kirjaimella γ .



Kulmat α ja γ ovat vieruskulmia, joten $\alpha = 180^\circ - \gamma$.

Kulmat β ja γ ovat vieruskulmia, joten $\beta = 180^\circ - \gamma$.

Kulmat α ja β ovat siis yhtä suuret, joten voidaan päätellä, että ristikulmat ovat aina yhtä suuret. $\square$

Loppuun saatettu osoitus eli todistus päätetään usein merkillä $\square$.

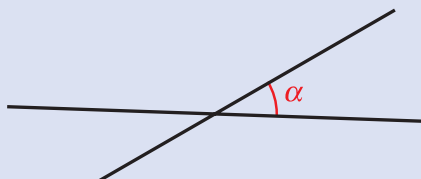
Suorien välinen kulma

Tason suorien välinen kulma

Määritelmä

Kahden suoran leikkauspisteeseen muodostuu neljä kulmaa. Suorien välisellä kulmalla tarkoitetaan näistä kulmista pienintä.

Yhdensuuntaisten suorien välinen kulma on 0° .



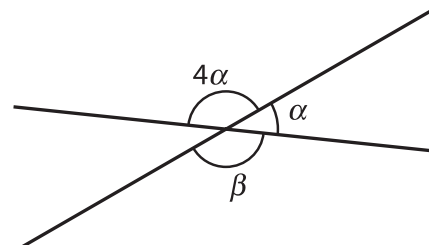
Suorien väliselle kulmalle α pätee ehto $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$.

ESIMERKKI 2



Kuinka suuri on

- a) kulma α
- b) kulma β
- c) suorien välinen kulma?



RATKAISU

- a) Kulmat α ja 4α ovat vieruskulmia. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan kulma α .

$$\alpha + 4\alpha = 180^\circ$$

Vieruskulmien summa on 180° .

$$5\alpha = 180^\circ \quad | :5$$

$$\alpha = 36^\circ$$

Kulman β voi ratkaista myös kulman α vieruskulmana:

$$\beta + 36^\circ = 180^\circ$$

$$\beta = 180^\circ - 36^\circ = 144^\circ.$$

- b) Kulmat β ja 4α ovat ristikulmina yhtä suuret.

$$\beta = 4\alpha = 4 \cdot 36^\circ = 144^\circ$$

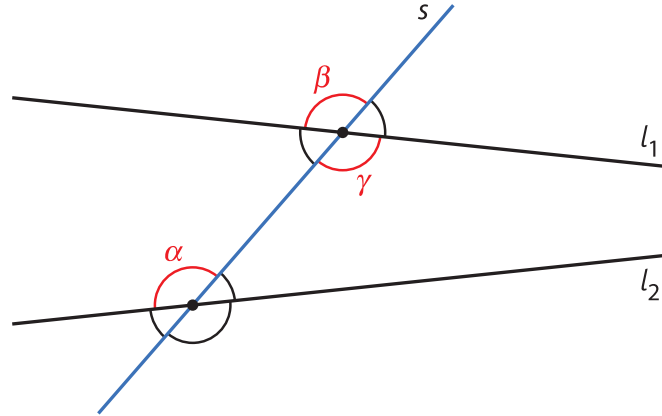
- c) Suorien leikkauspisteeseen muodostuvat kulmat ovat 36° ja 144° . Suorien välinen kulma on muodostuvista kulmista pienin, joten suorien välinen kulma on 36° .

VASTAUS

- a) 36° b) 144° c) 36°

Samankohtaiset kulmat

Kun suora s leikkaa kahta muuta suoraa l_1 ja l_2 , muodostuu molempiin leikkauspisteisiin neljän kulman ryhmä. Mikäli kahdella eri ryhmään kuuluvalla kulmalla on leikkaava suora s samannimisenä kylkenä, niin kulmia kutsutaan *samankohtaisiksi kulmiksi*.



Kuvassa kulmat α ja β kuuluvat eri ryhmään ja leikkaava suora s on molempien kulmien oikea kylki. Kulmat α ja β ovat siis samankohtaisia kulmia.

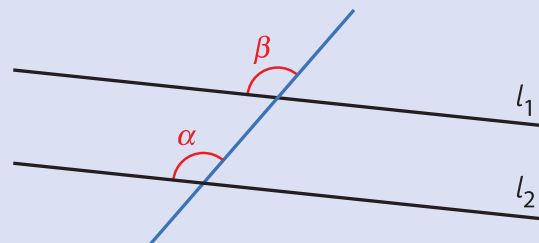
Kulmat α ja γ kuuluvat eri ryhmään ja leikkaava suora s on molempien kulmien oikea kylki. Siis myös kulmat α ja γ ovat samankohtaisia kulmia.

Yhdensuuntaisuuslause

Lause

Suoran leikatessa kahta muuta suoraa ovat samankohtaiset kulmat yhtä suuret täsmälleen silloin, kun leikatut suorat ovat yhdensuuntaiset.

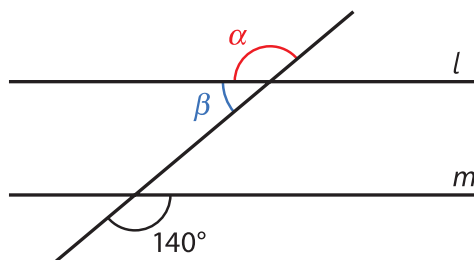
$$\alpha = \beta \Leftrightarrow l_1 \parallel l_2$$



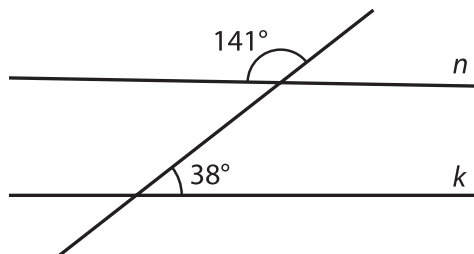


Kulman määrittäminen tarkoittaa kulman suuruuden laskemista.

- a) Suorat l ja m ovat yhdensuuntaiset. Määritä kulmat α ja β .

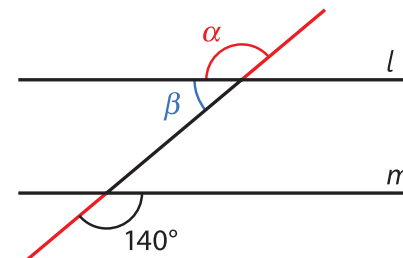


- b) Ovatko suorat n ja k yhdensuuntaiset?



RATKAISU

- a) Koska suorat l ja m ovat yhdensuuntaiset, niin samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuret. Leikkaava suora on kulman α ja 140° :n kulman oikea kylki, joten ne ovat samankohtaisia kulmia. Täten $\alpha = 140^\circ$.

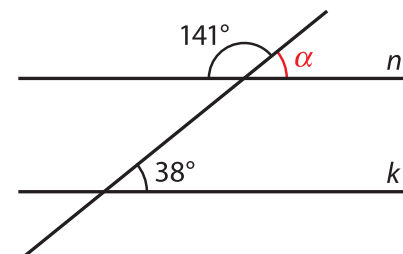


Kulma β on kulman α vieruskulma, joten $\beta = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$.

- b) Kuvaan merkitty kulma α ja 38° :n kulma ovat samankohtaisia kulmia. Tutkitaan, ovatko samankohtaiset kulmat yhtä suuria.

Kulma α on 141° :n kulman vieruskulma, joten $\alpha = 180^\circ - 141^\circ = 39^\circ \neq 38^\circ$.

Koska samankohtaiset kulmat eivät ole yhtä suuria, niin suorat n ja k eivät ole yhdensuuntaiset.



VASTAUS

- a) $\alpha = 140^\circ$ ja $\beta = 40^\circ$ b) eivät ole

Harjoitustehtäviä

Sarja I

1. Päättelä kuvassa olevan Mikkelin kartan perusteella pitääkö väite paikkansa.
 - a) Arkistokatu ja Maaherrankatu ovat yhdensuuntaisia.
 - b) Pirttiniemenkatu ja Tenholankatu ovat yhdensuuntaisia.
 - c) Olkkolankatu ja Tenholankatu eivät ole yhdensuuntaisia.
 - d) Olkkolankatu ja Arkistokatu ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.
 - e) Olkkolankatu on Kansankadun normaali.
 - f) Tenholankatu on Maaherrankadun normaali.

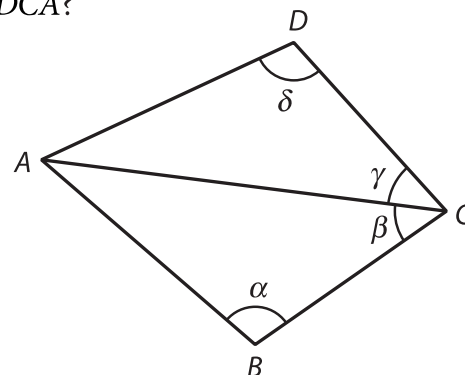


2. Piirrä geometriaohjelmalla.
 - a) Kaksi pistettä A ja B ja niiden kautta kulkeva suora AB .
 - b) Suoran AB ulkopuolelle piste C ja suoralle AB normaali, joka kulkee pisteen C kautta. Merkitse suorien leikkauspiste pisteeksi D .
 - c) Molempien suorien ulkopuolelle piste E ja suoralle CD normaali, joka kulkee pisteen E kautta. Merkitse suorien leikkauspiste pisteeksi F .
 - d) Suora, joka kulkee pisteen E kautta ja on yhdensuuntainen suoran CD kanssa.
 - e) Päättelä kuvan perusteella, onko suora EF suoran AB kanssa yhdensuuntainen.

3. Janan AB pituus on 20.
 - E1 a) Piste P jakaa janat AB suhteessa 7:3. Määritä janat AP pituus.
 - b) Janan AB jatkeella oleva piste Q jakaa janat AB suhteessa 4:9. Määritä janat AQ pituus.

4. Pistet A , B ja C ovat samalla suoralla.
 - a) Janan AB pituus on 12 cm ja janat BC pituus 5 cm. Laske janat AC pituus, kun piste B sijaitsee a) janalla AC b) janat AC jatkeella.

5. Mikä kuvaan merkityistä kulmista α , β , γ ja δ on
 - a) $\sphericalangle CBA$ b) $\sphericalangle ADC$ c) $\sphericalangle ACB$
 - d) $\sphericalangle DCA$?



6. Ilmaise Kuopiossa olevan Puijon tornin leveyspiiri $62,910^\circ$ ja pituuspiiri $27,655^\circ$
- asteina ja minuutteina
 - asteina, minuutteina ja sekunteina.

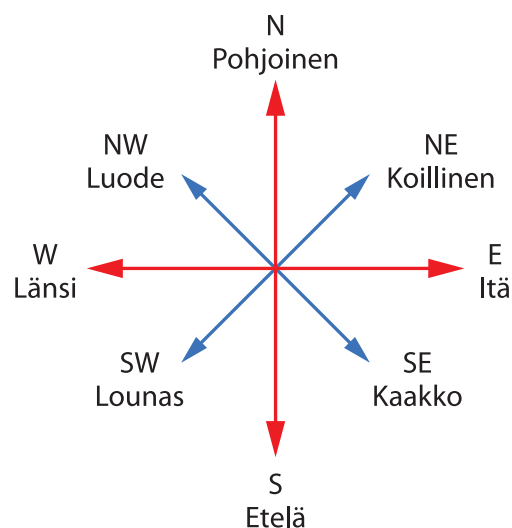


7. a) Luokittele oheiseen taulukkoon kulmat 25° , 183° , 65° , 210° , 95° , 90° , 350° , 180° , 85° , 155° ja 177° .

Terävä kulma	Tylppä kulma	Kovera kulma	Kupera kulma

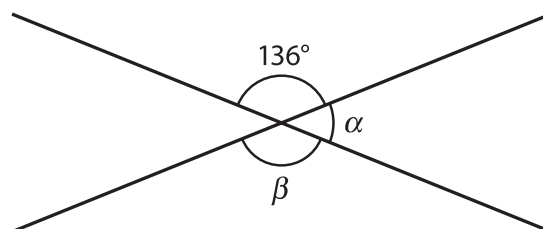
- Mitkä kulmista ovat toistensa komplementtikulmia?
- Mitkä kulmista ovat toistensa supplementtikulmia?

8. Kompassisuunnat ilmaistaan kulmina pohjoisesta lukien myötäpäivään, pohjoissuunnan vastatessa kompassisuuntaa 0° .
- Eemeli kulkee kompassisuuntaan 135° . Mihin ilmansuuntaan hän kulkee?
 - Yöpymispaikka on luoteessa. Mihin kompassisuuntaan pitää kulkea?
 - Maiju kulkee kompassisuuntaan 50° . Samu kävelee Maijua kohti vastakkaisesta suunnasta. Mihin kompassisuuntaan Samu kävelee?



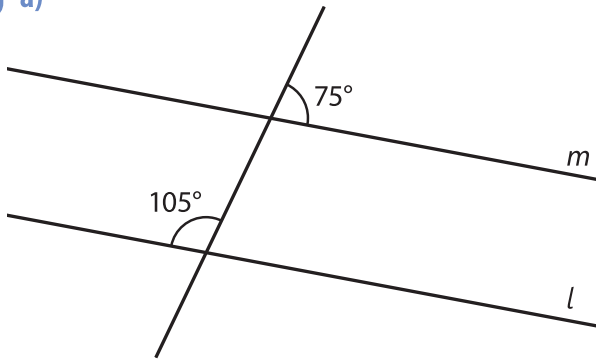
9. Kulman β suuruus on nelinkertainen kulmaan α verrattuna. Laske kulman α suuruus, kun α ja β ovat
- komplementtikulmia
 - suplementtikulmia
 - eksplementtikulmia.

10. Kuinka suuri on
- α
 - β
 - suorien välinen kulma?

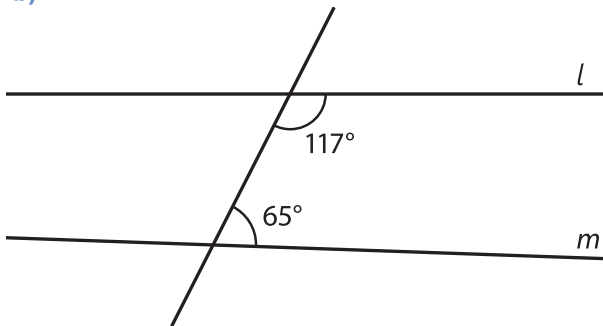


11. Ovatko suorat l ja m yhdensuuntaiset?

E3 a)

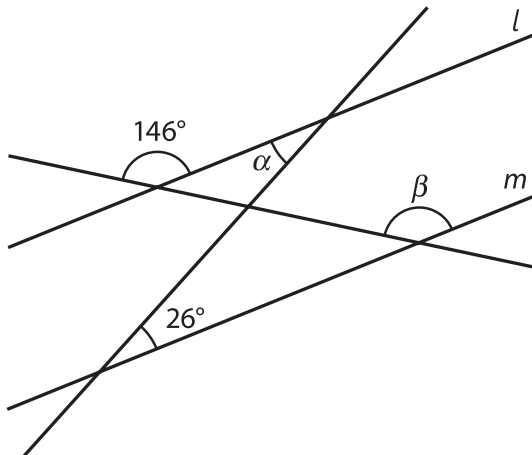


b)

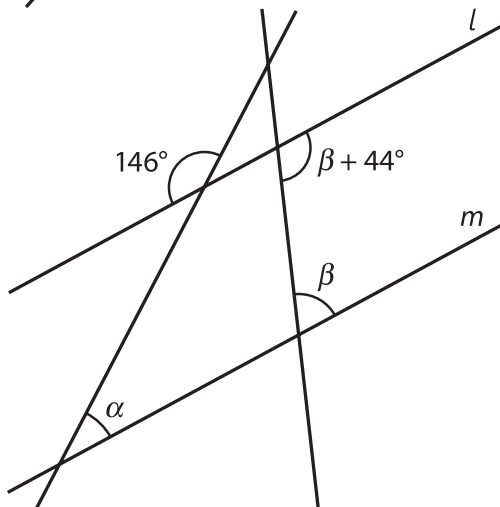


12. Määritä kulmat α ja β , kun suorat l ja m ovat yhdensuuntaiset.

a)



b)



Sarja II

13. Missä suhteessa suoralla AC oleva piste B jakaa janan AC , kun

a) $|AB| = \frac{4}{5}|AC|$ b) $|AB| = \frac{11}{7}|AC|$?

14. Muunna kulma desimaalimuotoon. Ilmoita vastaus kolmen desimaalin tarkkuudella.

a) $60^\circ 26' 07''$ (Turun linnan leveyspiiri)

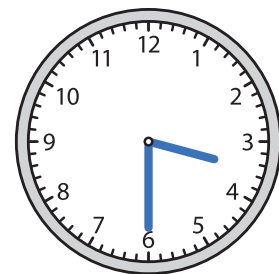
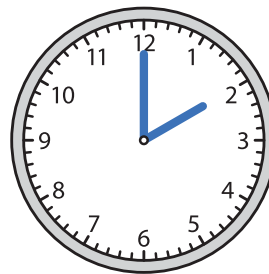
b) $22^\circ 13' 43''$ (Turun linnan pituuspiiri)



15. Kuinka suuri on kellon osoittimien välinen pienempi kulma?

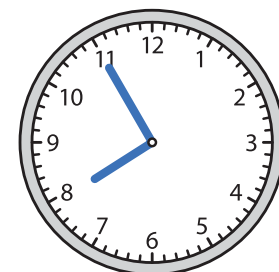
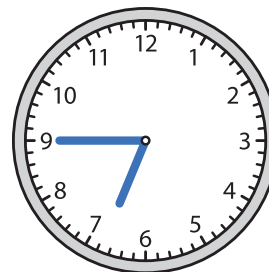
a) klo 02.00

b) klo 15.30



c) klo 18.45

d) klo 19.55

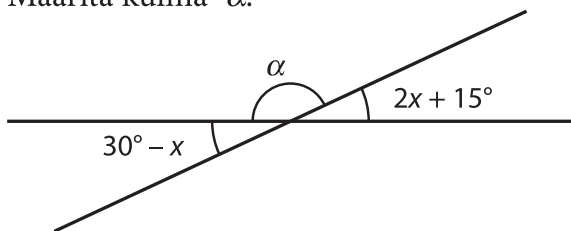


16. Kulma β on 20 astetta pienempi kuin kulma α . Määritä kulmien α ja β suuruudet, kun ne ovat toistensa

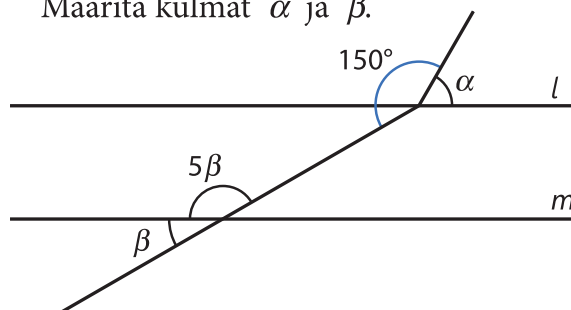
- a) komplementtikulmia
- b) suplementtikulmia
- c) eksplementtikulmia.

17. Määritä suorien leikkauspisteeseen muodostuvien vieruskulmien α ja β suuruudet, kun kulmien suhde on $\alpha : \beta = 11 : 7$. Kuinka suuri on suorien välinen kulma?

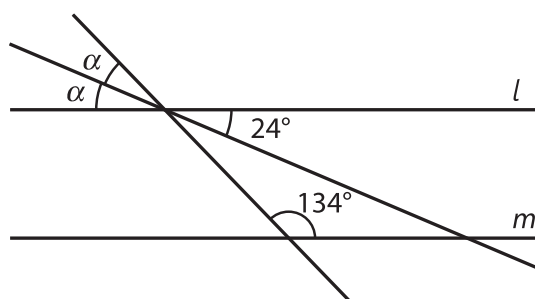
18. Määritä kulma α .



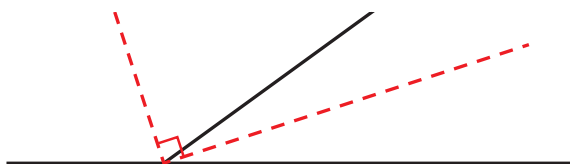
19. a) Suorat l ja m ovat yhdensuuntaiset. Määritä kulmat α ja β .



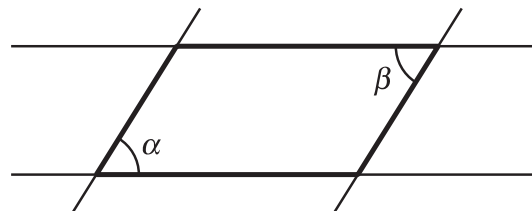
- b) Ovatko suorat l ja m yhdensuuntaiset?



20. Kulman puolittaja on kulman kärjestä alkava puolisuora, joka jakaa kulman kahteen yhtä suureen osaan. Osoita, että kulman ja sen vieruskulman puolittajat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.



21. Suunnikas on nelikulmio, jonka vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset. Osoita oheisen kuvion avulla, että suunnikkaan vastakkaiset kulmat α ja β ovat yhtä suuret.



22. Piste P kohtisuora projektio suoralla l on pisteen P kautta kulkevan normaalin ja suoran leikkauspiste.



Piirrä oheisen mallin mukainen kuvio geometriaohjelmalla ja piirrä suoralle l pisteiden A , B ja C kohtisuorat projektiot.

• A

• B

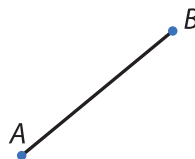
l

• C

23. Janan AB kohtisuora projektio suoralla l saadaan, kun projisoidaan jokainen janan piste suoralle l .



Piirrä oheisen mallin mukainen kuvio geometriaohjelmalla ja piirrä suoralle l janojen AB ja CD kohtisuorat projektiot.



l



24. Kellon osoittimet liikkuvat portaattomasti. Kun kello on 9.00, osoittimet muodostavat suoran kulman. Määritä sekunnin tarkkuudella kellonaika, jolloin osoittimet seuraavan kerran muodostavat suoran kulman.

1.2 Monikulmioita

TUTKIMUS



Piirrä geometriaohjelmalla samaan kuvaan

- kolme pistettä A , B ja C , jotka eivät ole samalla suoralla
- jana AB
- jana AC
- janan AB kanssa yhdensuuntainen suora l , joka kulkee pisteen C kautta
- janan AC kanssa yhdensuuntainen suora m , joka kulkee pisteen B kautta
- suorien l ja m leikkauspiste D .

- 1) Kuvaan muodostui nelikulmio $ABCD$, jonka vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset. Mikä on tällaisen kuvion nimi?
- 2) Mittaa vastakkaisten sivujen pituudet. Muuta nelikulmion muotoa raahaamalla pistettä A , B tai C . Tarkkaile vastakkaisten sivujen pituuksia. Mitä havaitset?
- 3) Mittaa vastakkaisten kulmien suuruudet. Muuta nelikulmion muotoa raahaamalla pistettä A , B tai C . Mitä havaitset?
- 4) Piirrä nelikulmion lävistäjät. Merkitse lävistäjien leikkauspiste kuvaan. Mittaa lävistäjien osien pituudet. Mitä havaitset?



Janan pituus geometriaohjelmalla

Geometriaohjelmissa on oma työkalu janan pituuden mittaamiseksi. Yleensä pituus voidaan mitata kahdella tavalla.

- Valitaan janan päätepisteet.
- Valitaan jana.



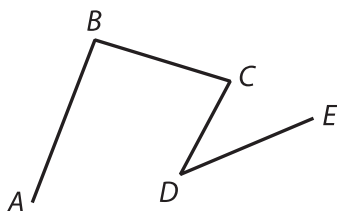
Kulman suuruus geometriaohjelmalla

Geometriaohjelmissa on oma työkalu kulman suuruuden mittamiseksi. Kulman suuruus voidaan mitata kahdella tavalla.

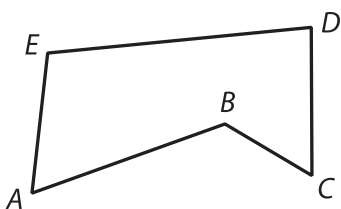
- Valitaan kulman kyljet. Yleensä pitää valita ensin kulman oikea kylki ja sen jälkeen kulman vasen kylki.
- Valitaan kolme pistettä; yksi kummaltakin kyljeltä ja kulman kärkipiste. Valinta pitää yleensä tehdä järjestyksessä: oikean kyljen piste, kärki, vasemman kyljen piste.

Monikulmio

Murtoviiva $ABCDE$:



Monikulmio $ABCDE$:

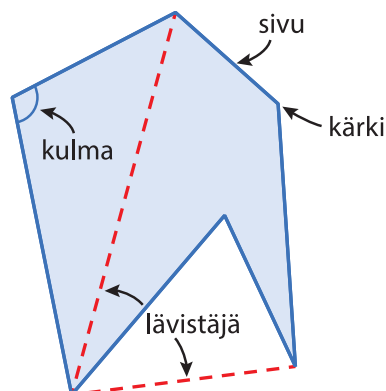


Monikulmiossa on yhtä monta kulmaa, kärkeä ja sivua.

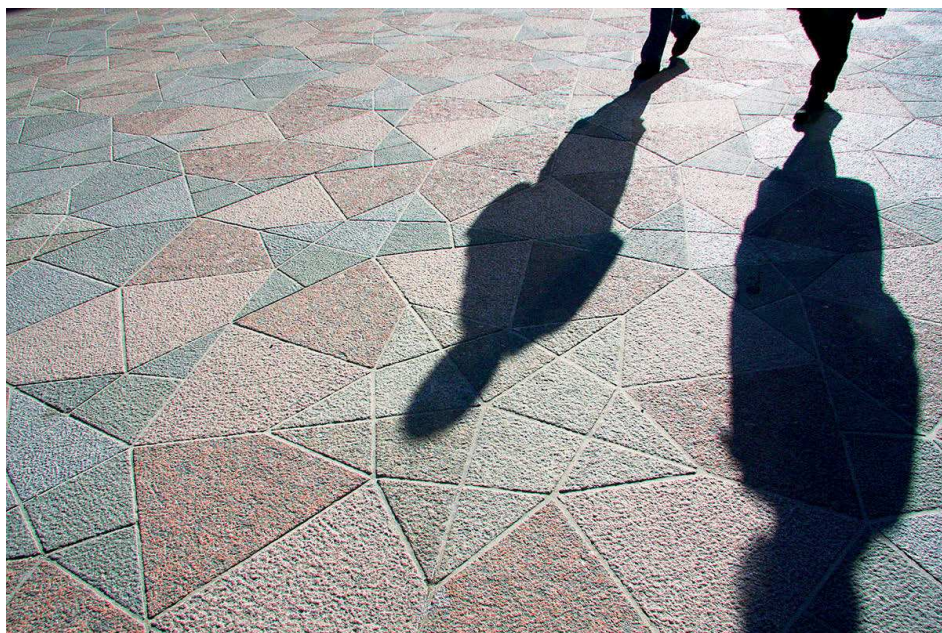
Toisiinsa peräkkäin liitettyjen janojen muodostamaa viivaa kutsutaan *murtoviivaksi*. Suljetun, itseään leikkaamattoman, murtoviivan rajaamaa tasoaletta kutsutaan *monikulmioksi*.

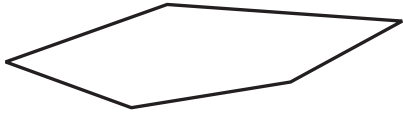
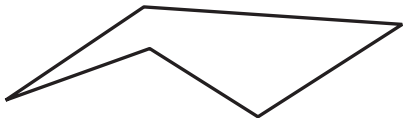
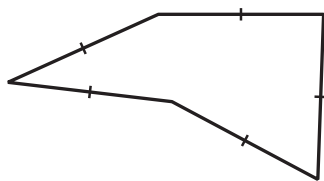
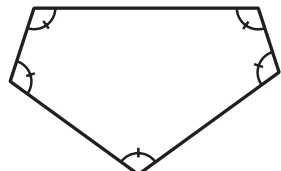
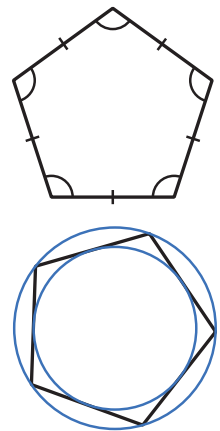
Monikulmioon liittyy seuraavat nimitykset:

- *piiri*:
 - a) murtoviiva, joka muodostaa monikulmion
 - b) tämän murtoviivan pituus
- *sivut*: janat, jotka muodostavat monikulmion piirin
- *kärjet*: sivujen päätepisteet
- *lävistäjä*: kahta monikulmion kärkeä yhdistävä jana, joka ei ole monikulmion sivu
- *kulma*: monikulmion sisään aukeava kahden vierekkäisen sivun väliin jäävä kulma



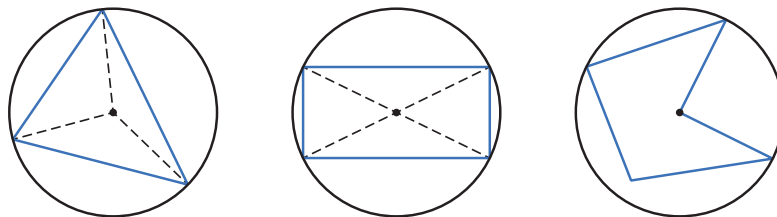
Penrosen laatat on esimerkki tason peittämisestä jaksottomasti monikulmioilla. Ne on nimetty jaksottomia laatoituksia 1970-luvulla tutkineen matemaatikko ja fyysikko Sir Roger Penrosen mukaan.



Monikulmioiden luokittelua	
Kupera monikulmio Kaikki kulmat ovat alle 180° . Kaikki lävistäjät kulkevat monikulmion sisällä.	
Kovera monikulmio Ainakin yksi kulma on yli 180° . Ainakin yksi lävistäjästä kulkee monikulmion ulkopuolella.	
Tasasivuinen monikulmio Kaikki sivut ovat yhtä pitkiä.	
Tasakulmainen monikulmio Kaikki kulmat ovat yhtä suuria.	
Säännöllinen monikulmio Kaikki sivut ovat yhtä pitkiä ja kulmat yhtä suuria. Säännöllisen monikulmion keskipisteeksi kutsutaan sen ympäri ja sisään piirrettyjen ympyröiden yhteistä keskipistettä.	

Yleisesti monikulmion keskipisteeksi kutsutaan pistettä, joka on yhtä kaukana kaikista monikulmion kärjistä. Tämä piste on myös monikulmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste.

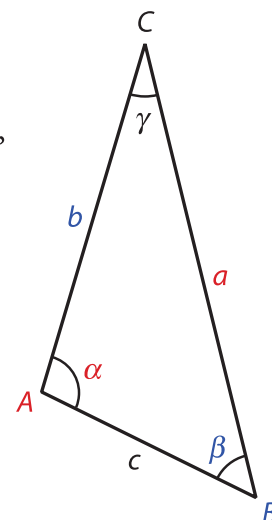
Kaikilla monikulmioilla ei ole keskipistettä. Alla olevista monikulmioista oikeanpuolimmaisella ei ole keskipistettä.



Monikulmiot nimetään kulmien lukumäärän mukaan: kolmiossa on 3 kulmaa, nelikulmiossa 4 kulmaa, viisikulmiossa 5 kulmaa jne.

Kolmio

Yksinkertaisin monikulmioista on *kolmio*. Kolmio nimetään usein kärkipisteiden mukaan, esimerkiksi kolmio ABC tai $\triangle ABC$. Kolmion kärkiä, sivuja ja kulmia on tapana merkitä aakkosjärjestyksessä vastapäivään kiertäen niin, että kärjessä A olevan kulman α vastainen sivu on a , kärjessä B olevan kulman β vastainen sivu b ja kärjessä C olevan kulman γ vastainen sivu c .

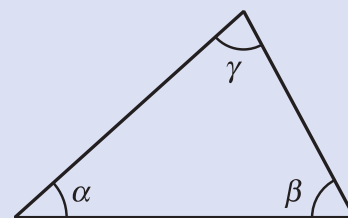


Kolmion kulmien summa

Lause

Kolmion kulmien summa on 180° .

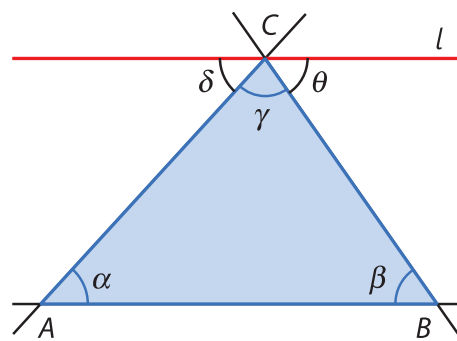
$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$



TODISTUS

Merkitään kolmion kärkiä A , B ja C ja vastaavia kulmia α , β ja γ .

Piirretään kärjen C kautta sivun AB suuntainen suora l ja jatketaan kolmion sivuja.



Suoran AC leikatessa yhdensuuntaisia suoria l ja AB muodostuvat samankohtaiset kulmat δ ja α ovat yhtä suuret. Siis $\delta = \alpha$.

Vastaavasti suoran BC leikatessa yhdensuuntaisia suoria l ja AB muodostuvat samankohtaiset kulmat θ ja β ovat yhtä suuret. Siis $\theta = \beta$.

Kulmat δ , γ ja θ muodostavat oikokulman.

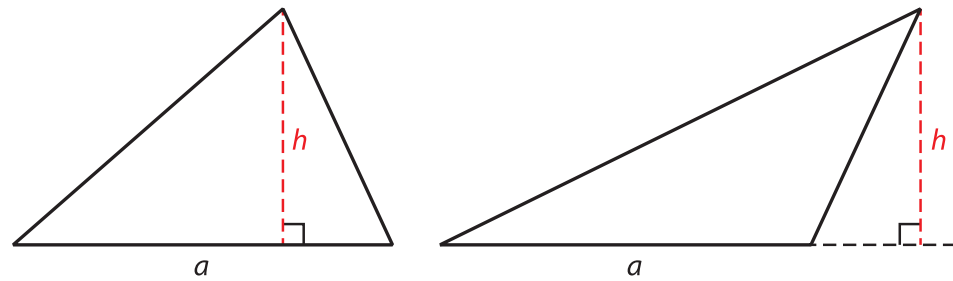
$$\delta + \gamma + \theta = 180^\circ$$

Sijoitetaan $\delta = \alpha$ ja $\theta = \beta$.

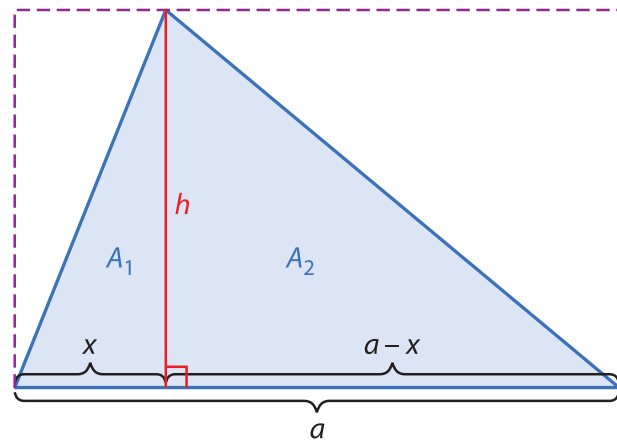
$$\alpha + \gamma + \beta = 180^\circ$$

Kolmion kulmien α , β ja γ summa on siis 180° . $\square$

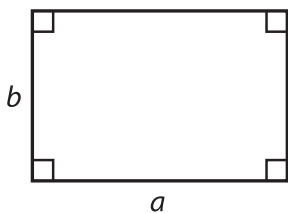
Mikä tahansa kolmion sivuista voidaan nimetä *kannaksi* a , jolloin sitä vastassa oleva kärki on kolmion *huippu*. Kolmion *korkeusjana* h on huipusta kannalle tai sen jatkeelle piirretty kohtisuora jana.



Tarkastellaan kolmiota, jonka kanta on a ja korkeus h . Oletetaan, että kolmion korkeusjana on piirretty kolmion sisäpuolelle. Kolmio voidaan aina täydentää suorakulmioksi, jonka kanta on a ja korkeus h .



Suorakulmion pinta-ala on sivujen pituuksien tulo, $A = ab$.



Vasemmanpuoleisen suorakulmion pinta-ala on xh . Suorakulmion lävistäjä jakaa sen kahteen identtiseen kolmioon, joten $A_1 = \frac{1}{2}xh$.

Oikeanpuoleisen suorakulmion pinta-ala on $(a-x)h$. Suorakulmion lävistäjä jakaa sen kahteen identtiseen kolmioon, joten $A_2 = \frac{1}{2}(a-x)h$.

Kolmion pinta-alaksi saadaan siis

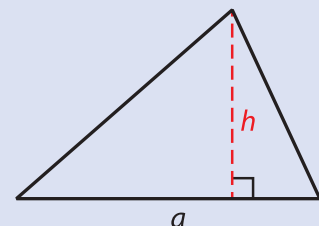
$$A = A_1 + A_2 = \frac{1}{2}xh + \frac{1}{2}(a-x)h = \cancel{\frac{1}{2}xh} + \frac{1}{2}ah - \cancel{\frac{1}{2}xh} = \frac{1}{2}ah.$$

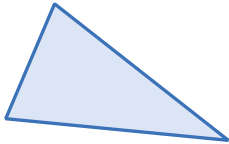
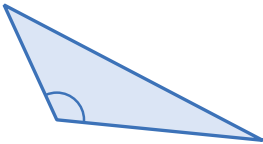
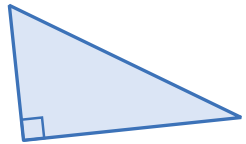
Kolmion pinta-ala

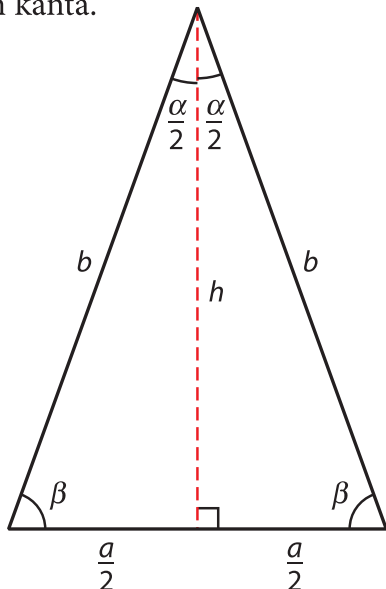
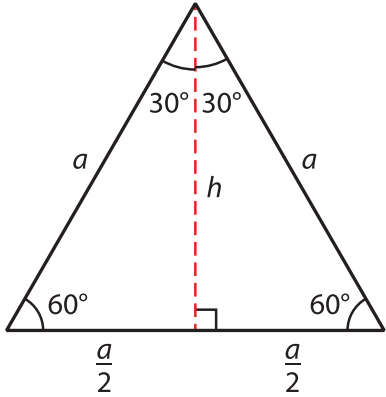
Lause

Kolmion pinta-ala on puolet kannan a ja korkeuden h tulosta.

$$A = \frac{1}{2}ah$$



Kolmioiden luokittelu kulmien suuruuksien perusteella		
Teräväkulmainen kolmio Kaikki kulmat alle 90° . 	Tylppäkulmainen kolmio Yksi kulma yli 90° . 	Suorakulmainen kolmio Yksi kulma 90° . 

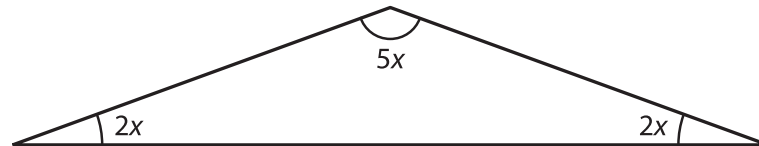
Määritelmiä	Lauseita
Tasakylkinen kolmio Kaksi yhtä pitkää sivua, joita kutsutaan kyljiksi. Kolmas sivu on kanta. 	- Huipusta piirretty korkeusjana h puolittaa huippukulman α ja kannan a. - Kantakulmat ovat yhtä suuret. - Jos kolmiossa on kaksi yhtä suurta kulmaa, se on tasakylkinen.
Tasasivuinen kolmio Kaikki sivut ovat yhtä pitkiä. 	- Mistä tahansa kärjestä piirretty korkeusjana h puolittaa kulman ja sen vastaisen sivun. - Kaikki kulmat ovat yhtä suuria, suuruudeltaan 60°.



Tasakylkisen kolmion huippukulman ja kantakulman suhde on $5 : 2$. Määritä kolmion kulmat.

RATKAISU

Huippukulman ja kantakulman suhde on $5 : 2$. Olkoon huippukulman suuruus $5x$. Tällöin kantakulman suuruus on $2x$. Tasakylkisessä kolmiossa kantakulmat ovat yhtä suuret. Piirretään mallikuvio.



Kolmion kulmien summa on 180° . Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan muuttuja x .

$$\begin{aligned} 5x + 2x + 2x &= 180^\circ \\ 9x &= 180^\circ \quad | :9 \\ x &= 20^\circ \end{aligned}$$

Lasketaan kulmien suuruudet.

$$\text{Huippukulma: } 5x = 5 \cdot 20^\circ = 100^\circ$$

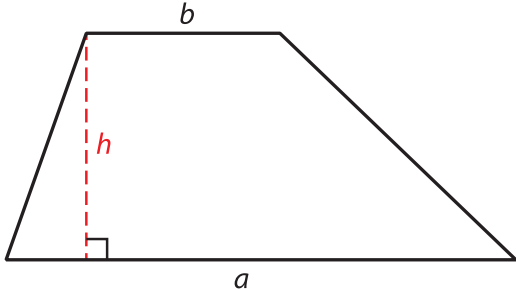
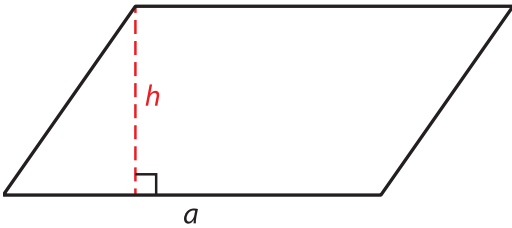
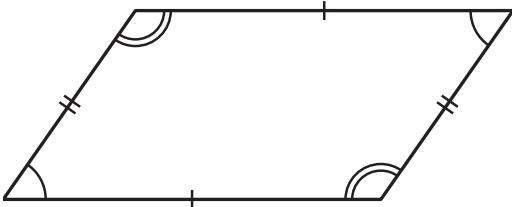
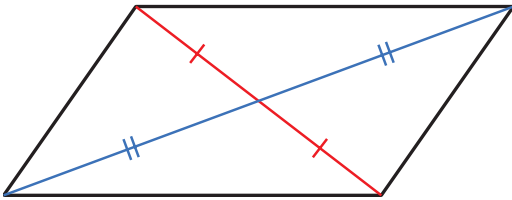
$$\text{Kantakulmat: } 2x = 2 \cdot 20^\circ = 40^\circ$$

VASTAUS

100° , 40° ja 40°

Nelikulmio

Nelikulmioita voidaan luokitella sivujen suuntien perusteella.

Määritelmiä	Lauseita
Puolisuunnikas Kaksi yhdensuuntaista sivua. 	Puolisuunnikkaan pinta-ala on yhdensuuntaisten sivujen a ja b keskiarvon ja korkeuden h tulo. $A = \frac{1}{2}(a+b)h$
Suunnikas Vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset.   	Suunnikkaan pinta-ala on kannan a ja korkeuden h tulo. $A = ah$ Suunnikkaan - vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuret. - vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkät. - lävistäjät puolittavat toisensa

Osaan janoista on piirretty yksi väkänen, tämä tarkoittaa, että nämä janat ovat keskenään yhtä pitkiä. Kahdella väkäsellä merkityt janat ovat vastaavasti keskenään yhtä pitkiä.

Kulmien yhtäsuuruutta voidaan merkitä vastaavasti käyttämällä yhtä tai useampaa kaarta.

Puolisuunnikkaan ja suunnikkaan pinta-alojen kaavat todistetaan harjoitustehtävässä 40.



Voit kerrata mittayksiköt sivulta 196.

Laskut on helpompi merkitä ilman yksiköitä. Yksiköihin tulee kuitenkin kiinnittää huomiota, jotta vastaukseen saadaan oikea yksikkö. Tässä sivujen pituudet ovat metreinä, joten pinta-alan tulee olla neliömetreinä.

ESIMERKKI 2

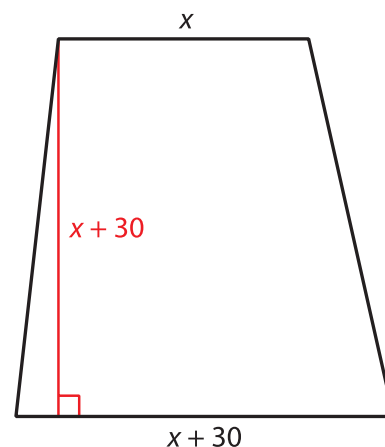
Santerin ja Seljan omakotitalon tontti on puolisuunnikkaan muotoinen. Yhdensuuntaisten sivujen pituuksien ero on 30 metriä ja tontin pinta-ala on 0,85 hehtaaria. Määritä yhdensuuntaisten sivujen pituudet, kun puolisuunnikkaan korkeusjana on yhtä pitkä kuin pidempi yhdensuuntaisista sivuista.

RATKAISU

Piirretään mallikuva. Merkitään lyhyemmän yhdensuuntaisen sivun pituutta metreinä kirjaimella x . Tällöin pidemmän sivun pituus on $x + 30$.

Muunnetaan pinta-alan yksikkö neliömetreiksi, koska sivujen pituudet ovat metreinä:

$$A = 0,85 \text{ ha} = 8500 \text{ m}^2.$$



Muodostetaan yhtälö puolisuunnikkaan pinta-alan kaavan avulla.

$$A = \frac{1}{2}(a + b)h$$

$$A = 8500$$

$$a = x$$

$$b = x + 30$$

$$h = x + 30$$

$$8500 = \frac{1}{2}(x + x + 30)(x + 30)$$

$$8500 = \frac{1}{2}(2x + 30)(x + 30)$$

Sievennetään yhtälö.

$$x^2 + 45x - 8050 = 0$$

Ratkaistaan yhtälö laskimella.

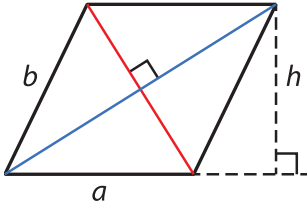
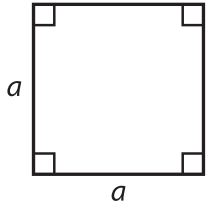
$$x = -115 \text{ tai } x = 70$$

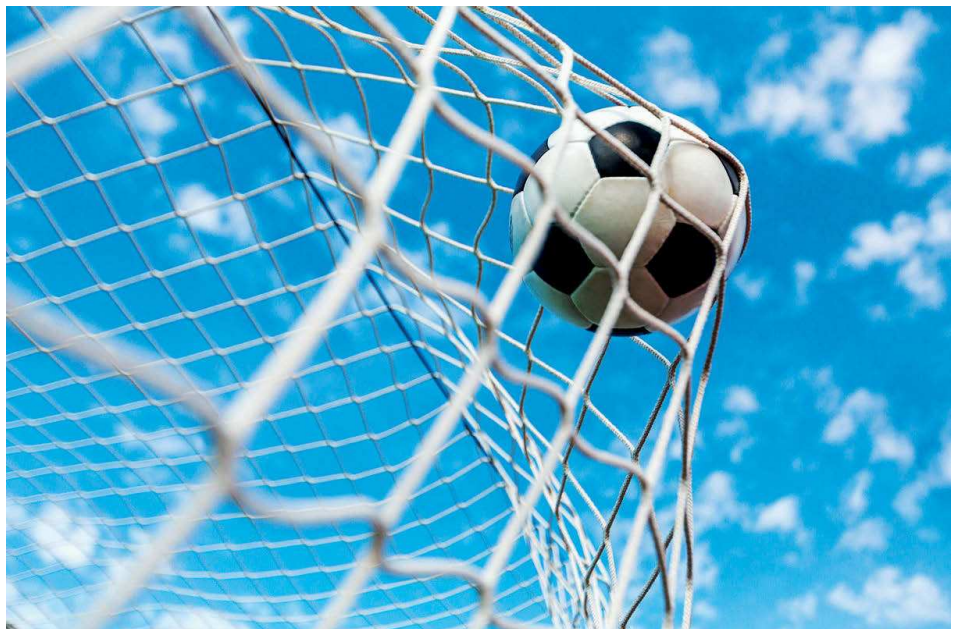
Koska sivun pituus x on positiivinen, niin $x = 70$ (m). Siis lyhyempi sivu on 70 m ja pidempi sivu on $70 \text{ m} + 30 \text{ m} = 100 \text{ m}$.

VASTAUS

70 m ja 100 m

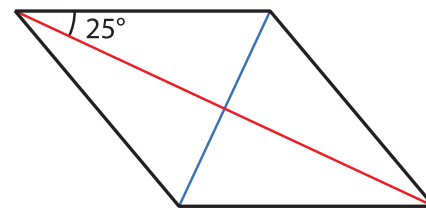
Suunnikkaan erikoistapauksia voidaan luokitella sivujen pituuksien ja kulmien suuruuksien perusteella. Näille pätevät kaikki suunnikkaalle esitetyt lauseet.

Suunnikkaan erikoistapauksia		
Neljäkäs eli vinoneliö Suunnikas, jonka kaikki sivut ovat yhtä pitkät. Neljäkkään lävistäjät ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.  $A = ah$	Suorakulmio Suunnikas, jonka kaikki kulmat ovat suoria.  $A = ab$	Neliö Suunnikas, jonka kaikki sivut ovat yhtä pitkät ja kaikki kulmat ovat suoria.  $A = a^2$





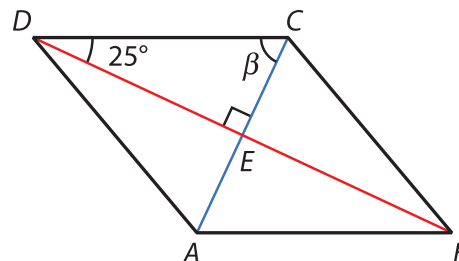
Määritä kuvassa olevan neljäkkään kulmat.



RATKAISU

Käytetään kuvan merkintöjä.

Koska neljäkkään kaikki sivut ovat yhtä pitkät, on kolmio ACD tasakylkinen.



Koska neljäkkään lävistäjät ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, on jana DE korkeusjana ja se puolittaa tasakylkisen kolmion huippukulman D .

Lasketaan neljäkkään kulma D .

$$\sphericalangle D = 2 \cdot 25^\circ = 50^\circ$$

Koska suunnikkaan (ja täten myös neljäkkään) vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuret, on myös kulman B suuruus 50° .

Koska kolmion kulmien summa 180° , niin kulma β voidaan laskea kolmiosta DEC .

$$\beta = 180^\circ - 25^\circ - 90^\circ = 65^\circ$$

Koska kolmio DBC on tasakylkinen, niin $\sphericalangle C = 2\beta = 2 \cdot 65^\circ = 130^\circ$.

Koska suunnikkaan vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuret, on myös kulman A suuruus 130° .

VASTAUS

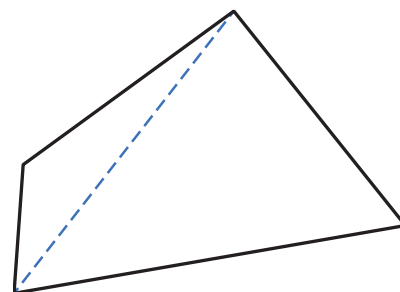
50° , 50° , 130° ja 130°

ESIMERKKI 4

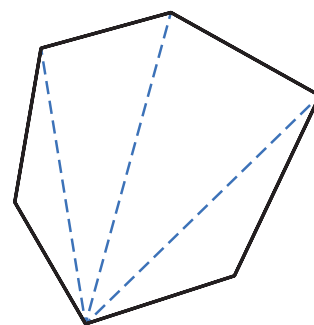
Laske kuperan **a)** nelikulmion **b)** kuusikulmion kulmien summa.

RATKAISU

- a)** Nelikulmio voidaan jakaa lävistäjällä kahdeksi kolmioksi. Nelikulmion kulmien summa on yhtä suuri kuin kahden kolmion kulmien summa:
- $$2 \cdot 180^\circ = 360^\circ.$$



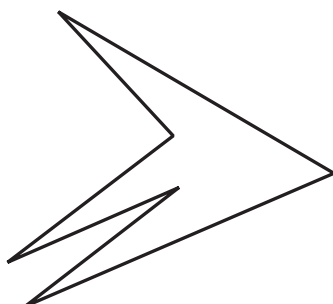
- b)** Kupera kuusikulmio voidaan jakaa samasta kärjestä lähtevillä lävistäjillä neljäksi kolmioksi. Kuusikulmion kulmien summa on yhtä suuri kuin neljän kolmion kulmien summa:
- $$4 \cdot 180^\circ = 540^\circ.$$



VASTAUS

- a)** 360° **b)** 540°

Lauseen yleinen todistus vaatii toisenlaisen menetelmän. Kun kulmien lukumäärä on vähintään kuusi, monikulmiossa ei välttämättä ole yhtään kärkeä, josta piirretyistä lävistäjistä kaikki kulkisivat monikulmion sisällä.



Esimerkin 5 päättely voidaan yleistää kaikille kuperille monikulmioille: Monikulmion yhdestä kärjestä lähtevät lävistäjät kulkevat monikulmion sisällä ja jakavat monikulmion kolmioihin niin, että kolmioita muodostuu kaksi vähemmän kuin monikulmiossa on kulmia.

Voidaan osoittaa, että sama tulos pätee myös koverille monikulmioille.

Monikulmion kulmien summa

Lause

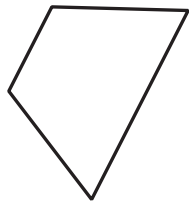
Jos monikulmiossa on n kulmaa, niin kulmien summa on

$$(n - 2) \cdot 180^\circ.$$

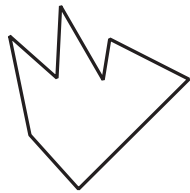
Harjoitustehtäviä

Sarja I

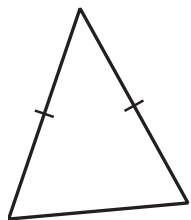
25. Luokittele monikulmiot taulukkoon.



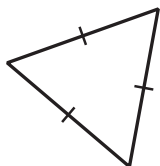
A



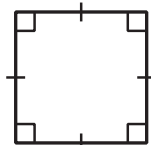
B



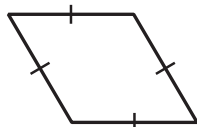
C



D



E

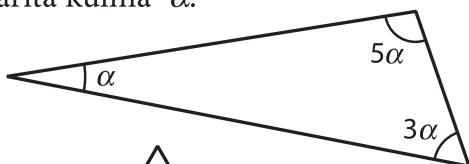


F

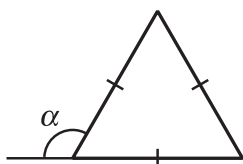
Kupera monikulmio	
Kovera monikulmio	
Säännöllinen monikulmio	
Suunnikas	
Tasakylkinen kolmio	
Tasasivuinen kolmio	

26. Määritä kulma α .

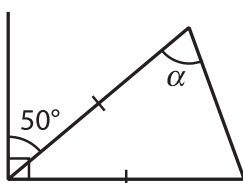
E1 a)



b)



c)



27. Muunna annettuun yksikköön. Voit kerrata mittayksiköt sivulta 196.

a) $4\,560\text{ cm} = \underline{\hspace{2cm}}\text{ m}$

b) $0,45\text{ km} = \underline{\hspace{2cm}}\text{ m}$

c) $125\text{ m}^2 = \underline{\hspace{2cm}}\text{ a}$

d) $2,5\text{ ha} = \underline{\hspace{2cm}}\text{ m}^2$

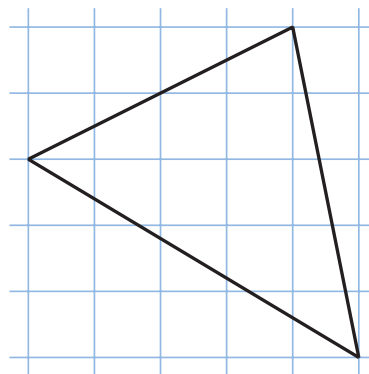
e) $8,54 \cdot 10^6\text{ mm}^2 = \underline{\hspace{2cm}}\text{ m}^2$

f) $2,5\text{ dl} = \underline{\hspace{2cm}}\text{ dm}^3$

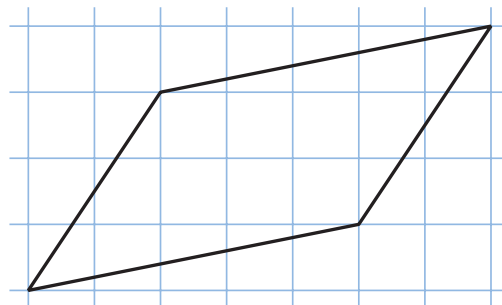
g) $149\text{ cm}^3 = \underline{\hspace{2cm}}\text{ l}$

28. Piirrä mallikuvion mukainen kuvio geometriaohjelmalla. Mittaa tarvittavat tiedot ja laske kuvion pinta-ala kahden numeron tarkkuudella.

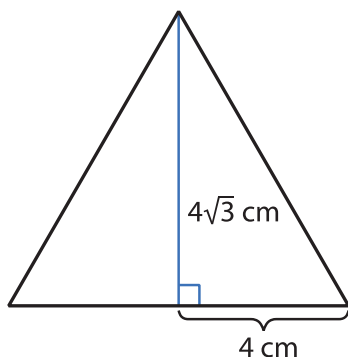
a)



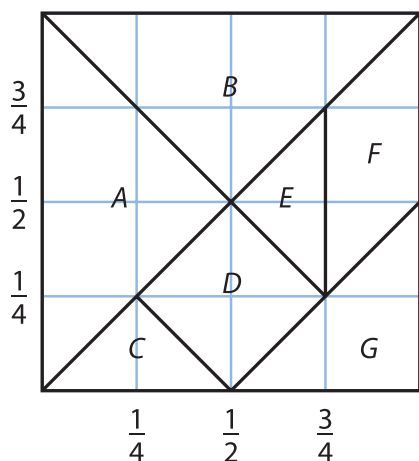
b)



29. Laske kuvan tasasivuisen kolmion pinta-ala ja piiri kahden numeron tarkkuudella.



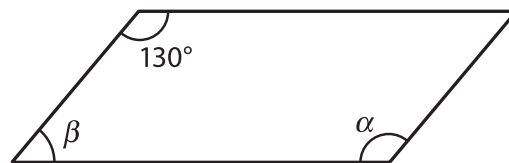
30. Kiinalaisen Tangram-pelin pelilaatat saadaan jakamalla neliö osiin oheisen kuvan mukaisesti. Ilmoita osien pinta-alat, kun koko neliön sivun pituus on 1. [yo lyhyt s2011]



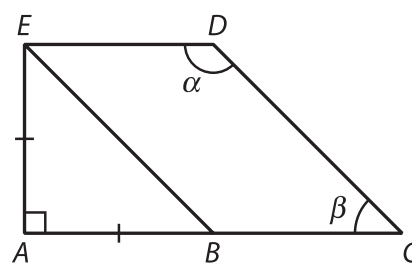
31. Puolisuunnikkaan muotoisen pellon pinta-ala on 150 a. Yhdensuuntaisten sivujen välinen etäisyys on 80 m. Määritä yhdensuuntaisten sivujen pituudet, kun niiden pituuksien ero on 5 m.

32. Määritä kulmat α ja β .

- a) Kuvio on suunnikas.

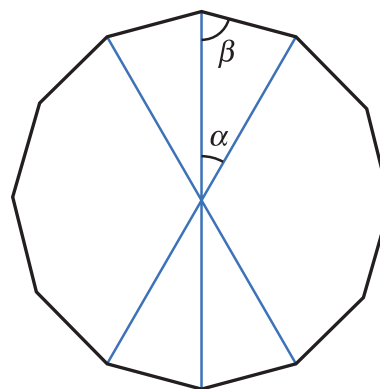


- b) Kuvio ACDE on puolisuunnikas ja kuvio BCDE suunnikas.



33. Laske säännöllisen kahdeksankulmion kulman suuruus.

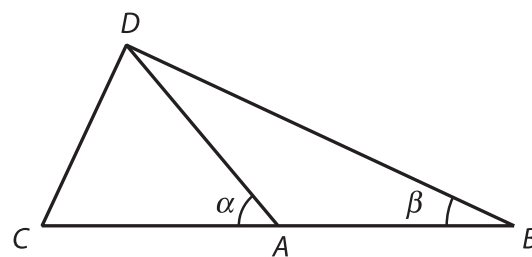
34. Määritä kulmat α ja β , kun monikulmio on säännöllinen 12-kulmio.



35. Janat AB, AC ja AD ovat yhtä pitkät.

- a) Osoita, että $\alpha = 2\beta$.

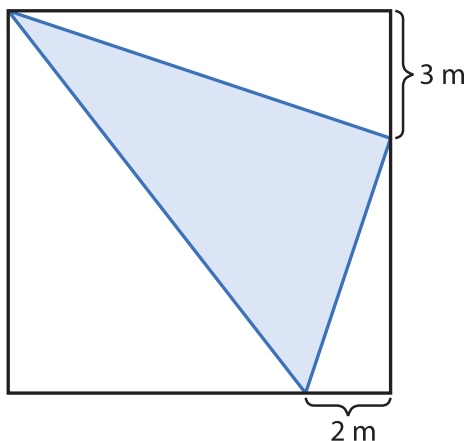
- b) Osoita, että kulma CDB on suora.



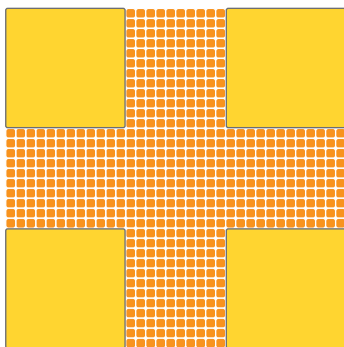
36. a) Tasakylkisen kolmion huippukulma on 30° suurempi kuin kantakulma. Laske kolmion kulmien suuruudet.

- b) Kolmion kulmien suhde on $1 : 2 : 3$. Laske kolmion kulmien suuruudet.

37. Neliön sivun pituus on 9 m. Laske värityn kolmion pinta-ala.

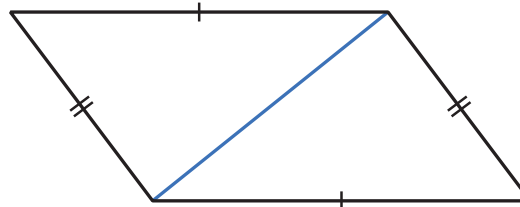


38. Neljä neliön muotoista keltaista laattaa, joiden sivun pituus on 15,0 cm, asetetaan neliönmuotoiseksi ruudukoksi niin, että laattojen väliin jää yhtä leveät raidat. Raidat muodostavat ristin muotoisen kuvion, joka päällystetään oransseilla pienillä laatoilla. Mikä on raidan leveys silloin, kun ristin pinta-ala on sama kuin neljän keltaisen laatan yhteen laskettu pinta-ala? [yo lyhyt s1999 mukailtuna]



39. Suunnikkaan kanta on 7 cm ja korkeus 4 cm. Suunnikkaan kantaa ja korkeutta muutetaan niin, että sen pinta-ala pysyy samana. Kuinka monta prosenttia kannan pituus muuttuu, kun korkeus
a) kasvaa 50% b) pienenee 50%?

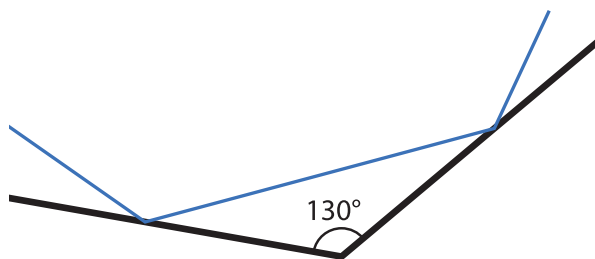
40. a) Todista suunnikkaan pinta-alan kaava käyttämällä apuna oheista kuviota.



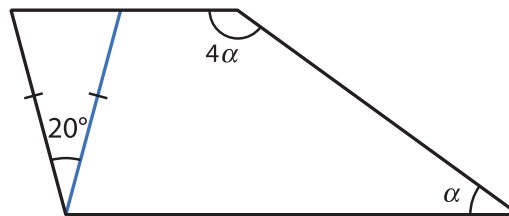
- b) Todista puolisuunnikkaan pinta-alan kaava.

41. Osoita, että neljäkkään lävistäjät ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

42. Valonsäde heijastuu peilistä samassa kulmassa kuin missä se tulee peiliin. Huoneessa on kaksi pystysuoraa peiliä, joiden välinen kulma on 130° . Vaakasuora valonsäde heijastuu peräkkäin molemmista peileistä. Mikä on tulevan ja lähtevän säteen välinen kulma? [yo pitkä k1993 mukailtuna]

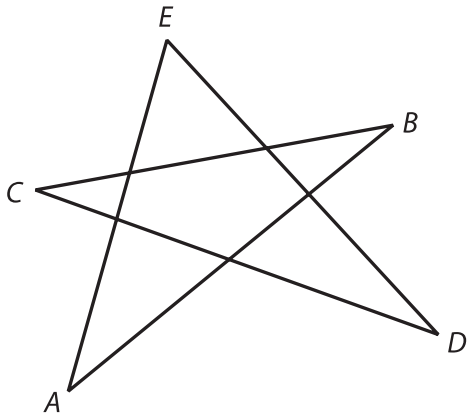


43. Määritä puolisuunnikkaan kulma α .

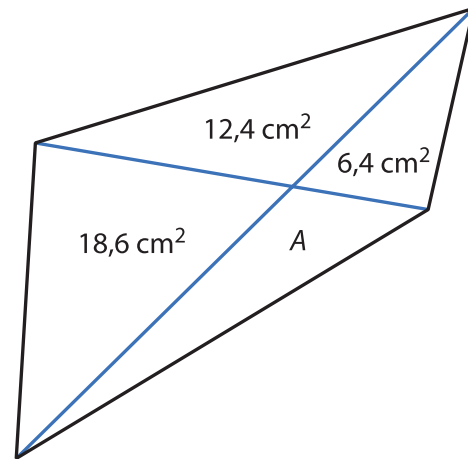


44. Tutki piirtämällä kuinka monta lävistäjää on **a)** nelikulmiossa **b)** viisikulmiossa **c)** kuusikulmiossa. Päätele, kuinka monta lävistäjää on n -kulmiossa.

45. Osoita, että kulmien A , B , C , D ja E summa on oikokulma.



46. Nelikulmion muotoinen alue jaetaan neljään osaan piirtämällä lävistäjät. Kuvioon on merkitty kolmen alueen pinta-alat. Laske neljännen alueen pinta-ala A .



2

Yhdenmuotoisuus

Maapallo on niin suuri kohde, että siitä on hyödyllistä tehdä yhdenmuotoinen pienempi malli eli karttapallo. Mikropiiri taas on niin pieni, että siitä on hyödyllistä tehdä yhdenmuotoinen suurempi malli eli työpiirustus. Yhdenmuotoisia malleja tehdään myös kohteista, jotka eivät välttämättä ole hyvin suuria tai pieniä. Esimerkiksi ompelukaava on vaatteiden malli.

Tässä luvussa tutkitaan yhdenmuotoisten kuvioiden ja kappaleiden pituuksien, pinta-alojen ja tilavuuksien suhteita. Näitä tarvitaan esimerkiksi käsiteltäessä kolmioita luvussa 3 ja avaruuskappaleita luvussa 5.

TUTKIMUS

Lentokoneen siipien kärkiväli on 40,0 metriä ja koneen pituus on 48,0 metriä. Jussi on hankkinut koneesta pienoismallin, jossa siipien kärkiväli on 50,0 cm.



- 1) Määritä pienoismallin pituus.
- 2) Pienoismallin mittakaava saadaan selville määrittämällä jonkin mallista löytyvän pituuden ja sitä vastaavan todellisen pituuden suhde. Mikä on tämän pienoismallin mittakaava?
- 3) Pienoismallin kyljessä on neliön muotoinen logo, jonka pinta-ala on $4,0 \text{ cm}^2$. Mikä on vastaavan logon pinta-ala oikeassa koneessa? Mieti, miten saisit vastauksen selville mittakaavan avulla.

2.1 Mittakaava

Yhdenmuotoisuus

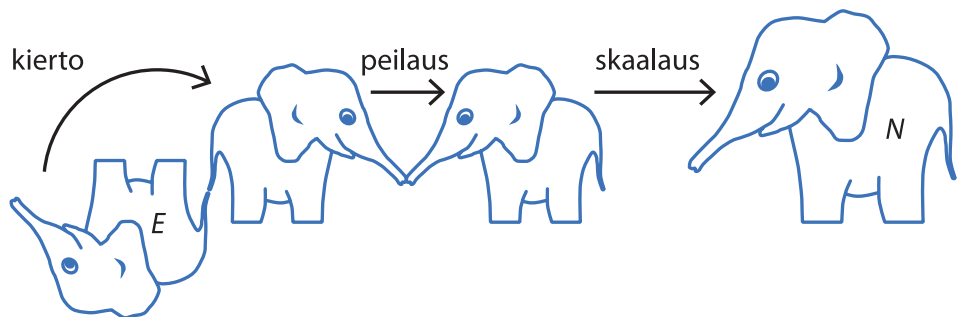
Kaksi kuviota tai kappaletta ovat keskenään *yhdenmuotoiset*, jos niillä on täsmälleen sama muoto. Yhdenmuotoisten objektien ei tarvitse olla saman kokoisia, mutta niiden kokoa saa muuttaa ainoastaan skaalaamalla, eli pienentämällä tai suurentamalla jokaista pituusmittaa samassa suhteessa.

Yhdenmuotoisuus

Määritelmä

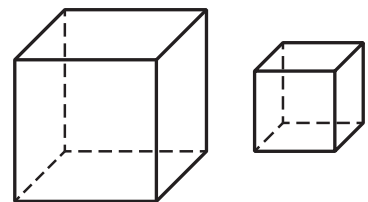
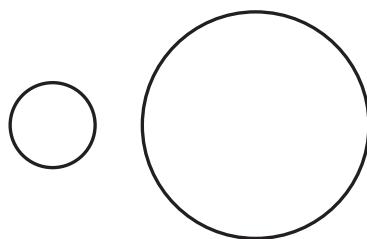
Kuviot tai kappaleet, jotka saadaan toisistaan siirtämällä, kiertämällä, peilaamalla tai skaalaamalla, ovat yhdenmuotoiset.

Siirto, kierto, peilaus ja skaalaus ovat yhdenmuotoisuuskuvaus-
kuvauksia.



Kaikki kuvassa olevat elefantit ovat keskenään yhdenmuotoisia. Elefanttien E ja N yhdenmuotoisuutta merkitään $E \sim N$.

Yhdenmuotoisuuden toteaminen ei aina ole helppoa. Tiedetään kuitenkin, että kaikki ympyrät, kaikki pallot, kaikki neliöt ja kaikki kuutiot ovat keskenään yhdenmuotoisia.





Kaksi suuretta x ja y , jotka muuttuvat samassa suhteessa, ovat suoraan verrannolliset. Suoraan verrannollisten suureiden suhde $\frac{y}{x}$ pysyy muuttumattomana.

Ristiin kertominen on tapa poistaa nimittäjät verrantoyhtälössä. Yhtälön molemmat puolet voitaisiin myös kertoa nimittäjien tulolla:

$$\begin{aligned} \frac{15}{x} &= \frac{3,75}{12} \quad | \cdot (x \cdot 12) \\ \frac{15 \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{12}}{\cancel{x} \cdot \cancel{12}} &= \frac{3,75 \cdot x \cdot \cancel{12}}{\cancel{12}} \\ 15 \cdot 12 &= 3,75 \cdot x \end{aligned}$$

Laskut on helpompi merkitä ilman yksiköitä. Yksiköihin tulee kuitenkin kiinnittää huomiota. Vastauksesta tulee järkevä vain, jos samasta kuviosta saadut mitat ovat samoissa yksiköissä.

Tieosuuden pituus kartalla on 15,0 cm ja todellinen pituus 3,75 km.

- a) Kuinka pitkä on kartalla tie, jonka todellinen pituus on 12,0 km?
b) Lammen halkaisija kartalla on 1,0 cm. Kuinka pitkä lammen halkaisija on luonnossa?

RATKAISU

a)

Pituus kartalla (cm)	Pituus luonnossa (km)
15	3,75
x	12,0

Merkitään tien pituutta kartalla kirjaimella x ja kootaan annetut tiedot taulukkoon.

Kartta on yhdenmuotoinen kuva maastosta, joten kartalta mitatut pituudet ovat suoraan verrannollisia todellisiin pituuksiin maastossa. Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan x .

$$\frac{15,0 \text{ cm}}{x} = \frac{3,75 \text{ km}}{12,0 \text{ km}}$$

Kerrotaan ristiin.

$$3,75 \text{ km} \cdot x = 15,0 \text{ km} \cdot 12,0 \text{ cm} \quad | : 3,75 \text{ km}$$

$$x = \frac{15,0 \cancel{\text{ km}} \cdot 12,0 \text{ cm}}{3,75 \cancel{\text{ km}}}$$

Kilometrit supistuvat ja yksiköksi tulee senttimetri.

$$x = 48 \text{ cm}$$

Tien pituus kartalla on 48 cm.

b)

Pituus kartalla (cm)	Pituus luonnossa (km)
15,0	3,75
1,0	y

Merkitään lammen halkaisijaa luonnossa kirjaimella y ja kootaan tiedot taulukkoon.

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan y .

$$\frac{15}{1} = \frac{3,75}{y}$$

Kerrotaan ristiin.

$$15y = 3,75 \cdot 1 \quad | : 15$$

$$y = 0,25$$

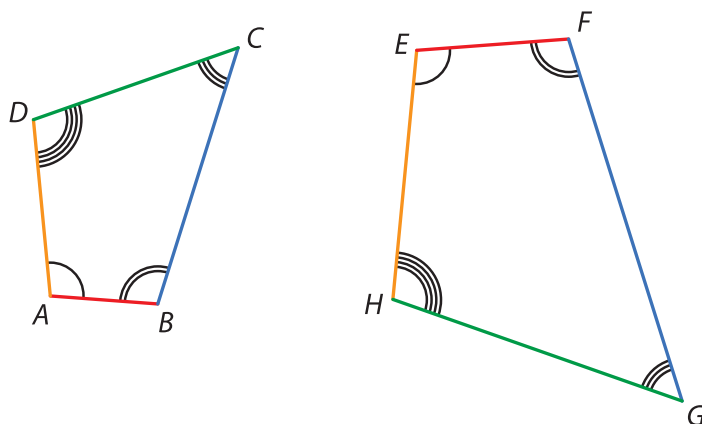
Lammen halkaisija on 0,25 km = 250 m.

VASTAUS

- a) 48 cm b) 250 m

Yhdenmuotoisuussuhde

Yhdenmuotoisten kuvioiden osia, jotka muuttuvat toisikseen yhdenmuotoisuuskuvauksissa, sanotaan *vastinosiksi*.



Yllä olevassa kuvassa on kaksi yhdenmuotoista nelikulmiota $ABCD$ ja $EFGH$. Niistä voidaan löytää muun muassa seuraavia vastinosia.

Vastinpisteet	Vastinjanat	Vastinkulmat
A ja E	AB ja EF	$\sphericalangle A$ ja $\sphericalangle E$
B ja F	BC ja FG	$\sphericalangle B$ ja $\sphericalangle F$
C ja G	CD ja GH	$\sphericalangle C$ ja $\sphericalangle G$
D ja H	DA ja HE	$\sphericalangle D$ ja $\sphericalangle H$

Käytännössä vastinosat löydetään useimmiten etsimällä kuvioista yhtä suuriksi tiedettyjä kulmia ja havaitsemalla tämän jälkeen vastinpisteet ja vastinsivut. Monikulmioiden tapauksessa puhutaan vastinjanojen sijaan usein *vastinsivuista*. Näiden pituudet puolestaan ovat *vastinpituuksia*.

Yhdenmuotoisissa kuvioissa

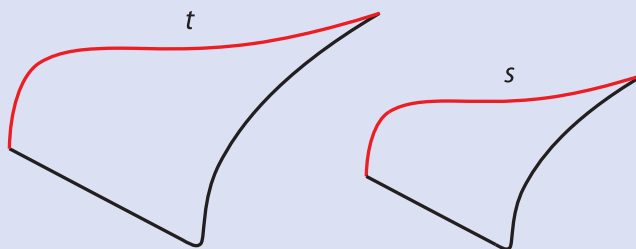
- vastinosien pituuksien suhteet ovat yhtä suuret, esimerkiksi

$$\frac{|AB|}{|EF|} = \frac{|BC|}{|FG|}$$

- vastinkulmat ovat yhtä suuret, esimerkiksi $\sphericalangle A = \sphericalangle E$.

Yhdenmuotoisten objektien mittakaava k on vastinosien pituussuhde.

$$k = s : t = \frac{s}{t}$$



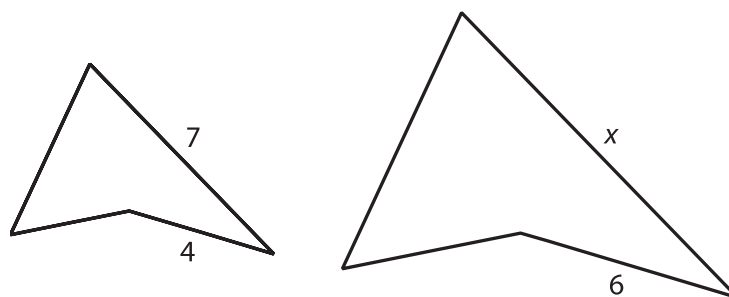
Mittakaava voidaan myös ilmoittaa järjestyksessä $t : s$, ellei järjestystä tarkemmin määrätä.

Mikäli tilanteessa voidaan erottaa objekti ja sitä kuvaava malli, ilmoitetaan mallin mittakaava suhteena $\frac{\text{mallin mitta}}{\text{todellinen mitta}}$.

Jos esimerkiksi lentokoneen pienoismallin mittakaava on $1 : 80$, niin pienoismallin jokainen pituus on $\frac{1}{80}$ alkuperäisestä ja vastaavasti lentokoneessa jokainen pituus on 80-kertainen verrattuna pienoismalliin.

Jos mallin mittakaavan arvo on pienempi kuin 1, on kyseinen malli pienennös. Vastaavasti malli on suurennos, jos sen mittakaavan arvo on suurempi kuin 1.

Yhdenmuotoisista kuvioista voidaan muodostaa pituuksien verrantoyhtälö kahdella tavalla. Tarkastellaan alla olevia yhdenmuotoisia nelikulmioita.



1. Jokaisen pituuden ja sen vastinpituuden suhde on sama.

$$\frac{x}{7} = \frac{6}{4}$$

2. Saman kuvion kahden pituuden suhde on yhtä suuri kuin toisessa kuviossa olevien vastinpituuksien suhde.

$$\frac{x}{6} = \frac{7}{4}$$

Muodostuneet verrantoyhtälöt ovat yhtäpitävät, koska molemmat sievenevät ristiinkertomalla muotoon $4x = 6 \cdot 7$.

ESIMERKKI 2

Ameeban läpimitta on $125\ \mu\text{m}$. Siitä tehtiin luonnontieteelliseen museoon 3D-tulostimella suurennos, jonka läpimitta on $25\ \text{cm}$.

- Mikä on suurennoksen mittakaava?
- Ameeballa on uloke, jonka pituus suurennoksessa on $7,0\ \text{cm}$. Mikä on tämän ulokkeen pituus luonnossa?

RATKAISU

$$1\ \text{cm} = 10\ \text{mm} = 10\,000\ \mu\text{m}$$

Jos mahdollista, mittakaava sievennetään kahden luonnollisen luvun suhteeksi.

- Mittakaavaa laskettaessa vastinpituuksien on oltava samoissa yksiköissä. Muutetaan suurennoksen läpimitta mikrometreiksi: $25\ \text{cm} = 250\,000\ \mu\text{m}$.

Suurennoksen mittakaava on

$$k = \frac{250\,000\ \cancel{\mu\text{m}}}{125\ \cancel{\mu\text{m}}}^{(125)} = \frac{2000}{1} = 2000 : 1.$$

- Päätellään ulokkeen pituus mittakaavan avulla. Suurennoksen mitat ovat 2000-kertaisia todellisiin verrattuna, joten ameeban mitat ovat $\frac{1}{2000}$ suurennoksen mitoista.

Lasketaan ulokkeen todellinen pituus.

$$\frac{1}{2000} \cdot 7,0\ \text{cm} = 0,0035\ \text{cm} = 35\ \mu\text{m}$$

VASTAUS

- $2000 : 1$
- $35\ \mu\text{m}$



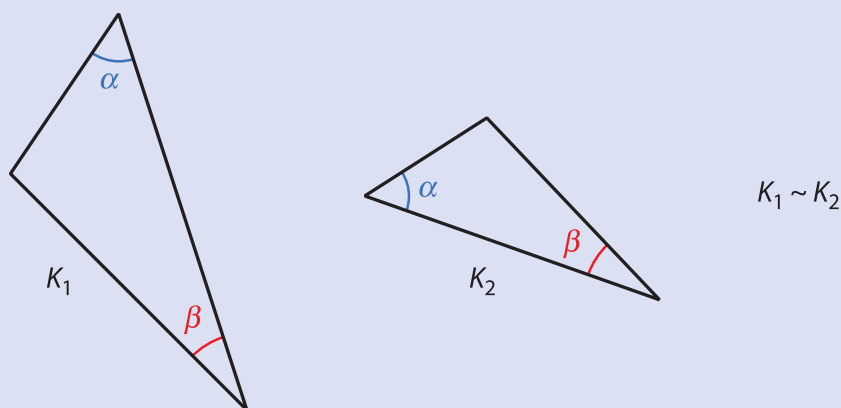
Kolmioiden yhdenmuotoisuus

Monet yhdenmuotoisuusongelmat ratkaistaan kolmioiden avulla. Jos kahden kolmion kulmat ovat pareittain yhtä suuret, kolmiot ovat yhdenmuotoiset. Koska kolmion kulmien summa on aina 180° , jo kahden kulmaparin yhtäsuuruus takaa myös kolmansien kulmaparien yhtäsuuruuden. Tästä seuraa tärkein kolmioiden yhdenmuotoisuuslause, kulma-kulma-lause tai lyhyemmin kk-lause.

Kolmioiden yhdenmuotoisuuslause

Lause

Mikäli kahdella kolmiolla on kaksi yhtä suurta kulmaparia, ovat kolmiot keskenään yhdenmuotoiset.

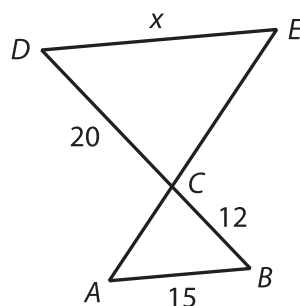


ESIMERKKI 3

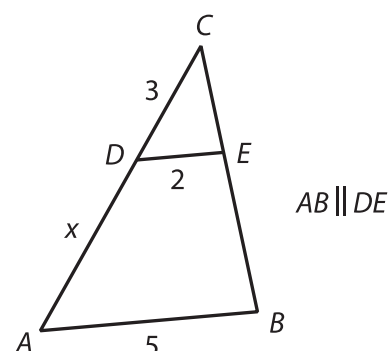


Kuvioiden janat AB ja DE ovat yhdensuuntaiset. Laske pituus x .

a)

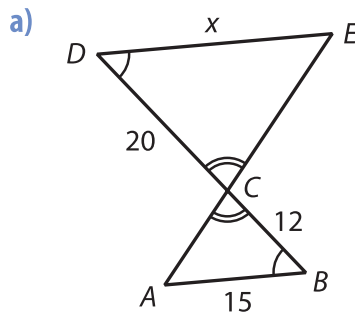


b)



RATKAISU

Kun jonkin ongelman ratkaisu perustuu kolmioiden yhdenmuotoisuuteen, on yhdenmuotoisuus perusteltava esimerkiksi kk-lauseen avulla.



Kolmiot ABC ja CED ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen perusteella:

- koska janat DE ja AB ovat yhdensuuntaiset, samankohtaiset kulmat D ja B ovat yhtä suuret
- kulmat ECD ja ACB ovat ristikulmina yhtä suuret.

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan x .

$$\frac{|DE|}{|BA|} = \frac{|DC|}{|BC|}$$

Sivun DE vastinsivu on BA
ja sivun DC vastinsivu on BC .

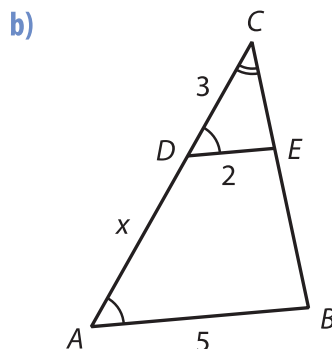
$$\frac{x}{15} = \frac{20}{12}$$

$$12x = 300 \quad | : 3$$

$$4x = 100 \quad | : 4$$

$$x = 25$$

Kerrotaan ristiin.



Kolmiot CDE ja CAB ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen perusteella:

- koska $DE \parallel AB$, samankohtaiset kulmat EDC ja BAC ovat yhtä suuret
- kulma C on yhteinen kulma.

Muodostetaan verranto ja ratkaistaan x .

$$\frac{|CD|}{|CA|} = \frac{|DE|}{|AB|}$$

Sivun CD vastinsivu on CA ja
sivun DE vastinsivu on AB .

$$\frac{3}{x+3} = \frac{2}{5}$$

$$2(x+3) = 15$$

$$2x+6 = 15$$

$$2x = 9 \quad | : 2$$

$$x = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$$

Kerrotaan ristiin.

VASTAUS

a) $x = 25$ b) $x = 4\frac{1}{2}$

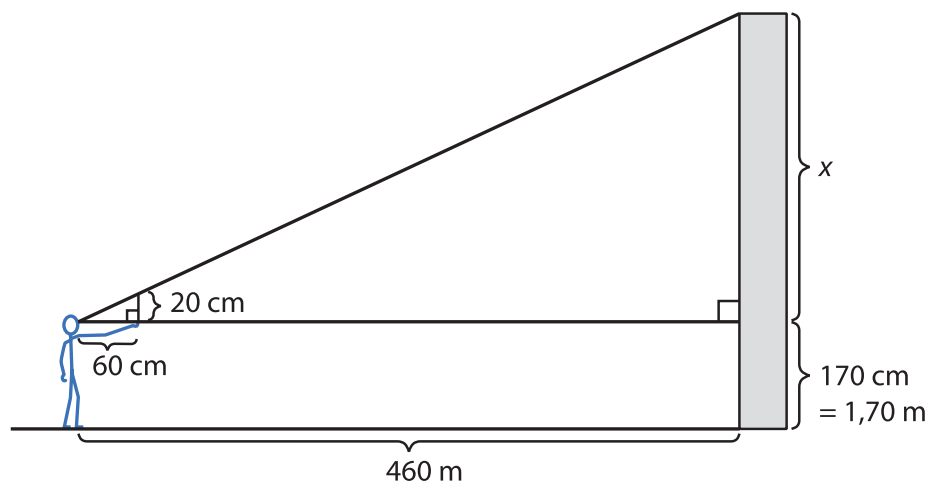


ESIMERKKI 4

Mauri mittasi pilvenpiirtäjän korkeuden 20 senttimetrin pituisella viivoittimella seuraavasti: hän piti viivoitinta suoraksi ojennetussa kädessään 60 cm päässä kasvoistaan pystysuorassa niin, että viivoittimen alareuna oli hänen silmiensä tasossa 170 cm korkeudella ja viivoittimen yläreuna samassa linjassa pilvenpiirtäjän huipun kanssa. Kartan perusteella Mauri oli 460 metrin päässä pilvenpiirtäjästä. Arvioi Maurin mittaustulosten perusteella pilvenpiirtäjän korkeus 10 metrin tarkkuudella.

RATKAISU

Piirretään mallikuva. Merkitään silmien tason yläpuolelle jäävää osaa pilvenpiirtäjän korkeudesta kirjaimella x .



Kuvaan muodostuvat sisäkkäiset suorakulmaiset kolmiot ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen perusteella:

- kolmioilla on yhteinen terävä kulma
- molemmissa kolmioissa on suora kulma.

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan x .

$$\frac{x}{20} = \frac{460}{60} \quad | \cdot 20 \quad \text{Yhtälön voi ratkaista laskimella.}$$

$$x = \frac{460}{60} \cdot 20$$

$$x = 153,333\dots(\text{m})$$

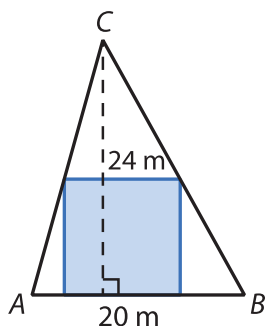
Pilvenpiirtäjän korkeudeksi saadaan

$$x + 1,70 \text{ m} = 153,333\dots \text{ m} + 1,70 \text{ m} = 155,033\dots \text{ m} \approx 160 \text{ m}.$$

VASTAUS

160 m

ESIMERKKI 5

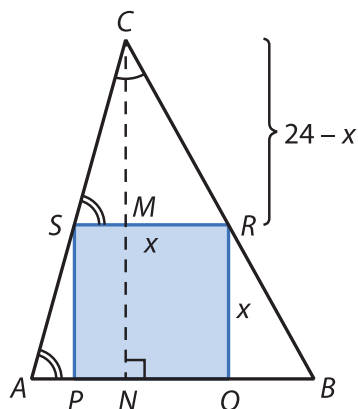


Neliön pohjasivu on kolmion ABC kannalla ja kaksi muuta kärkeä sen kyljillä. Kolmion korkeus on $24,0\text{ m}$ ja kannan pituus $20,0\text{ m}$.

- Laske neliön pinta-ala.
- Kuinka monta prosenttia neliön pinta-ala on kolmion ABC pinta-alasta?

RATKAISU

- Piirretään mallikuva ja käytetään kuvan merkintöjä.



Kolmiot CSR ja CAB ovat yhdenmuotoiset kk -lauseen perusteella:

- koska $AB \parallel SR$, samankohtaiset kulmat RSC ja BAC ovat yhtä suuret
- kulma C on yhteinen.

Kun neliön sivun pituutta merkitään kirjaimella x , on kolmion CSR korkeus $|CM| = 24 - x$. Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan x .

$$\frac{|SR|}{|AB|} = \frac{|CM|}{|CN|}$$

$$\frac{x}{20} = \frac{24 - x}{24}$$

$$x = \frac{120}{11} \text{ (m)}$$

Sivun SR vastinjana on AB ja sivun CM vastinjana on CN .

Ratkaistaan yhtälö laskimella.

Lasketaan neliön pinta-ala.

$$A_n = x^2 = \left(\frac{120}{11} \text{ m}\right)^2 = \frac{14\,400}{121} \text{ m}^2 = 119,008\dots \text{m}^2 \approx 119 \text{ m}^2$$

- Lasketaan kolmion ABC pinta-ala.

$$A_k = \frac{1}{2} \cdot 20 \text{ m} \cdot 24 \text{ m} = 240 \text{ m}^2 \quad \text{Kolmion pinta-ala } A = \frac{1}{2}ah.$$

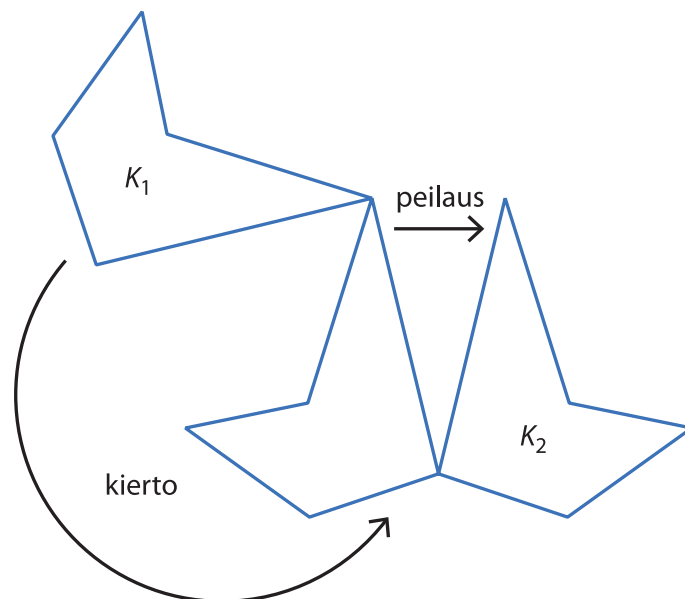
Lasketaan, kuinka monta prosenttia neliön pinta-ala on kolmion pinta-alasta.

$$\frac{A_n}{A_k} = \frac{119,008\dots \text{m}^2}{240 \text{ m}^2} = 0,4958\dots \approx 49,6 \%$$

VASTAUS

- 119 m^2
- $49,6 \%$

Kuviot, jotka ovat täsmälleen saman muotoiset ja saman kokoiset, ovat keskenään yhtenevät. Mikäli kuviot ovat yhtenevät, ovat ne myös yhdenmuotoiset mittakaavassa $1 : 1$. Tällöin vastinkulmat ovat yhtä suuret ja vastinjanat yhtä pitkät. Täsmällisesti yhtenevyys määritellään yhtenevyyskuvausten avulla. Kuviot, jotka saadaan toisistaan siirtämällä, kiertämällä tai peilaamalla, ovat yhtenevät.



Kaikki kuvassa olevat viisikulmiot ovat yhteneviä. Kuvioiden K_1 ja K_2 yhtenevyyttä merkitään $K_1 \cong K_2$.



Harjoitustehtäviä

Sarja I

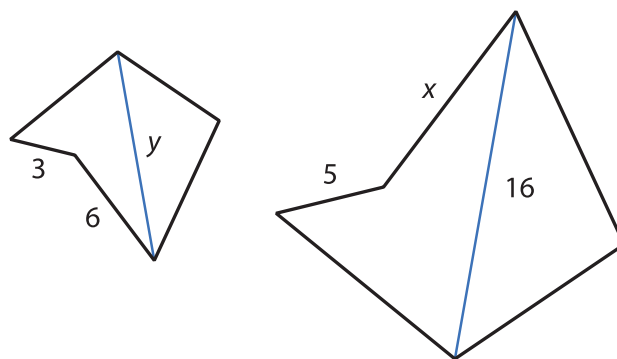
47. Retkeilyreitin pituus on 12,5 km. Määritä
E1 reitin pituus kartalla, jolla 600 metrin pituinen pelto on 2,0 cm pitkä.
48. Uuden kirjaston julkisivun pituudeksi on suunniteltu 85 m ja korkeudeksi 15 m. Pienoismallissa julkisivun pituus on 125 cm.
E2 a) Määritä pienoismallin mittakaava.
 b) Mikä on pienoismallin korkeus?
49. Määritä arvot x , y ja z .

Kartan mittakaava	Todellinen pituus	Pituus kartalla
1 : 20 000	12,5 km	x
y	190 km	76 cm
1 : 10 000	z	3,5 cm

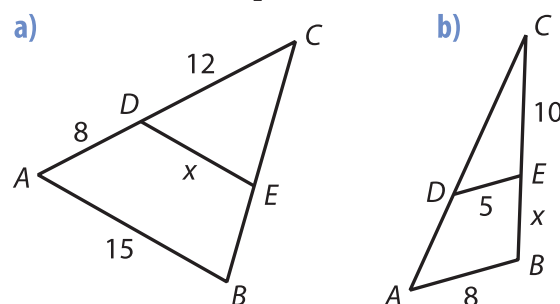
50. Lammen ympärysmitta on 3,9 cm kartalla, jonka mittakaava on 1 : 15 000. Suunnistaja kiersi lammen rantaviivaa pitkin 5,0 minuutissa. Määritä lammen todellinen ympärysmitta ja suunnistajan keskivauhti.
51. Retkeilykartan mittakaava on 1 : 50 000. Valitse oikeat vaihtoehdot.
 a) Kartalta mitattu 1,5 cm pitkä matka on luonnossa **1)** 75 m **2)** 750 m **3)** 7,5 km.
 b) Peltö on neliö, jonka sivun pituus on 250 m. Vastaavan neliön sivu kartalla on **1)** 5,0 cm **2)** 5,0 mm **3)** 5,0 dm.
 c) Karttaan on painettu nuppineula, jonka paksuus on 0,5 mm. Nuppineulan kohdalla maastossa on puu. Jos puun todellinen paksuus vastaisi kartalla olevaa nuppineulaa, puun paksuus olisi **1)** 25 cm **2)** 25 dm **3)** 25 m.
 d) Asfalttitiien leveys on 10 metriä. Tietä esittävä viiva olisi kartalla leveydeltään **1)** 0,5 mm **2)** 0,2 cm **3)** 0,2 mm.

52. Vanhan sotalaivan pienoismallin mittakaava on 3 : 200 ja pituus 48 cm. Määritä laivan todellinen pituus.

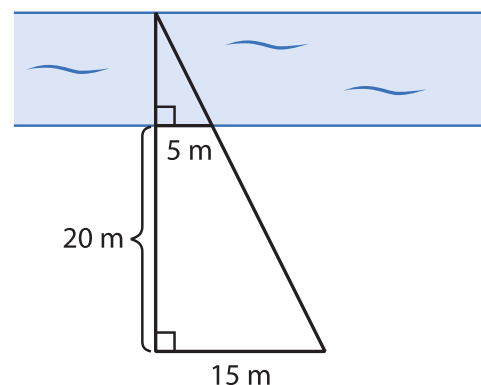
53. Kuvan viisikulmiot ovat yhdenmuotoisia. Määritä
 a) sivun pituus x
 b) lävistäjän pituus y
 c) mittakaava.



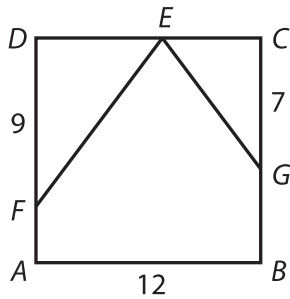
54. Kuvioden janat AB ja DE ovat yhdensuuntaiset. Laske pituus x .



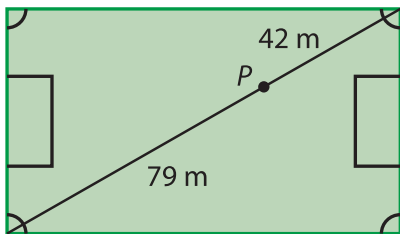
55. Joen leveyden määrittämistä varten tehtiin kuvion mukaiset mittaukset, joissa käytettiin kiintopisteenä vastarannalla olevaa kiveä. Laske joen leveys.



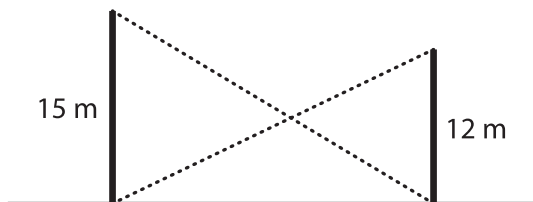
56. Neliön $ABCD$ sisään muodostuvat kulmat DEF ja GEC ovat yhtä suuret. Määritä janan EC pituus.



57. Jalkapallokentän pitkän sivun pituus on 105 m ja päädyn pituus 60 m. Laske pallon P etäisyys
a) alemmasta sivurajasta
b) oikeanpuoleisesta päädyistä.



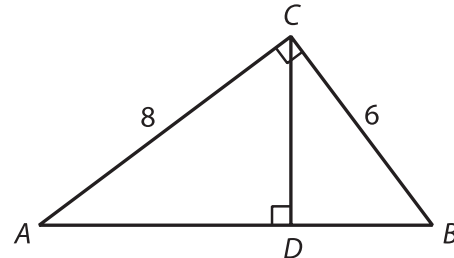
58. Kaksi pystysuoraa pylvästä, joiden etäisyys 25 m, on tuettu toisiinsa vaijereilla kuvion mukaisesti. Määritä vaijereiden leikkauspisteen etäisyys korkeammasta pylvästä.



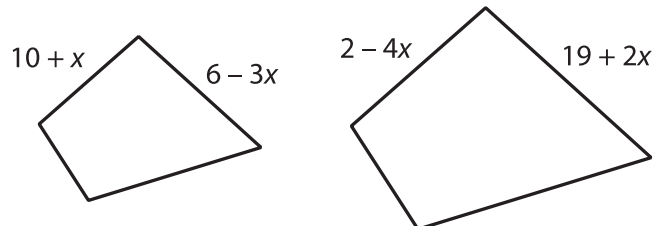
59. Turisti pitää kahden euron kolikkoa ojennetussa kädessään pystysuorassa asennossa 55 cm:n etäisyydellä silmistään. Kun hän katsoo yhdellä silmällä kohti pallomaista Globen-hallia, kolikko juuri ja juuri peittää hallin. Kolikon halkaisija on 26 mm ja Globen-hallin halkaisija on 110 m. Määritä turistin etäisyys Globen-hallista.

Sarja II

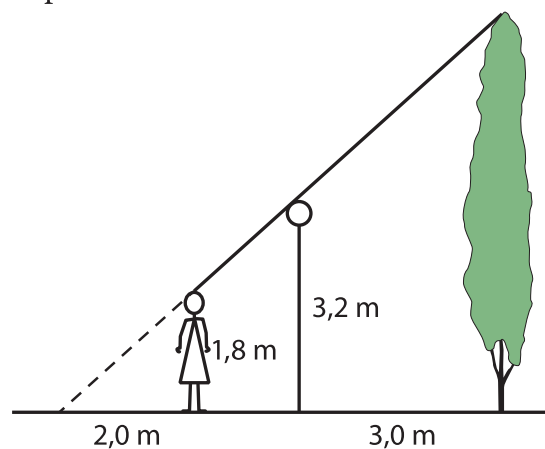
60. a) Perustele kuvan kolmioiden ABC , ADC ja CDB yhdenmuotoisuus.
b) Määritä korkeusjanan CD pituus, kun sivun AB pituus on 10.
c) Missä suhteessa piste D jakaa sivujan AB ?



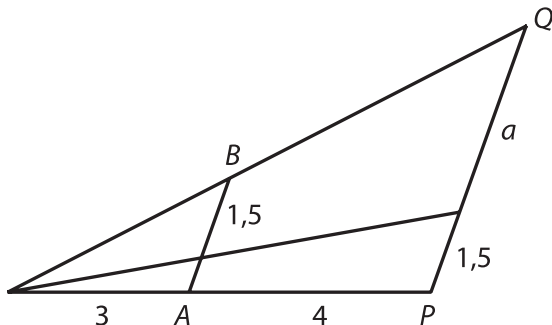
61. Kuvan pituusmitat suurennettiin ensin 1,5-kertaiseksi ja tämän suurennoksen pituusmitat kasvatettiin vielä $\frac{5}{3}$ -kertaiseksi. Mikä on lopullisen ja alkuperäisen kuvan välinen mittakaava?
62. Määritä yhdenmuotoisten nelikulmioiden mittakaava.



63. Määritä kuvan tilanteessa
a) tytön etäisyys valaisinpylvästä
b) puun korkeus.

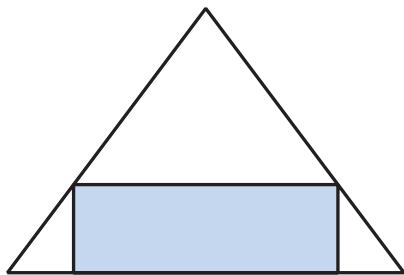


64. Määritä pituus a , kun janat AB ja PQ ovat yhdensuuntaiset.

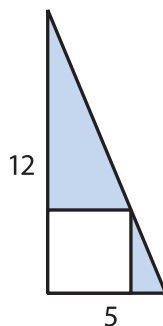


65. Tasakylkisen kolmion korkeus on 20 ja kannan pituus 10. Sen sisään on piirretty neliö, jonka yksi sivu on kolmion kannalla ja kaksi kärkeä kolmion kyljillä. Laske neliön pinta-ala.

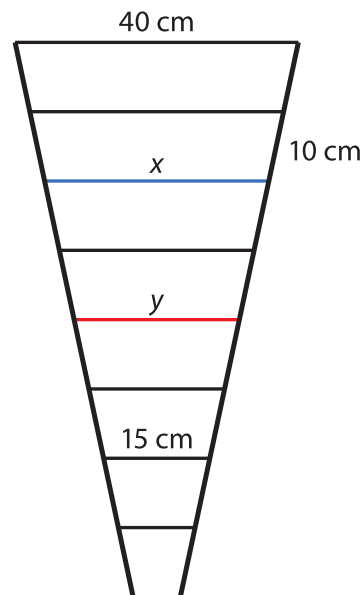
66. Tasakylkisen kolmion sisään on piirretty suorakulmio, jonka leveys on kolminkertainen korkeuteen verrattuna. Laske suorakulmion pinta-ala, kun kolmion kannan pituus on 9 ja pinta-ala on 27.



67. Suorakulmaisen kolmion sisään on piirretty neliö kuten kuvassa. Hypotenuusan pituus on 13. Laske tummennetun alueen pinta-ala yhden desimaalin tarkkuudella.



68. Vaakasuorat rimat jakavat kehikon sivupuut 10 cm mittaisiin osiin. Määritä pituudet x ja y .

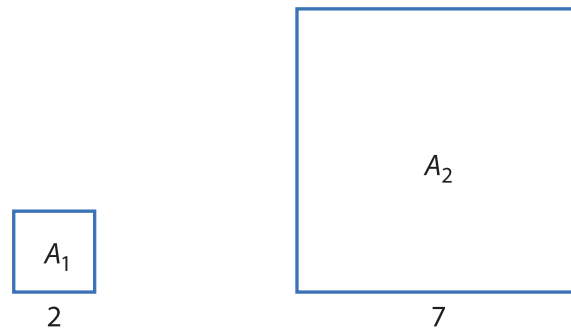


69. Kerrostalon parvekkeella seisovan Mikon silmät ovat 11 metrin korkeudella maan pinnasta ja kerrostalon ulkoseinän tasolla. Kerrostalon naapuritonttia rajaava 2,5 m korkea aita on 19 metrin päässä kerrostalon seinästä. Voiko Mikko nähdä aidan takana leikkivän 105 cm pitkän lapsen, kun lapsi on 3,0 metrin päässä aidasta omalla pihallaan?
70. Suorakulmaisen kolmion kateettien pituuksien suhde on $1 : 2$ ja hypotenuusan pituus on $\sqrt{5}$ -kertainen lyhyemmän kateetin pituuteen verrattuna. Missä suhteessa hypotenuusalle piirretty korkeusjana jakaa hypotenuusan?
71. Suorakulmion leveys on 36,0 cm ja korkeus 15,0 cm. Se jaetaan lyhyemmän sivun suuntaisella janalla kahteen osaan niin, että syntyvät suorakulmiot ovat yhdenmuotoisia keskenään. Kuinka pitkiin osiin alkuperäisen suorakulmion pitkä sivu jakautuu?

2.2 Pinta-alojen ja tilavuuksien suhde

Yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhde

Tarkastellaan kahta neliötä, joiden sivujen pituudet ovat 2 ja 7. Neliöt ovat yhdenmuotoiset ja niiden mittakaava $k = 7 : 2$.

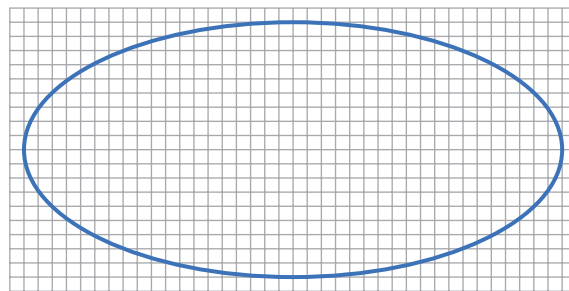


Lasketaan neliöiden pinta-alojen suhde.

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{7^2}{2^2} = \left(\frac{7}{2}\right)^2 = k^2$$

Pinta-alojen suhde on siis mittakaavan neliö.

Tämä havainto on voimassa kaikille kuvioille. Tasokuvion pinta-alaa voidaan arvioida neliöiden avulla. Kun neliöiden kokoa pienennetään, saadaan pinta-alalle yhä tarkempia likiarvoja. Tämän vuoksi neliöiden pinta-alojen suhteelle tehty havainto pätee kaikille yhdenmuotoisille kuvioille.

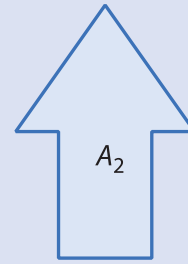
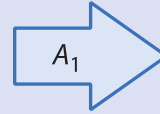


Yhdenmuotoisten kuvioden pinta-ala

Lause

Yhdenmuotoisten kuvioden pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö.

$$\frac{A_2}{A_1} = k^2$$



ESIMERKKI 1

Suomen pinta-ala on $338\,400\text{ km}^2$. Laske Suomen pinta-ala kartalla, jonka mittakaava on $1 : 25\,000\,000$.

RATKAISU

Merkitään Suomen pinta-alaa kartalla kirjaimella A . Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan A .

$$\frac{A}{338\,000} = \left(\frac{1}{25\,000\,000} \right)^2 \quad | \cdot 338\,000$$

Pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö.

$$A = \left(\frac{1}{25\,000\,000} \right)^2 \cdot 338\,000$$

$$A = 5,408 \cdot 10^{-10} \text{ (km}^2\text{)}$$

Suomen pinta-ala kartalla on $5,408 \cdot 10^{-10} \text{ km}^2 = 5,408 \text{ cm}^2 \approx 5,4 \text{ cm}^2$.

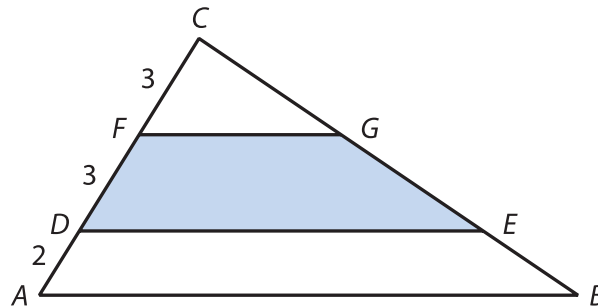
VASTAUS

$$5,4 \text{ cm}^2$$

$$\begin{aligned} & 5,408 \cdot 10^{-10} \text{ km}^2 \\ &= 0,0000000005408 \text{ km}^2 \\ &\quad \text{ha} \quad \text{a} \quad \text{m}^2 \quad \text{dm}^2 \quad \text{cm}^2 \\ &= 5,408 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

ESIMERKKI 2

Kolmio on jaettu kahdella kannan suuntaisella janalla kolmeen osaan kuvan mukaisesti. Laske keskelle jäävän tummennetun alueen pinta-ala, kun koko kolmion pinta-ala on 128.



RATKAISU

Kolmiot CFG , CDE ja CAB ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen perusteella:

- Koska kolmioiden kannat AB , DE ja FG ovat yhdensuuntaiset, niin samankohlaiset kulmat BAC , EDC ja GFC ovat yhtä suuret.
- Kulma C on yhteinen.

Kolmion CAB pinta-ala on 128. Olkoon kolmion CDE pinta-ala A_1 ja kolmion CFG pinta-ala A_2 .

Kolmioiden CDE ja CAB mittakaava on

$$\frac{|CD|}{|CA|} = \frac{3+3}{3+3+2} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

Ratkaistaan pinta-ala A_1 .

$$\frac{A_1}{128} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \quad | \cdot 128$$

$$A_1 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot 128 = 72$$

Pinta-alojen suhde on mittakaava neliö.

Kolmioiden CFG ja CAB mittakaava on $\frac{|CF|}{|CA|} = \frac{3}{8}$.

Ratkaistaan pinta-ala A_2 .

$$\frac{A_2}{128} = \left(\frac{3}{8}\right)^2 \quad | \cdot 128$$

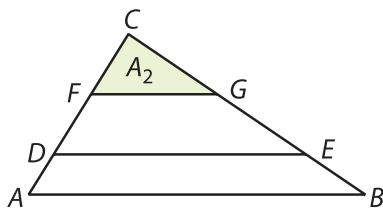
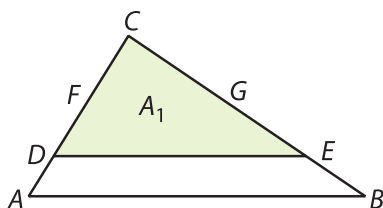
$$A_2 = \left(\frac{3}{8}\right)^2 \cdot 128 = 18$$

Yhtälön voi ratkaista myös laskimella.

Kysytty pinta-ala on $A_1 - A_2 = 72 - 18 = 54$.

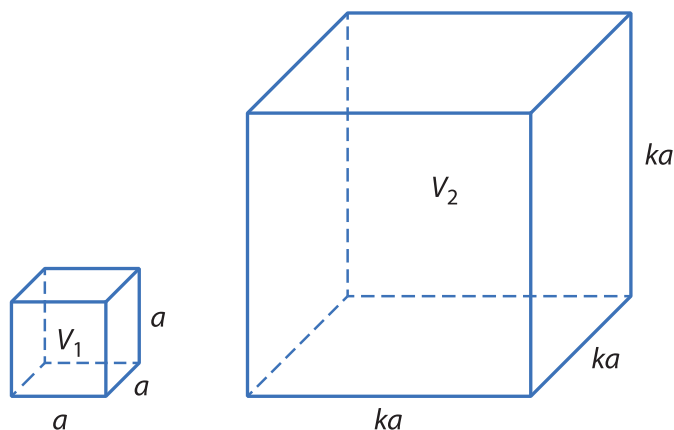
VASTAUS

Pinta-ala on 54.



Yhdenmuotoisten kappaleiden tilavuuksien suhde

Edellä todettiin, että kuvion pinta-alaa voidaan arvioida halutulla tarkkuudella pienten neliöiden avulla. Vastaavasti kappaleiden tilavuuksille saadaan yhä tarkempia likiarvoja pienten kuutioiden avulla.



Oikeanpuoleinen kuutio saadaan vasemmanpuoleisesta kertomalla kaikkien vastinjanojen pituudet vakiolla k . Tällöin mittakaava on k ja tilavuuksien suhteeksi saadaan

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{(ka)^3}{a^3} = \frac{k^3 \cancel{a^3}}{\cancel{a^3}} = k^3.$$

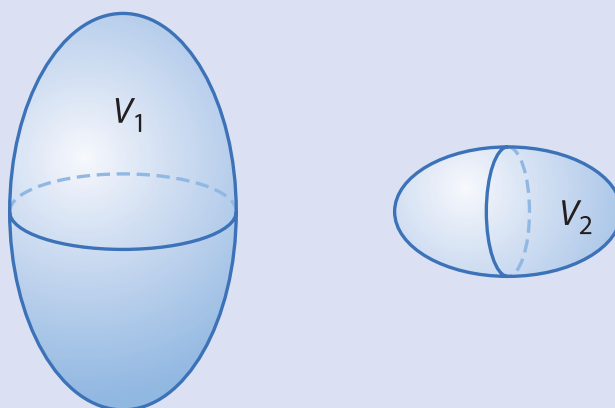
Tämän havainnon seurauksena yhdenmuotoisten kappaleiden tilavuuksille on voimassa seuraava lause.

Yhdenmuotoisten kappaleiden tilavuus

Lause

Yhdenmuotoisten kappaleiden tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio.

$$\frac{V_2}{V_1} = k^3$$



Urheiluautosta tehtiin tarkka pienoismalli mittakaavassa 2 : 7.

- a) Kuinka monta prosenttia pienoismallin bensatankin tilavuus on alkuperäisen tankin tilavuudesta?
- b) Kuinka monta prosenttia enemmän maalia kuluu urheiluauton maalaamiseen kuin pienoismallin maalaamiseen, kun maalikerrokset ovat saman paksuiset?

RATKAISU

- a) Merkitään auton ja pienoismallin tankkien tilavuuksia V_1 ja V_2 . Lasketaan tankkien tilavuuksien suhde prosentteina.

$$\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{2}{7}\right)^3 = 0,02332... \approx 2,3 \%$$

Tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio.

Pienoismallin tankin tilavuus on noin 2,3 % alkuperäisen tankin tilavuudesta.

- b) Tarvittavan maalin määrä on suoraan verrannollinen maalattavaan pinta-alaan, joten vastaus saadaan pinta-alojen suhteesta. Merkitään urheiluauton ja pienoismallin pinta-aloja A_1 ja A_2 .

Auton pinta-alaa A_1 verrataan pienoismallin pinta-alaan A_2 eli täytyy määrittää suhde $\frac{A_1}{A_2}$. Mittakaava 2 : 7 ilmoittaa pienoismallin mittojen suhteen auton mittoihin. Tällöin auton mittojen suhde pienoismallin mittoihin on 7 : 2.

Lasketaan pinta-alojen A_1 ja A_2 suhde.

$$\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{7}{2}\right)^2 = 12,25 = 1225 \%$$

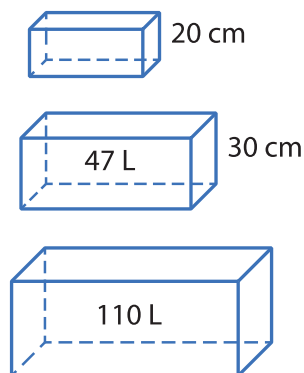
Pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö.

Urheiluauton pinta-ala on $1225 \% - 100 \% = 1125 \%$ suurempi kuin pienoismallin pinta-ala. Maalia tarvitaan siis 1125 % enemmän.

VASTAUS

- a) 2,3 % b) 1125 %





Litran tunnuksena käytetään yleensä pientä l-kirjainta, mutta selkeyden vuoksi voidaan yhtä hyvin käyttää myös isoa L-kirjainta.

Säilytyslaatikkosarjaan kuuluu kolme yhdenmuotoista kannetonta laatikkoa. Pienimmän laatikon korkeus on 20 cm. Keskimmäisen laatikon korkeus on 30 cm ja tilavuus 47 litraa. Suurimman laatikon tilavuus on 110 litraa. Laske

- pienimmän laatikon tilavuus
- suurimman laatikon korkeus.

RATKAISU

Merkitään laatikoiden korkeuksia ja tilavuuksia kirjaimilla h ja V niin, että alaindeksi 1 viittaa pienimpään, 2 keskimmäiseen ja 3 suurimpaan laatikkoon.

- Verrataan pienimmän laatikon mittoja keskimmäisen laatikon mittoihin. Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan pienimmän laatikon tilavuus V_1 .

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^3$$

Tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio.

$$\frac{V_1}{47} = \left(\frac{20}{30} \right)^3$$

Yhtälön voi ratkaista myös laskimella.

$$V_1 = \left(\frac{20}{30} \right)^3 \cdot 47 = 13,925... \approx 14 \text{ (L)}$$

Pienimmän laatikon tilavuus on noin 14 litraa.

- Verrataan suurimman ja keskimmäisen laatikon mittoja. Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan suurimman laatikon korkeus h_3 .

$$\frac{V_3}{V_2} = \left(\frac{h_3}{h_2} \right)^3$$

Tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio.

$$\frac{110}{47} = \left(\frac{h_3}{30} \right)^3$$

Yhtälön voi ratkaista myös laskimella.

$$\left(\frac{h_3}{30} \right)^3 = \frac{110}{47}$$

$$\frac{h_3}{30} = \sqrt[3]{\frac{110}{47}}$$

$$h_3 = \sqrt[3]{\frac{110}{47}} \cdot 30 = 39,830... \approx 40 \text{ (cm)}$$

Suurimman laatikon korkeus on noin 40 cm.

VASTAUS

- 14 litraa
- 40 cm

Veistoksesta tehdyn pienoismallin tilavuus on 3,5 litraa ja pinta-ala 1600 cm^2 . Mikä on veistoksen tilavuus, kun sen pinta-ala on 28 m^2 ?

RATKAISU

Muutetaan pinta-alat samaan yksikköön.

$$1600 \text{ cm}^2 = 16 \text{ dm}^2 = 0,16 \text{ m}^2$$

Määritetään ensin pinta-alojen avulla pienoismallin mittakaava. Merkitään pienoismallin pinta-alaa A_p ja veistoksen pinta-alaa A_v . Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan mittakaava k .

$$k^2 = \frac{A_p}{A_v}$$

Pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö.

$$k^2 = \frac{0,16}{28} = \frac{16}{2800} = \frac{1}{175}$$

$$k = \pm \sqrt{\frac{1}{175}} = \pm \frac{1}{\sqrt{175}}$$

Koska mittakaava on arvoltaan aina positiivinen, on $k = \frac{1}{\sqrt{175}}$.

Määritetään seuraavaksi veistoksen tilavuus. Merkitään pienoismallin ja veistoksen tilavuuksia V_p ja V_v . Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan veistoksen tilavuus V_v .

$$\frac{V_p}{V_v} = k^3$$

Tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio.

$$\frac{3,5}{V_v} = \left(\frac{1}{\sqrt{175}} \right)^3$$

Yhtälön voi ratkaista laskimella.

$$\frac{3,5}{V_v} = \frac{1}{(\sqrt{175})^3}$$

Kerrotaan ristiin.

$$V_v \cdot 1 = 3,5 \cdot (\sqrt{175})^3$$

$$V_v = 8102,61... \approx 8100 \text{ (L)}$$

Suuri tilavuus on luontevaa ilmoittaa kuutiometreinä, mutta myös litroina ilmoitettu vastaus on oikein.

Veistoksen tilavuus on noin $8100 \text{ L} = 8100 \text{ dm}^3 = 8,1 \text{ m}^3$.

VASTAUS

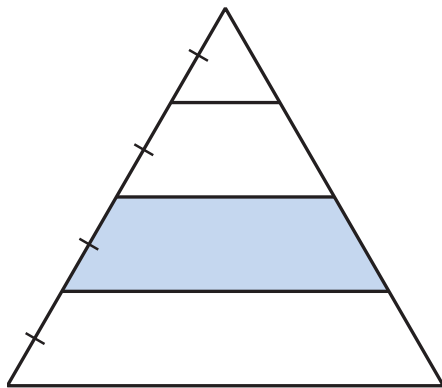
$$8,1 \text{ m}^3$$

Harjoitustehtäviä

Sarja

I

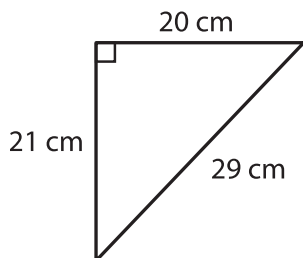
72. Lammen pinta-ala on 0,76 ha. Mikä on
E1 lammen pinta-ala kartalla, jonka mittakaava on 1 : 40 000?
73. Alkuvuodesta 2016 pohjoisen napajääalueen pinta-ala oli 14 000 000 km². Määritä tämän jääalueen pinta-ala karttapallolla, jonka säde on 25 cm. Maapallon säde on noin 6370 km.
74. Tasakylkisen kolmion kyljen pituus on
E2 24 cm ja pinta-ala 220 cm². Kolmio jaetaan kolmella kannan suuntaisella janalla neljään osaan niin, että janat jakavat kyljen neljään yhtä pitkään osaan. Määritä toiseksi alimmaksi syntyvän osan pinta-ala.



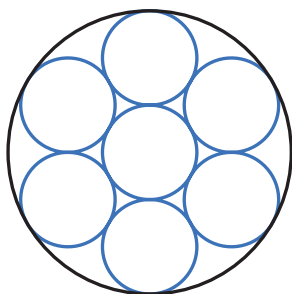
75. Kolmion kannan suuntainen suora jakaa
▶ kolmion kyljen kahteen osaan, joiden pituuksien suhde kolmion huipusta lukien on 2 : 1. Kuinka monta prosenttia jakosuoran yläpuolelle jäävän pienen kolmion pinta-ala on koko kolmion pinta-alasta?
76. Pallojen säteet ovat 15 cm ja 25 cm.
E3 Kuinka monta prosenttia suurempi on isomman pallon a) pinta-ala b) tilavuus pienempään palloon verrattuna?
77. Keräilijällä on kolme yhdenmuotoista toimintahahmofiguuria. Pienimmän korkeus on 7,5 cm, keskimmäisen tilavuus on 270 cm³ ja suurimman korkeus on 25 cm ja tilavuus 1250 cm³. Määritä
E4 a) pienimmän figuurin tilavuus
b) keskimmäisen figuurin korkeus.
78. Kaikki Suomen liput ovat keskenään yhdenmuotoisia. Kahden lipun pinta-alat ovat 2,0 m² ja 3,6 m². Pienemmän lipun pituus on 1,8 m. Määritä suuremman lipun pituus.
79. Yhdenmuotoisten arkkien A4 ja A5 alojen
▶ suhde on 100 : 50. Kirjoitusta sisältävä A4-kokoinen arkki pienennetään kokoon A5. Kuinka monta prosenttia tekstin korkeus tällöin pienenee? [yo pitkä k1992]
80. Opiskelijoiden tehtävänä oli tulostaa kolmiulotteinen pienoismalli rakenteilla olevasta urheilijamonumentista. Patsaan tilavuus on 1300 litraa ja pinta-ala 8,5 m². Määritä pienoismallin tilavuus, kun sen maalaukseen tarvittun maalin määrän perusteella pienoismallin pinta-alaksi arvioitiin 310 cm².
E5
81. Pohjapiirustuksen leveys pienenee 45 senttimetristä 30 senttimetriin. Kaikki piirustuksen pituudet muuttuvat samassa suhteessa. Kuinka monta prosenttia piirustuksessa kuvatun rakennuksen pinta-ala pienenee?

82. Kuinka monta prosenttia kappaleen mittoja on suurennettava, jotta sen a) pinta-ala b) tilavuus viisinkertaistuu?

83. Oheisen suorakulmaisen kolmion pinta-ala pienennetään suhteessa 2 : 3 niin, että uusi kolmio on alkuperäisen kanssa yhdenmuotoinen. Määritä uuden kolmion sivujen pituudet.



84. Laske pienten ympyröiden yhteispinta-alan ja suuren ympyrän pinta-alan suhde.



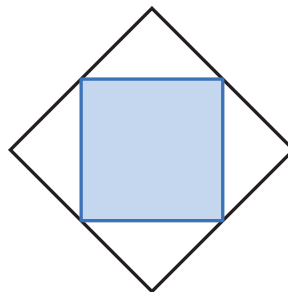
85. Sihijuomalasin pesä on kärjellään seisova suora ympyräkartio ja pesän korkeus on 12 cm. Lasi on täytetty niin, että juoman pinta on 7 cm korkeudella pesän pohjakärjestä. Kuinka monta prosenttia lasin tilavuudesta on vielä vapaana?



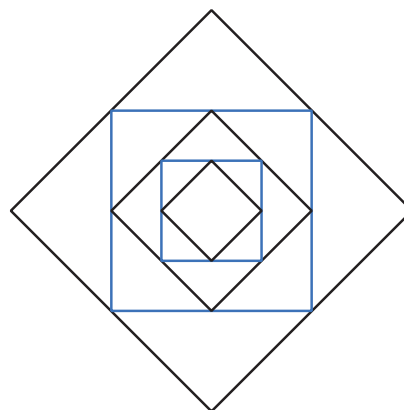
86. Tasakylkisen kolmion pinta-ala on 12. Kolmio jaetaan kannan suuntaisella suoralla kahteen osaan niin, että syntyvän pienen kolmion kannan pituus on kolmasosa suuren kolmion kannan pituudesta. Määritä kolmion alaosaan syntyvän puolisuunnikkaan pinta-ala.

87. Kirkon sipulinmuotoiset kupolit päällystettiin lehtikullalla. Pienemmän, 1,80 metriä korkean kupolin päällystämiseen tarvittiin 85,7 g lehtikultaa. Kuinka paljon kultaa tarvitaan yhdenmuotoisen, 2,50 metriä korkean kupolin päällystämiseen?

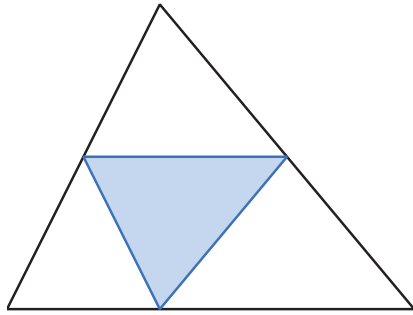
88. a) Yhdistämällä neliön sivujen keskipisteet saadaan kaksi sisäkkäistä neliötä. Määritä neliöiden mittakaava ja pinta-alojen suhde.



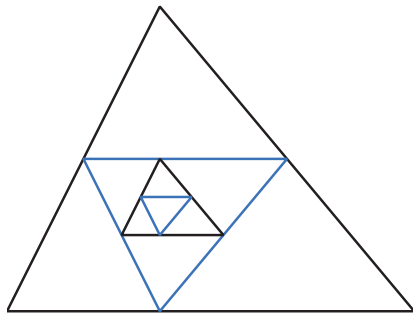
- b) Yhdistämällä aina neliön sivujen keskipisteet saadaan jono sisäkkäisiä neliöitä. Kuinka mones neliö on ensimmäinen, jonka pinta-ala on vähemmän kuin tuhannesosa isoimman neliön pinta-alasta?



89. a) Yhdistämällä kolmion sivujen keskipisteet saadaan kaksi sisäkkäistä kolmiota. Osoita, että saadut kolmiot ovat yhdenmuotoiset ja määritä kolmioiden mittakaava ja pinta-alojen suhde. Voit käyttää hyväksesi tietoa, että kolmion sivujen keskipisteiden välinen jana on kolmannen sivun suuntainen ja pituudeltaan puolet siitä.

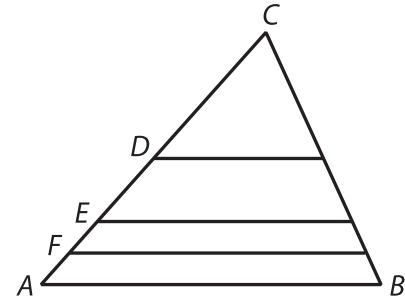


- b) Yhdistämällä aina kolmion sivujen keskipisteet saadaan jono sisäkkäisiä kolmioita. Kuinka mones kolmio on ensimmäinen, jonka pinta-ala on vähemmän kuin miljoonasosa isoimman kolmion pinta-alasta?



90. A3-kokoinen kartta, jonka mittakaava on $1 : 25\,000$ pienennetään kopiokoneella A4-kokoiseksi, jolloin kartan pinta-ala puolittuu.
- a) Kuinka pitkä on maantien osa, jonka pituus pienennetyllä kartalla on $13,5\text{ cm}$?
- b) Mikä on pienennetyn kartan mittakaava? Ilmoita tulos järkevällä tarkkuudella muodossa $1 : n$, missä n on kokonaisluku.

91. Janan AC pituus on 30 ja kolmion ABC kannan suuntaiset janat jakavat kolmion pinta-alaltaan neljään yhtä suureen osaan. Laske janat a) CD b) EF pituus.



92. Piirroksesta tehdään kopiokoneella pienennös, jonka pinta-ala on 30% alkuperäisen piirroksen pinta-alaa pienempi. Alkuperäisen piirroksen korkeus on 14 cm kopion korkeutta suurempi. Mikä on kopioidun piirroksen korkeus?
93. Moottorisahan öljyä myydään 1 litran ja 3 litran muovipulloissa. Pullot ovat samanmuotoiset ja pullojen muovimäärä on suoraan verrannollinen niiden pinta-alaan. Kuinka moninkertainen muovimäärä on 3 litran pullossa 1 litran pulloon verrattuna? Kuinka monta prosenttia vähemmän 3 litran pullossa on käytetty muovia öljylittraa kohti kuin 1 litran pullossa? [yo pitkä k1999]



Merkittävä osa geometrisista ongelmista voidaan ratkaista kolmioiden avulla. Tässä luvussa perehdytään erilaisten kolmioiden ominaisuuksiin ja totutaan laskemaan niiden sivujen pituuksia, pinta-aloja sekä kulmien suuruuksia.

TUTKIMUS



- 1) Puisen kolmion rakentamista varten on sahattu kolme rimaa. Pystytäänkö rimoista rakentamaan kolmio, kun rimojen pituudet ovat **a)** 2 m, 3 m ja 4 m **b)** 2 m, 3 m ja 6 m? Jos ei, niin miksi ei?
- 2) Piirrä jokin kolmio ja mittaa sen sivujen pituudet sekä kulmat. Mieti, miten löydät kolmion pienimmän kulman, jos tiedät sivujen pituudet. Testaa havaintosi muuttamalla kolmion sivujen pituuksia.



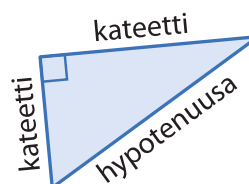
Pythagoras oli kreikkalainen filosofi ja matemaatikko, joka eli 582-496 eaa. Hänen mukaansa nimetty matemaatiikan ehkä tunnetuin lause on kuitenkin ollut käytössä Mesopotamiassa ja Egyptissä jo toista tuhatta vuotta ennen Pythagorasta.

3.1 Suorakulmainen kolmio

Pythagoraan lause

Suorakulmaisen kolmion kulmista yksi on 90° ja kaksi muuta ovat teräviä kulmia.

Suorakulmaisen kolmion sivujen pituudet toteuttavat Pythagoraan lauseen.

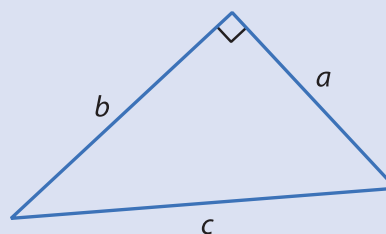


Pythagoraan lause

Lause

Suorakulmaisen kolmion kateettien neliöiden summa on hypotenuusan neliö.

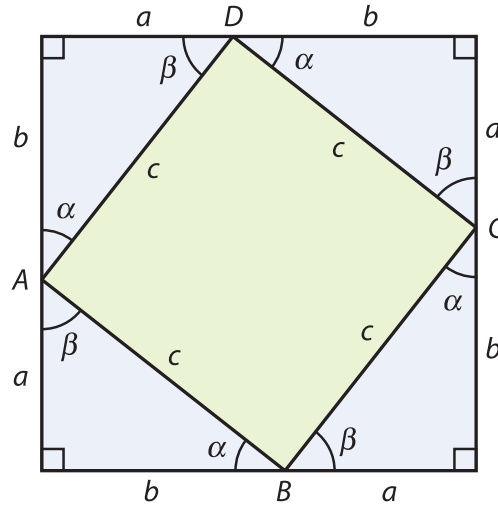
$$a^2 + b^2 = c^2$$



TODISTUS

Olkoot suorakulmaisen kolmion kateetit a ja b sekä hypotenuusa c . Piirretään neliö, jonka sivun pituus on $a + b$, sekä tämän neliön sisään neljä samanlaista suorakulmaista kolmiota seuraavan kuvan mukaisesti.

Pythagoraan lauseelle on laadittu aikojen kuluessa satoja todistuksia. Vanhin säilynyt todistus on itsensä Pythagoraan laatima, tästä on peräisin lauseen nimi.



Neliön sisään syntyy nelikulmio $ABCD$, jonka kaikkien sivujen pituus on c (eli sivut ovat yhtä pitkiä) ja jonka kulmat ovat yhtä suuria ($180^\circ - \alpha - \beta$). Nelikulmio $ABCD$ on siis neliö.

Alkuperäisen neliön pinta-ala on $(a+b)^2$. Toisaalta pinta-ala voidaan laskea neljän suorakulmaisen kolmion ja pienemmän neliön alojen summana $4 \cdot \frac{a \cdot b}{2} + c^2$. Muodostetaan yhtälö.

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= 4 \cdot \frac{a \cdot b}{2} + c^2 \\ a^2 + 2ab + b^2 &= 2ab + c^2 \\ a^2 + b^2 &= c^2\end{aligned}$$

Näin päädyttiin Pythagoraan lauseeseen. $\square$

Pythagoraan lause on voimassa myös kääntäen. Kolmio on suorakulmainen, mikäli sen sivujen pituudet toteuttavat Pythagoraan lauseen.

Mikäli suorakulmaisen kolmion sivuista tunnetaan kaksi, niin kolmas voidaan aina ratkaista Pythagoraan lauseen avulla.



Suorakulmion sivujen pituudet ovat 6 ja 8. Laske suorakulmion lävistäjän pituus.

RATKAISU

Kun tehtävässä mitat on annettu ilman yksiköitä, lasketaan tarkoilla arvoilla ja vastaus annetaan tarkkana arvona.

Lävistäjä jakaa suorakulmion kahteen samanlaiseen suorakulmaiseen kolmioon. Merkitään lävistäjän pituutta kirjaimella c ja sovelletaan Pythagoraan lausetta.

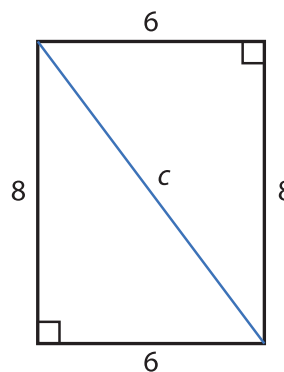
$$c^2 = 6^2 + 8^2$$

$$c^2 = 36 + 64$$

$$c^2 = 100$$

$$c = \pm\sqrt{100}$$

$$c = \pm 10$$



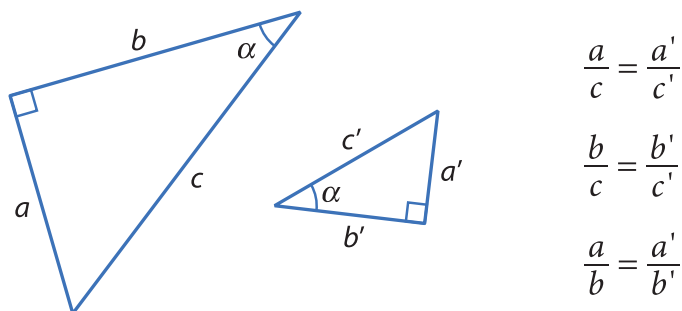
Lävistäjän pituus on positiivinen, joten $c = 10$.

VASTAUS

Lävistäjän pituus on 10.

Sini, kosini ja tangentti

Kaikki suorakulmaiset kolmiot, joissa on yhtä suuri terävä kulma α , ovat keskenään yhdenmuotoisia. Vastinjanojen pituuksien avulla voidaan muodostaa verrantoyhtälöt.



Trigonometriset suhdeluvut sini, kosini ja tangentti määritellään edellä saatujen suhteiden avulla.

Sini, kosini ja tangentti

Määritelmä

Suorakulmaisessa kolmiossa

- kulman α sini on vastaisen kateetin suhde hypotenuusaan

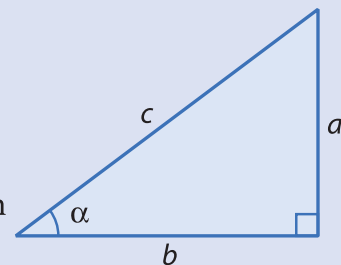
$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

- kulman α kosini on viereisen kateetin suhde hypotenuusaan

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

- kulman α tangentti on vastaisen kateetin suhde viereiseen kateettiin

$$\tan \alpha = \frac{a}{b}.$$



Suorakulmaisen kolmion kulmat ja sivut voidaan ratkaista Pythagoraan lauseen ja sinin, kosinin tai tangentin avulla.

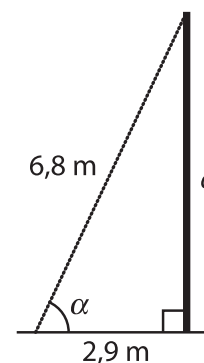
ESIMERKKI 2

Tasamaalle pystytettävä sähkötolppa tuetaan 6,8 metrin pituisella vaijerilla, jonka yläpää kiinnitetään tolpan huippuun ja alapää 2,9 metrin päähän tolpan tyvestä.

- Kuinka suuren kulman vaijeri muodostaa maanpinnan kanssa?
- Määritä sähkötolpan korkeus.

RATKAISU

Merkitään kysyttyä kulmaa kirjaimella α ja tolpan pituutta kirjaimella a .



- Kolmiosta voidaan määrittää kulman α kosini. Vaijerin ja maanpinnan välisen kulman määrittämiseksi muodostetaan yhtälö kosinin avulla.

$$\cos \alpha = \frac{2,9}{6,8}$$

$$\alpha = \cos^{-1} \frac{2,9}{6,8}$$

$$= 64,756...^\circ \approx 65^\circ$$

Kosini on viereisen kateetin suhde hypotenuusaan.

Kulma saadaan laskimen $\cos^{-1}$ -toiminnolla.

Varmista, että laskimessa kulman yksikkönä on aste.

- Koska suorakulmaisen kolmion kaksi sivua tunnetaan, kolmas sivu eli sähkötolpan pituus saadaan Pythagoraan lauseella.

$$a^2 + 2,9^2 = 6,8^2$$

$$a^2 = 6,8^2 - 2,9^2$$

$$a^2 = 37,83$$

$$a = \pm \sqrt{37,83}$$

$$a = \pm 6,15... \text{ (m)}$$

Ratkaistaan ensin a^2 .

Yhtälön voi ratkaista myös laskimella.

Kolmas sivu voitaisiin ratkaista myös kulman α tangentin tai sinin avulla.

Sähkötolpan pituus on positiivinen, joten $a \approx 6,2 \text{ m}$.

VASTAUS

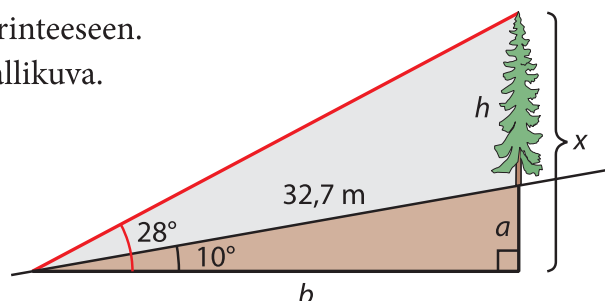
- 65°
- $6,2 \text{ m}$

ESIMERKKI 3

Tasaisesti länteen viettävässä rinteessä kasvavan kuusen varjon pituus on 32,7 m. Idästä paistavan auringon säteet muodostavat 28° kulman vaakatason kanssa. Rinteen kaltevuuskulma on 10° vaakata-
sosta mitattuna. Määritä kuusen korkeus metreinä yhden desimaalin tarkkuudella.

RATKAISU

Kuusen varjo syntyy alarinteeseen.
Piirretään tilanteesta mallikuva.



Merkitään kuusen korkeutta kirjaimella h . Ratkaistaan ensin rin-
teen sisään jäävän suorakulmaisen kolmion kateetit a ja b . Tämän
jälkeen selvitetään suuremman suorakulmaisen kolmion kateetti x ,
jonka jälkeen saadaan kysytty kuusen korkeus $h = x - a$.

Koska varjon pituus 32,7 m on hypotenuusa, niin kateetit a ja b
voidaan ratkaista sinin ja kosinin avulla.

$$\sin 10^\circ = \frac{a}{32,7} \quad | \cdot 32,7$$

Sini on vastaisen kateetin
suhde hypotenuusaan.

$$a = 32,7 \cdot \sin 10^\circ = 5,678... \text{ (m)}$$

Varmista, että laskimessa
kulman yksikkönä on aste.

$$\cos 10^\circ = \frac{b}{32,7} \quad | \cdot 32,7$$

Kosini on viereisen kateetin
suhde hypotenuusaan.

$$b = 32,7 \cdot \cos 10^\circ = 32,203... \text{ (m)}$$

Suuremman suorakulmaisen kolmion kateetin x laskemiseksi muo-
dostetaan yhtälö tangentin avulla.

$$\tan 28^\circ = \frac{x}{b} \quad | \cdot b$$

Tangentti on vastaisen
kateetin suhde viereiseen
kateettiin.

$$x = b \tan 28^\circ$$

$$= 32,203... \cdot \tan 28^\circ = 17,122... \text{ (m)}$$

Kuusen korkeus on

$$h = x - a = 17,122... \text{ m} - 5,678... \text{ m} = 11,44... \text{ m} \approx 11,4 \text{ m}.$$

VASTAUS

11,4 metriä

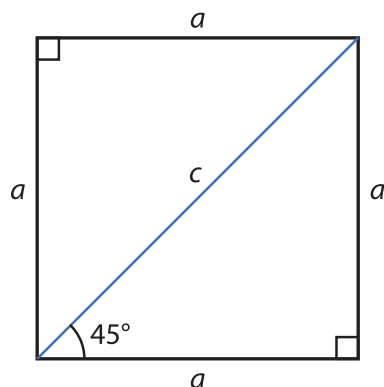


Taulukkokirjasta löytyy tarkat arvot joidenkin kulmien sinille, kosinille ja tangentille.

Johda tarkat arvot 45° kulman sinille, kosinille ja tangentille käyttäen hyväksi tietoa, että neliön lävistäjä muodostaa 45° kulman sivujan kanssa.

RATKAISU

Olkoon neliön sivun pituus a ja lävistäjän pituus c .



Pythagoraan lauseen avulla saadaan lävistäjän pituus.

$$c^2 = a^2 + a^2$$

$$c^2 = 2a^2$$

$$c = \pm \sqrt{2a^2}$$

$$c = \sqrt{2} |a| \quad \left| \begin{array}{l} a > 0, \text{ joten} \\ |a| = a \end{array} \right.$$

$$c = \sqrt{2}a$$

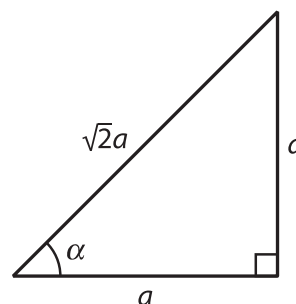
Miinusmerkki voidaan hylätä, koska lävistäjän pituus c on positiivinen.

Sinin, kosinin ja tangentin määritelmän mukaan saadaan suorakulmaisesta kolmiosta

$$\sin 45^\circ = \frac{\cancel{a}}{\sqrt{2} \cancel{a}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\cos 45^\circ = \frac{\cancel{a}}{\sqrt{2} \cancel{a}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ja}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{a}{a} = 1.$$



VASTAUS

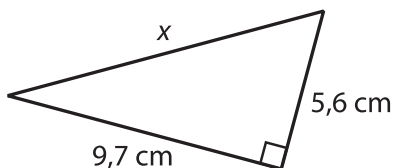
$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{ja} \quad \tan 45^\circ = 1$$

Harjoitustehtäviä

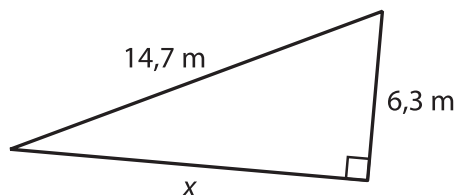
Sarja I

94. Suorakulmaisen kolmion hypotenuusan
E1 pituus on 15 ja toinen kateeteista on
pituudeltaan 9. Laske toisen kateetin
pituus.

95. Laske kolmiosta sivun pituus x .
a)



b)



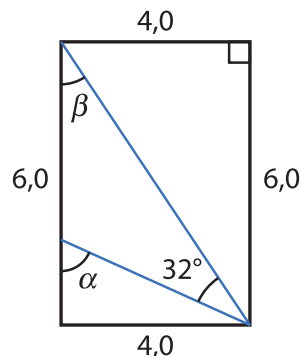
96. Tasasivuisen kolmion sivun pituus on 6.
Määritä kolmion a) korkeus b) pinta-ala.

97. Julia lukee tikkaiden käyttöohjeesta, että
E2 tikkaiden ja maanpinnan välisen kulman
on oltava vähintään 55° ja korkeintaan
 75° . Ylettyvätkö tikkaat Romeon 5,9 met-
rin korkeudella olevalle ikkunalaudalle,
kun tikkaiden pituus on 6,3 m?

98. Tasakylkisen kolmion kannan pituus on
12,4 cm ja korkeus 9,3 cm. Laske kolmion
kyljen pituus ja huippukulman suuruus.

99. Kolmion sivujen pituudet ovat 9, 12
ja 15.
a) Onko kolmio suorakulmainen?
b) Määritä kolmion pienin kulma asteen
kymmenesosan tarkkuudella.

100. Määritä kulmat α ja β .



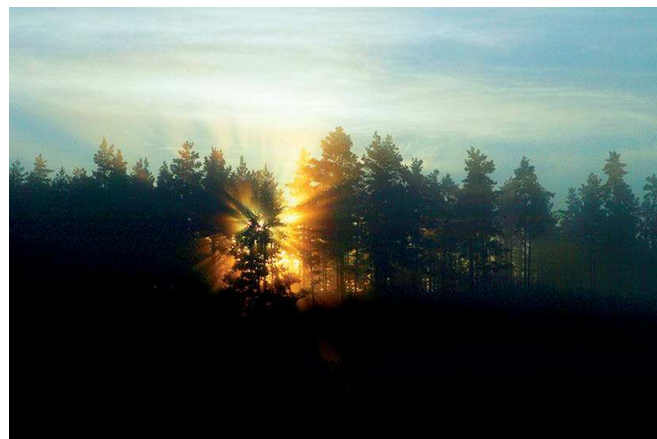
101. Juuson pituus on 143 cm ja hänen var-
jonsa pituus tasaisella maalla on kuusi
kengänmittaa. Männyn varjon pituus on
17 kengänmittaa. Juuson kengän pituus
on 28 cm. Laske

a) männyn korkeus

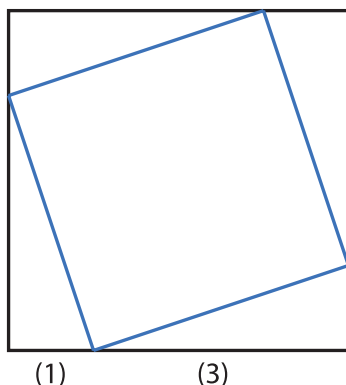
b) auringon säteiden ja maanpinnan väli-
nen kulma

c) kuinka monta astetta aurinko on hori-
sontin yläpuolella.

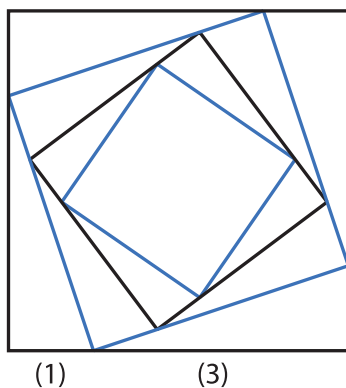
102. Tasaisesti länteen viettävässä rinteessä kas-
E3 vavan kuusen varjon pituus on 29,2 m.
Lännestä paistavan auringon säteet muo-
dostavat 19° kulman vaakatason
kanssa. Rinteen kaltevuuskulma on
7 astetta vaakatasosta mitattuna. Määritä
kuusen korkeus metreinä yhden desimaai-
lin tarkkuudella.



103. a) Neliön jokaiselle sivulle merkitään piste, joka jakaa sivun suhteessa 1 : 3. Kun pisteet yhdistetään, muodostuu kaksi sisäkkäistä neliötä. Määritä neliöiden pinta-alojen suhde.



- b) Jatkamalla aina samalla tavalla saadaan jono sisäkkäisiä neliöitä. Kuinka mones neliö on ensimmäinen, jonka pinta-ala on vähemmän kuin tuhannesosa isoimman neliön pinta-alasta?



Sarja II

104. Tasamaalla kasvaa mänty 16 metrin etäisyydellä maan rajassa olevasta oravan käpypajasta. Männyn korkeus on 21 metriä. Myrskyssä mänty taittuu 3,9 metrin korkeudelta katkeamatta täysin ja kaatuu kohti oravan pajaa. Onko käpypajalla istuva orava turvassa?
105. Suorakulmion muotoisen pellon leveys on puolet sen pituudesta. Kuinka monta prosenttia kävelymatka lyhenee, jos oikaisee lyhintä reittiä pellon poikki nurkasta vastakkaiseen nurkkaan sen sijaan, että kiertäisi pellon reunoja myöten?
106. Tasamaalle pystytetyn matkapuhelinmaston korkeus on 42 m. Maston huippuun kiinnitetään kolme tukivaijeria, jotka muodostavat 59° kulman maanpinnan kanssa. Kuinka paljon vaijeria tähän tarvitaan?
107. Jäämeren äärellä Sandfjordin tasaisesti viettävällä hiekkarannalla on kivi, jonka korkeus on 1,3 metriä. Kun nouseva vuorovesi juuri ja juuri peittää kiven, vesiraja on noussut kiveltä mitattuna 39 metriä. Mikä on hiekkarannan kaltevuuskulma vaakatasosta mitattuna?



108. Laske säännöllisen 8-kulmion ympäri piirretyn ympyrän säteen pituus, kun 8-kulmion sivun pituus on 6,0 m.

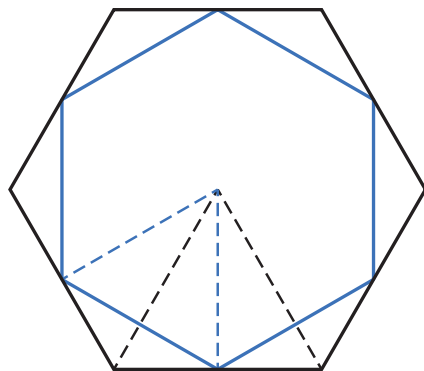
109. Mäen huipulla on näkötorni. Mäen juurella olevalta suolta katsottuna tornin huippu näkyy 17° kulmassa ja tornin juuri 11° asteen kulmassa vaakatasossa olevan suon pinnan yläpuolella. Etäisyysmittarin mukaan tornin juuri on 187 m etäisyydellä. Määritä

- a) mäen korkeus suon pinnan tasosta mitattuna
- b) tornin korkeus.

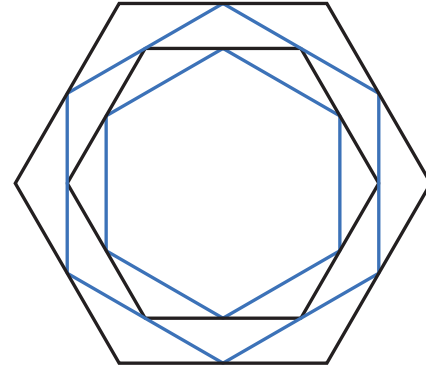
110. Suorakulmaisen kolmion kaksi sivua ovat pituudeltaan 4 ja 7. Laske kolmannen sivun pituus.

111. Kannettoman pähvilaatikon sisällä, pohjan keskellä, on muurahainen. Kuinka pitkä on muurahaisen lyhin reitti laatikon pohjan ulkonurkkaan? Laatikon pituus on 30 cm, leveys 16 cm ja korkeus 10 cm.

112. a) Yhdistämällä säännöllisen kuusikulmion sivujen keskipisteet saadaan kaksi sisäkkäistä kuusikulmiota. Määritä kuusikulmioiden mittakaava ja pinta-alojen suhde.



b) Yhdistämällä aina säännöllisen kuusikulmion sivujen keskipisteet saadaan jono kuusikulmioita. Kuinka mones kuusikulmio on ensimmäinen, jonka pinta-ala on vähemmän kuin miljoonasosa isoimman kuusikulmion pinta-alasta?



113. Havaintopisteestä A näkyy vuoren huippu H suoraan lännessä $17,4^\circ$ vaakatason yläpuolella. Toisesta havaintopisteestä B , joka on tasan 3000 metriä pisteestä A pohjoiseen, huippu näkyy $14,5^\circ$ vaakatason yläpuolella. Mikä on vuoren korkeus merenpinnasta, kun havaintopisteet ovat 200 metrin korkeudella merenpinnasta? Maanpinnan kaarevuutta ei tarvitse ottaa huomioon. [yo pitkä k1997]

114. Johda tarkat arvot **a)** 30° ja **b)** 60° kulmien sinille, kosinille ja tangentille käyttäen hyväksi tietoa, että tasasivuisen kolmion kaikki kulmat ovat 60° .

3.2 Sinilause

TUTKIMUS



- 1) Piirrä kolmio, jonka kannan pituus on 6 ja pinta-ala 9. Kuinka monella tavalla voit kolmion piirtää?
- 2) Piirrä kolmio, jonka kannan ja vasemman kyljen pituus on 6 ja jonka korkeus on 3. Kuinka monella tavalla voit kolmion piirtää? Laske näiden kolmioiden pinta-alat.

Suorakulmaisessa kolmiossa voidaan soveltaa Pythagoraan lausetta. Kun kolmio ei ole suorakulmainen, Pythagoraan lausetta ei voida käyttää. Tässä ja seuraavassa luvussa perehdytään keinoihin, joilla voidaan tutkia tällaisia vinokulmaisia kolmioita.

Kolmion pinta-ala

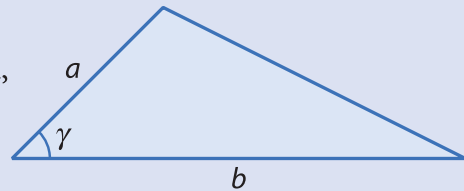
Kolmion pinta-ala voidaan laskea kannan a ja korkeuden h avulla kaavalla $A = \frac{1}{2}a \cdot h$. Tästä voidaan johtaa kolmion pinta-alan laske-
miseksi myös seuraava kaava.

Kolmion pinta-ala

Jos a ja b ovat kolmion kaksi sivua ja γ niiden välinen kulma, niin kolmion pinta-ala on

$$A = \frac{1}{2}ab \sin \gamma.$$

Lause

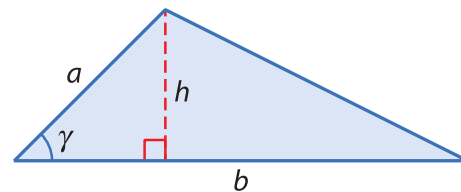


TODISTUS

Todistetaan pinta-alan kaava tilanteessa, jossa kulma γ on terävä. Piirretään kolmion sivulle b korkeusjana h .

Korkeus h saadaan sinin avulla.

$$\begin{aligned}\sin \gamma &= \frac{h}{a} \\ h &= a \sin \gamma\end{aligned}$$



Kolmion pinta-ala voidaan nyt laskea kannan b ja korkeuden h avulla.

$$A = \frac{1}{2}b \cdot h$$

Sijoitetaan $h = a \sin \gamma$.

$$= \frac{1}{2}b \cdot a \sin \gamma$$

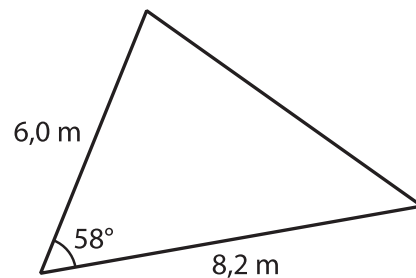
$$= \frac{1}{2}ab \sin \gamma$$

Tapaus, jossa kulma γ on suora tai tylppä, on mahdollista todistaa vastaavalla menettelyllä, kun on ensin laajennettu kulman sinin määritelmä kattamaan myös muut kuin terävät kulmat (kurssi 7). $\square$

ESIMERKKI 1

Kolmion kaksi sivua ovat pituudeltaan 6,0 m ja 8,2 m, ja niiden välinen kulma on 58° . Laske kolmion pinta-ala.

RATKAISU



$$A = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$$

Sijoitetaan $a = 6,0$,
 $b = 8,2$ ja $\gamma = 58^\circ$.

$$= \frac{1}{2} \cdot 6,0 \cdot 8,2 \cdot \sin 58^\circ$$

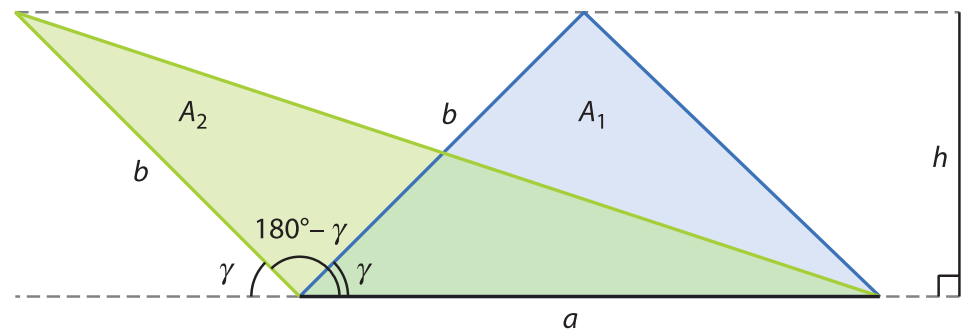
$$= 20,861... \approx 21 \text{ (m}^2\text{)}$$

Kolmion pinta-ala on 21 m^2 .

VASTAUS

21 m^2

Kolmion pinta-ala määräytyy kannan ja korkeuden perusteella. Kaikilla kolmioilla, joilla on sama korkeus ja sama kanta, on myös sama pinta-ala. Jos kolmiosta tunnetaan kanta a , kylki b ja korkeus h , niin kolmio voidaan piirtää kahdella tavalla.



Edellä johdettu kolmion pinta-alaa koskeva lause pätee myös tylpille kulmille. Koska molempien kolmioiden pinta-alat A_1 ja A_2 ovat samat, voidaan muodostaa yhtälö.

$$\begin{aligned} A_1 &= A_2 \\ \frac{1}{2}ab \sin \gamma &= \frac{1}{2}ab \sin(180^\circ - \gamma) & \left| \cdot \frac{2}{ab} \right. \\ \sin \gamma &= \sin(180^\circ - \gamma) \end{aligned}$$

Saatiin tulos, jonka mukaan suplementtikulmien sinit ovat samat. Tähän mennessä on määritelty ainoastaan terävän kulman sini, kosini ja tangenti. Muiden kulmien sinin, kosinin ja tangentin määritelmiin perehdytään tarkemmin kurssissa 7.

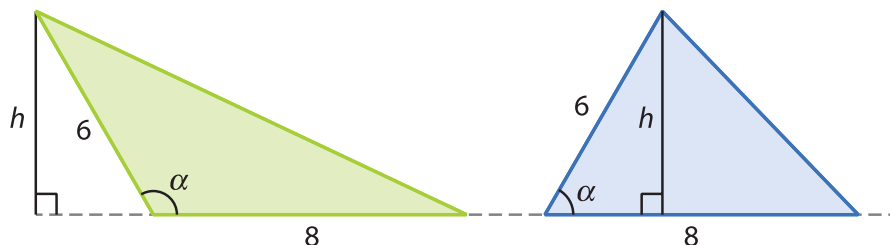
Tällä kurssilla riittää tieto, että ratkaistaessa kolmion kulma γ yhtälöstä $\sin \gamma = t$ ratkaisuksi käy terävän kulman $\gamma (= \sin^{-1} t)$ lisäksi tylppä kulma $180^\circ - \gamma$, koska $\sin \gamma = \sin(180^\circ - \gamma)$. Lisäksi tarvitaan tieto, että $\sin 90^\circ = 1$.

ESIMERKKI 2

Kolmion pinta-ala on $12\sqrt{3}$ ja kolmion kaksi sivua ovat 6 ja 8. Määritä näiden tunnettujen sivujen välinen kulma.

RATKAISU

Valitaan kannaksi sivu, jonka pituus on 8. Huomataan, että kolmio voidaan piirtää kahdella eri tavalla niin, että korkeutena on sama h .



Kysytty kulma voi siis olla joko terävä tai tylppä, sillä kolmion pinta-alan määräävät ainoastaan kannan pituus ja kolmion korkeus. Merkitään kysyttyä kulmaa kirjaimella α .

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan kulma α .

$$A = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \cdot \sin \alpha$$

$$\text{Sijoitetaan } A = 12\sqrt{3}.$$

$$12\sqrt{3} = 24 \sin \alpha \quad | : 24$$

$$\sin \alpha = \frac{\cancel{12} \sqrt{3}}{\cancel{24}_2}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

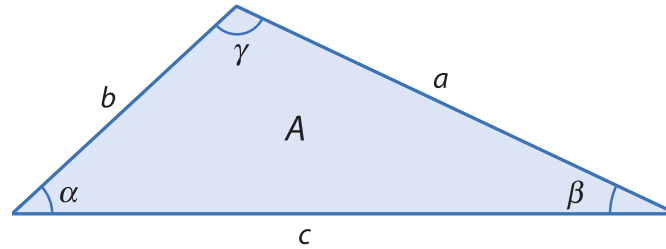
$$\alpha = \sin^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2} = 60^\circ$$

Koska supplemmenttikulmien sinit ovat yhtä suuret, kulma α voi olla myös $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$. Saadaan tunnettujen sivujen väliseksi kulmaksi $\alpha = 60^\circ$ tai $\alpha = 120^\circ$.

VASTAUS

60° tai 120°

Sinilause



Kolmion pinta-ala voidaan laskea kahden sivun ja niiden välisen kulman avulla kolmella eri tavalla:

$$(A =) \frac{1}{2}bc \sin \alpha = \frac{1}{2}ac \sin \beta = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$$

Sievennetään saatu yhtälö kertomalla se luvulla $\frac{2}{abc}$.

$$\frac{1}{2}bc \sin \alpha = \frac{1}{2}ac \sin \beta = \frac{1}{2}ab \sin \gamma \quad \left| \cdot \frac{2}{abc} (\neq 0) \right.$$

$$\frac{\cancel{bc} \sin \alpha}{\cancel{a} \cancel{bc}} = \frac{\cancel{a} \cancel{c} \sin \beta}{\cancel{a} \cancel{b} \cancel{c}} = \frac{\cancel{ab} \sin \gamma}{\cancel{ab} \cancel{c}}$$

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Myös käänteisluvut ovat yhtä suuret.

Havaitaan, että kolmion sivun pituuden suhde vastakkaisen kulman siniin on vakio riippumatta valitusta sivusta ja kolmion muodosta. Saatua tulosta kutsutaan sinilauseeksi.

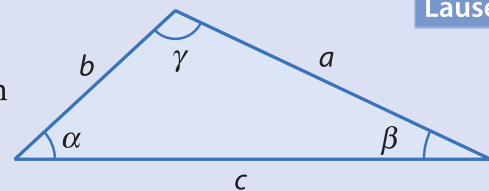
Sinilauseetta voidaan käyttää kolmion osien laskemiseen, kun tunnetaan

- kaksi sivua ja toisen vastainen kulma
- kaksi kulmaa ja toisen vastainen sivu.

Sinilause

Kolmion sivun ja sen vastaisen kulman sinin suhde on vakio.

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$



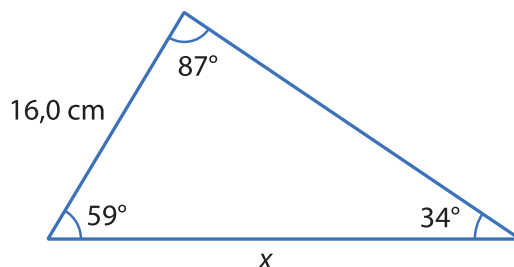
Lause

ESIMERKKI 3

Kolmiosta tunnetaan sen lyhin sivu, jonka pituus on 16,0 cm, sekä kulmat 34° ja 59° . Määritä kolmion pisimmän sivun pituus yhden desimaalin tarkkuudella.

RATKAISU

Kolmion kolmas kulma on $180^\circ - 34^\circ - 59^\circ = 87^\circ$. Lyhimmän sivun vastainen kulma on kulmista pienin eli 34° .



Kolmion sivuista pisin on suurimman kulman eli 87° kulman vastainen sivu. Merkitään tätä kysyttyä sivua kirjaimella x . Muodostetaan sinilauseen avulla yhtälö.

$$\begin{aligned}\frac{x}{\sin 87^\circ} &= \frac{16,0}{\sin 34^\circ} && | \cdot \sin 87^\circ \\ x &= \sin 87^\circ \cdot \frac{16,0}{\sin 34^\circ} \\ x &\approx 28,57 \dots \approx 28,6 \text{ (cm)}\end{aligned}$$

Kolmion pisin sivu on 28,6 cm.

VASTAUS

28,6 cm

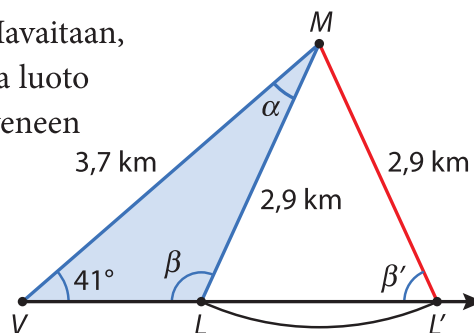
Kolmion pienin kulma on lyhimmän sivun vastainen kulma ja vastaavasti suurin kulma on pisimmän sivun vastainen kulma.



Veneilijä näkee majakan 41° asteen kulmassa kulkusuunnasta katsottuna vasemmalla. Hän tutkii merikorttia ja havaitsee, että majakka on $3,7 \text{ km}$ etäisyydellä veneestä. Veneilijä havaitsee merikortista myös, että suoraan edessä oleva luoto on $2,9 \text{ km}$ päässä majakasta. Missä kulmassa majakan pihalla kiikaroiva lintuharrastaja näkee veneen ja luodon välin?

RATKAISU

Piirretään tilanteesta mallikuva. Havaitaan, että annettujen tietojen perusteella luoto voi sijaita kahdessa eri kohdassa veneen kulkureitillä (L ja L').



Merkitään kysyttyä kulmaa kirjaimella α ja kolmion VLM kolmatta kulmaa kirjaimella β . Muodostetaan yhtälö sinilauseen avulla.

$$\frac{2,9}{\sin 41^\circ} = \frac{3,7}{\sin \beta}$$

$$2,9 \sin \beta = 3,7 \sin 41^\circ \quad | : 2,9$$

$$\sin \beta = \frac{3,7 \sin 41^\circ}{2,9}$$

$$\sin \beta = 0,837\dots$$

$$\beta = \sin^{-1} 0,837\dots = 56,82\dots^\circ$$

Kerrotaan ristiin.

Koska supplementtikulmien sinit ovat yhtä suuret, niin kulman β arvoksi kelpaa myös $180^\circ - 56,82\dots^\circ = 123,17\dots^\circ$. Saadaan siis $\beta = 56,82\dots^\circ$ tai $\beta = 123,17\dots^\circ$

Lasketaan kysytty kolmion kolmas kulma α ja varmistetaan, että se on välillä $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ (eli saatu α kelpaa kolmion kulmaksi).

$$\alpha = 180^\circ - 41^\circ - 56,82\dots^\circ \approx 82^\circ$$

kelpaa

Kolmion kulmien

$$\alpha = 180^\circ - 41^\circ - 123,17\dots^\circ \approx 16^\circ$$

kelpaa

summa on 180° .

Lintuharrastaja näkee veneen ja luodon välisen janan 16° tai 82° kulmassa.

VASTAUS

16° tai 82°

Yhtälön voi ratkaista myös laskimella. Tällöin kulman α suuruus pitää kuitenkin rajata välille $]0^\circ, 180^\circ[$, koska kolmion kulman suuruus on aina tällä välillä. Lisäehto annetaan yleensä pystyviivan jälkeen.

Komento voi näyttää tältä:

$$\text{solve}\left(\frac{2.9}{\sin(41)} = \frac{3.7}{\sin(\beta)}, \beta\right)$$

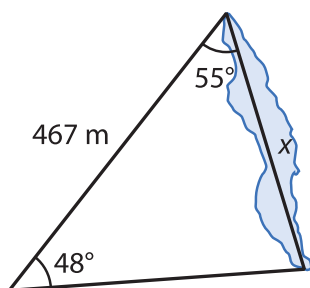
$$| 0 < \beta < 180$$

Harjoitustehtäviä

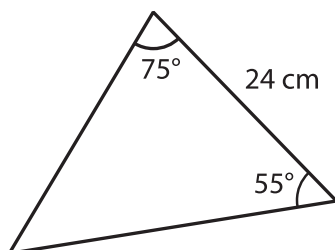
Sarja I

115. Kolmion kahden sivun pituudet ovat
E1 13,0 cm ja 24,4 cm sekä sivujen välisen kulman suuruus $39,0^\circ$. Laske kolmion pinta-ala.
116. Kolmiossa ABC on $|AB| = 19,28$ m, $|AC| = 10,72$ m ja $\sphericalangle BAC = 26,33^\circ$. Laske kolmion pinta-ala.
117. Kolmionmuotoisen nurmialueen pinta-ala
E2 on 346 m^2 ja sen kahden sivun pituudet ovat 27,4 m ja 39,1 m. Määritä näiden sivujen välinen kulma.
118. Tasasivuisen kolmion pinta-ala on 60. Määritä kolmion sivun pituus yhden desimaalin tarkkuudella.
119. Kolmiosta tunnetaan sen pisin sivu 9,3 cm
E3 sekä kulmat 84° ja 49° . Määritä kolmion muiden sivujen pituudet.

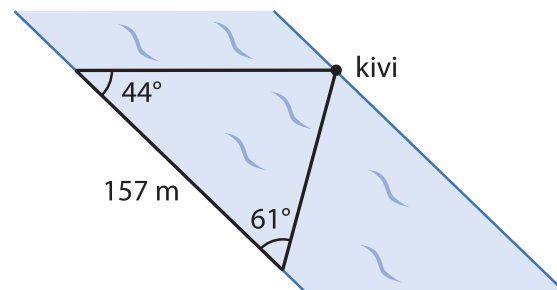
120. Määritä lammen pituus x .



121. Määritä kolmion pinta-ala.



122. Määritä joen leveys oheisten mittaustulosten avulla.



123. Kolmiosta tunnetaan kaksi sivua, joiden
E4 pituudet ovat 3,7 cm ja 5,8 cm. Näistä pidemmän sivun vastainen kulma on 55° . Laske kolmion muut kulmat ja kolmannen sivun pituus.
124. Kartan mukaan Kilpisjärven pinta on
 473 m korkeudella merenpinnasta. Järven jäältä hiihtäjä näkee läheisen Saanatunturin huipun $3,0^\circ$ vaakatason yläpuolella. Hiihdettyään satelliittipaikantimen mukaan 2,66 km lähemmäs Saanaa hän näkee huipun $4,0^\circ$ kulmassa vaakatason yläpuolella. Kuinka korkealla Saanan huippu on merenpinnan tasosta mitattuna?

Sarja II

125. Kolmion pinta-ala on 30 sekä kolmion kahden sivun pituudet 12 ja 7. Laske näiden sivujen välinen kulma asteen kymmenyksen tarkkuudella.
126. Kolmion kaksi sivua ovat pituudeltaan 28,0 cm ja 36,0 cm. Mikä on kolmion pinta-alan suurin mahdollinen arvo?

127. Kihdin laivaväylällä etenee rahtilaiva kohti etelää. Laivan pituus on 178 metriä. Laiva mahtuu juuri ja juuri länteen katselevan veneilijän kiikarin $4,0^\circ$ näkökenttään. Kuinka kaukana laivan keula on veneilijästä?
128. Pohjoiseen viettävän rinteen kaltevuuskulma on $15,0^\circ$. Rinteessä kasvavan pystysuoran kuusen varjon pituus on 29,7 m ja etelästä paistavan auringon säteet muodostavat $27,0^\circ$ kulman rinteiden kanssa. Laske kuusen pituus.
129. Mäen huipulla on 47 m korkea torni. Läheisellä aukiolla kävelevä puistonvartija näkee tornin huipun $6,2^\circ$ vaakatason yläpuolella. Käveltyään 300 m lähemmäs, hän näkee tornin huipun $8,9^\circ$ vaakatason yläpuolella. Määritä mäen korkeus aukion pinnan tasosta mitattuna.
130. Kolmion kaksi sivua ovat 8,1 m ja 4,0 m sekä jälkimmäisen vastainen kulma $20,0^\circ$. Laske kolmion muut kulmat ja sivut.
131. Kioskin ikkunasta näkyy taksitolpan ja parturiliikkeen oven väli 68° kulmassa. Kioskilta on taksitolpalle matkaa 47 m, parturiliikkeen ja taksitolpan välinen matka on 84 metriä. Missä kulmassa parturiliikkeen ovelta näkee kioskin ja taksitolpan välin?
132. Tunnetaan kolmion ABC kulma A sekä sivut b ja c . Kirjoita kolmion ratkaisemiseen tarpeelliset kaavat ja ratkaise kolmio, kun $\sphericalangle A = 25^\circ$, $b = 35$ cm, $c = 45$ cm. [yo pitkä k1928]
Huomautus: Kulma A on sivun a vastainen kulma. Kolmion ratkaiseminen tarkoittaa sitä, että määritetään kolmion kaikki sivut ja kulmat.

133. Saaren rannassa nuotiolla makkaraa paistava retkeilijä katselee läheisellä luodolla olevaa sektoriloistoa. Hän näkee väylämerkin valot 35° loiston vasemmalla puolella. Väylämerkin ja loiston välimatka on merikortin mukaan 3,75 km. Retkeilijä tietää, että väylämerkiltä katsottaessa nuotion ja loiston väli näkyy 88° kulmassa. Merellä oleva veneilijä näkee nuotion ja loiston välin 63° kulmassa. Kuinka kaukana nuotiosta veneilijä on, kun nuotiolla istuva retkeilijä näkee vilahduksen veneilijän tasculampusta 38° sektoriloistosta oikealle?



134. Vuoren huippu näkyy paikassa A olevasta laivasta suoraan etelässä 15° horisontin yläpuolella. Kun laiva siirtyy sellaiseen kohtaan B , että suunta AB muodostaa 70° kulman eteläsuunnan kanssa ja etäisyys $|AB| = 4,00$ km, näkyy huippu suoraan lounaassa. Laske huipun korkeus. [yo pitkä k1987]

3.3 Kosinilause

Edellisessä luvussa pääteltiin, että suplementtikulmien sinit ovat yhtä suuret eli $\sin(180^\circ - \gamma) = \sin \gamma$. Jatkossa tarvitaan lisäksi tieto, että suplementtikulmien kosinit ovat toistensa vastalukuja eli $\cos(180^\circ - \gamma) = -\cos \gamma$, ja että $\cos 90^\circ = 0$.

Kosinilauseen avulla voidaan ratkaista

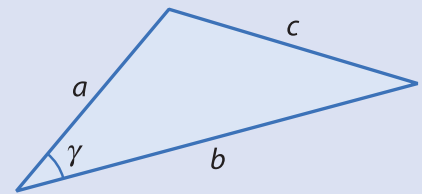
- mikä tahansa kolmion kulmista, mikäli sivujen pituudet tunnetaan
- kolmion kolmas sivu, jos tunnetaan kaksi sivua ja yksi kulma.

Kosinilause

Jos kolmion sivut ovat a , b ja c , sekä sivun c vastainen kulma γ niin

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

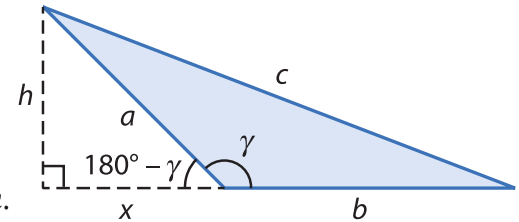
Lause



TODISTUS

Todistetaan ensin kosinilause tapauksessa, jossa kulma γ on tylppä.

Valitaan kolmion kannaksi kulman γ toinen kylki ja piirretään kannan jatkeelle korkeusjana. Merkitään kolmion korkeutta kirjaimella h .



Kuvan merkinnöillä saadaan kosinin määritelmän ja Pythagoraan lauseen avulla seuraavat yhtälöt.

$$1) \cos(180^\circ - \gamma) = \frac{x}{a}$$

$$\cos(180^\circ - \gamma) = -\cos \gamma$$

$$x = a \cos(180^\circ - \gamma)$$

$$x = -a \cos \gamma$$

$$2) a^2 = x^2 + h^2$$

$$h^2 = a^2 - x^2$$

$$3) c^2 = h^2 + (x + b)^2$$

$$h^2 = a^2 - x^2$$

$$= a^2 - x^2 + x^2 + 2xb + b^2$$

$$= a^2 + b^2 + 2xb$$

$$x = -a \cos \gamma$$

$$= a^2 + b^2 + 2 \cdot (-a \cos \gamma) \cdot b$$

$$= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Saatiin todistettua kosinilause $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ tylpälle kulmalle γ .

Tylpän kulman sinin ja kosinin arvot voi määrittää laskimella tai joissakin erikoistapauksissa taulukkokirjan avulla. Tarkempi määritelmä näille tulee kurssissa 7.

Tällä kurssilla riittää tietää, että

$$\sin(180^\circ - \gamma) = \sin \gamma$$

$$\cos(180^\circ - \gamma) = -\cos \gamma$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

$$\cos 90^\circ = 0$$

Mikäli kulma γ on suora eli 90° , niin saadaan

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos 90^\circ \quad \cos 90^\circ = 0$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot 0$$

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Yhtälö on tosi, koska kolmio on suorakulmainen.

Pythagoraan lause on siis kosinilauseen erikoistapaus.

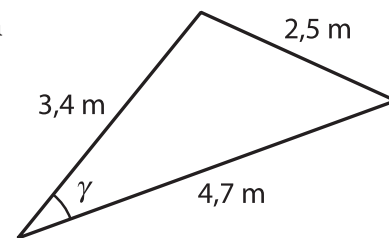
Teräväkulmaisen kolmion tapauksen todistus on harjoitustehtävänä 155. $\square$

ESIMERKKI 1

Kolmion sivujen pituudet ovat 3,4 m, 2,5 m ja 4,7 m. Määritä kolmion pienin kulma asteen kymmenyksen tarkkuudella.

RATKAISU

Kolmion pienin kulma γ on lyhimmän sivun vastainen kulma. Piirretään tilanteesta mallikuva.



Muodostetaan yhtälö kosinilauseen avulla.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

$$2,5^2 = 3,4^2 + 4,7^2 - 2 \cdot 3,4 \cdot 4,7 \cdot \cos \gamma$$

$$2 \cdot 3,4 \cdot 4,7 \cdot \cos \gamma = 3,4^2 + 4,7^2 - 2,5^2$$

$$\cos \gamma = \frac{3,4^2 + 4,7^2 - 2,5^2}{2 \cdot 3,4 \cdot 4,7} = 0,857...$$

$$\gamma = \cos^{-1} 0,857...$$

$$= 30,982...^\circ \approx 31,0^\circ$$

Sijoitetaan $c = 2,5$;
 $a = 3,4$ ja $b = 4,7$.

Yhtälön voi ratkaista myös laskimella. Tällöin kulman γ suuruus pitää kuitenkin rajata välille $]0^\circ, 180^\circ[$, koska kolmion kulman suuruus on aina tällä välillä. Lisäehto annetaan yleensä pystyvii-
van jälkeen. Komento voi näyttää tältä:

Solve $(2,5^2 = 3,4^2 + 4,7^2 - 2 \times 3,4 \times 4,7 \times \cos(\gamma), \gamma) |$
 $0 < \gamma < 180^\circ$

Kolmion pienin kulma on $31,0^\circ$.

VASTAUS

$31,0^\circ$

ESIMERKKI 2

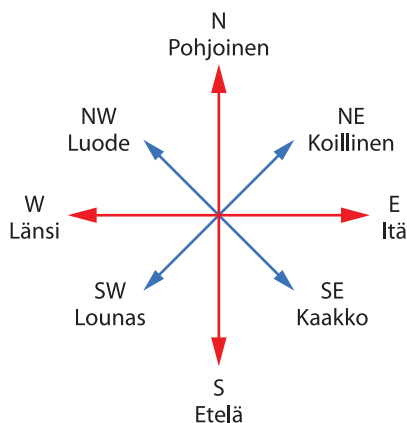
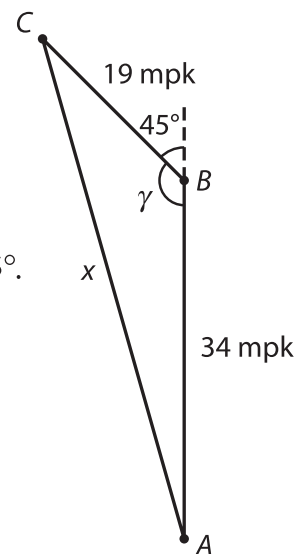


Risteilyalus ajoi ensin 34 meripeninkulmaa pohjoiseen ja sen jälkeen 19 meripeninkulmaa luoteeseen. Kuinka kauas lähtöpisteestä alus päätyi?

RATKAISU

Piirretään mallikuva. Risteilyalus lähtee pisteestä A , kääntyy pisteessä B ja päättyy pisteeseen C . Merkitään kysyttyä etäisyyttä kirjaimella x .

Kääntyessään pisteessä B kohti luodetta laiva kääntyy 45° . Kulma $\gamma = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.



Muodostetaan yhtälö kosinilauseen avulla.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

$$x^2 = 34^2 + 19^2 - 2 \cdot 34 \cdot 19 \cdot \cos 135^\circ$$

$$x^2 = 2430,58\dots$$

$$x = \pm \sqrt{2430,58\dots}$$

$$x = \pm 49,30\dots \text{ (mpk)}$$

Sijoitetaan $c = x$, $a = 34$,
 $b = 19$ ja $\gamma = 135^\circ$.

Yhtälön voi ratkaista laskimella.

Etäisyys x on positiivinen, joten $x \approx 49$ meripeninkulmaa.

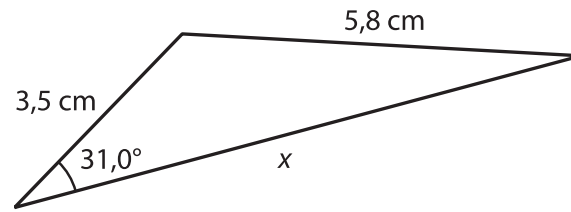
Alus päätyi 49 meripeninkulman päähän lähtöpisteestä.

VASTAUS

49 mpk

ESIMERKKI 3

Määritä oheisesta kolmiosta sivun pituus x .

**RATKAISU**

Muodostetaan yhtälö kosinilauseen avulla.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Sijoitetaan $c = 5,8$; $a = x$,
 $b = 3,5$ ja $\gamma = 31,0^\circ$.

$$5,8^2 = x^2 + 3,5^2 - 2 \cdot x \cdot 3,5 \cdot \cos 31,0^\circ$$

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot 3,5 \cdot \cos 31,0^\circ + 3,5^2 - 5,8^2 = 0$$

Yhtälön voi ratkaista
myös laskimella.

$$x^2 - 7 \cdot \cos 31,0^\circ \cdot x - 21,39 = 0$$

$$x = \frac{7 \cdot \cos 31,0^\circ \pm \sqrt{(-7 \cdot \cos 31,0^\circ)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-21,39)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{6,00... \pm 11,025...}{2}$$

$$x = -2,51... \text{ tai } x = 8,51... \text{ (cm)}$$

Kolmion sivun pituus on aina positiivinen, joten kysytty sivun pituus $x \approx 8,5$ cm.

VASTAUS

$$x = 8,5 \text{ cm}$$

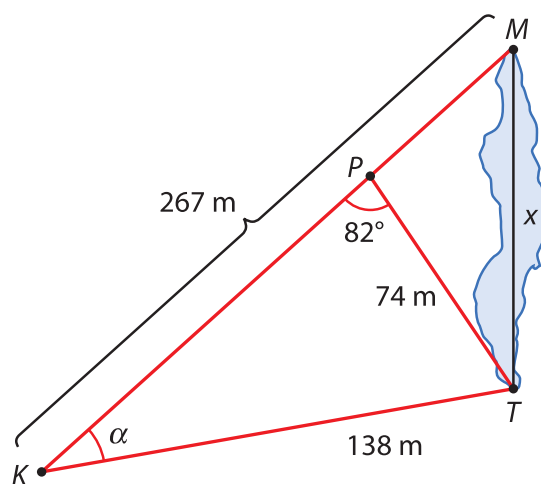


Pitkulaisen suolammen eteläpäässä on telkänpönttö. Pohjoispäässä on mänty. Männyltä on 267 metriä kalasääsken pesäpuulle ja tällä välillä on lintuvalokuvaajan piilokoju. Piilokojulta on 74 metrin matka telkänpöntölle ja kojulta näkyy telkänpöntön ja kalasääsken pesän väli 82° kulmassa. Telkänpöntöltä on 138 metrin matka kalasääsken pesälle.

- Missä kulmassa kalasääsken pesältä näkyy telkänpöntön ja männyn väli?
- Mikä on männyn ja telkänpöntön välinen etäisyys eli mikä on suolammen pituus?

RATKAISU

Merkitään telkänpönttöä kirjaimella T , mäntyä kirjaimella M , piilokojua kirjaimella P ja kalasääsken pesää kirjaimella K sekä kysyttyä etäisyyttä kirjaimella x ja kulmaa kirjaimella α .



- Määritetään kulma α sinilauseen avulla.

$$\frac{74}{\sin \alpha} = \frac{138}{\sin 82^\circ}$$

$$138 \sin \alpha = 74 \sin 82^\circ$$

$$\sin \alpha = \frac{74 \sin 82^\circ}{138}$$

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{74 \sin 82^\circ}{138}\right) = 32,07\dots^\circ$$

Koska supplementtikulmien sinit ovat yhtä suuret, kulman α arvoksi kelpaa myös $180^\circ - 32,07\dots^\circ = 147,92\dots^\circ$. Saadaan siis $\alpha \approx 32^\circ$ tai $\alpha \approx 148^\circ$.

Tarkistetaan, kelpaavatko saadut kulman α arvot kolmion KTP kulmiksi laskemalla kolmion kolmas kulma $\beta = \sphericalangle PTK$. Kulman β (kuten kaikkien kolmion kulmien) on toteutettava ehto $0^\circ < \beta < 180^\circ$.

- Kun $\alpha \approx 32^\circ$, niin kolmas kulma on
 $\beta = 180^\circ - 82^\circ - 32,07\dots^\circ = 65,92\dots^\circ$.

Koska $0^\circ < 65,92\dots^\circ < 180^\circ$, niin tapaus $\alpha \approx 32^\circ$ kelpaa.

- Kun $\alpha \approx 148^\circ$, niin kolmas kulma on
 $\beta = 180^\circ - 82^\circ - 147,92\dots^\circ = -49,92\dots^\circ$.

Koska $-49,92\dots^\circ \leq 0^\circ$, niin tapaus $\alpha \approx 148^\circ$ ei kelpaa.

Siis kysytty kulma on 32° .

- b)** Ratkaistaan lammen pituus x muodostamalla kosinilauseen avulla yhtälö kolmiosta KTM .

$$x^2 = 138^2 + 267^2 - 2 \cdot 138 \cdot 267 \cdot \cos 32,07\dots^\circ$$

$$x^2 = 27886,3\dots$$

$$x = \pm \sqrt{27886,3\dots}$$

$$x = \pm 166,99\dots$$

Pituus on positiivinen, joten $x \approx 167$ m.

Lammen pituus on 167 metriä.

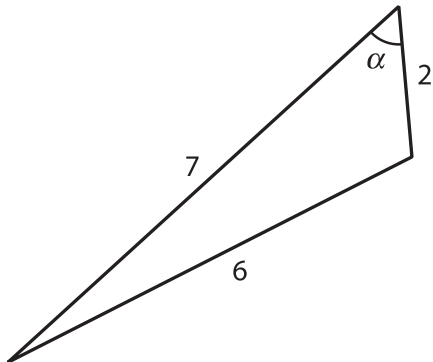
VASTAUS

- a)** 32° **b)** 167 m

Harjoitustehtäviä

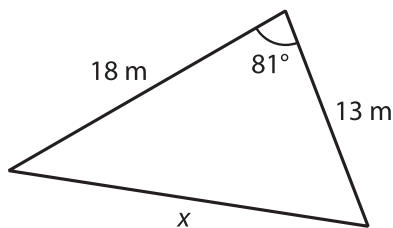
Sarja I

135. Laske kolmion kulman α suuruus kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.



136. Kolmion sivujen pituudet ovat 59, 46 ja 78. Määritä kolmion suurin kulma asteen kymmenyksen tarkkuudella.
137. Kolmiosta mitattin sen sivujen pituuksiksi 17,3 cm, 9,8 cm ja 13,6 cm. Määritä kolmion pienin kulma.

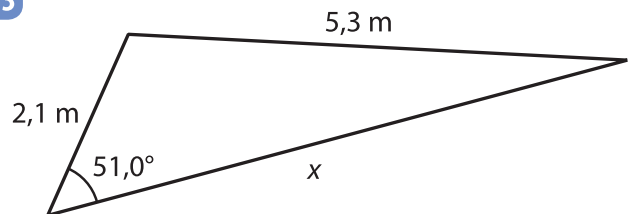
138. Laske kolmion sivun pituus x .



139. Veneilijä ajaa ensin 3,7 meripeninkulmaa länteen ja sen jälkeen 2,9 meripeninkulmaa kaakkoon. Kuinka kauas lähtöpistettä hän päätyy?
140. Suunnistaja lähti 1350 m päässä olevalle rastille suuntaan, joka poikkesi 4° rastin suunnasta. Kuinka kaukana rastista suunnistaja oli juostuaan suoraan 1350 m? [yo pitkä s1997]

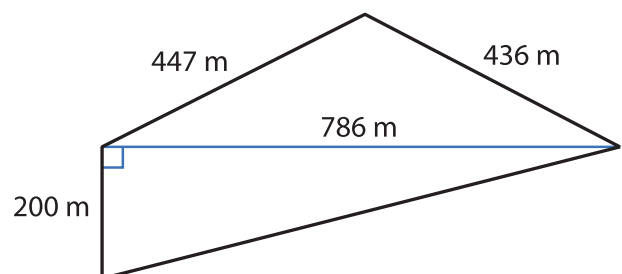
141. Kolmion kahden sivun pituudet ovat 5,0 cm ja 14,0 cm sekä kolmion pinta-ala $27,9 \text{ cm}^2$. Laske kolmion kolmannen sivun pituus.

142. Määritä oheisesta kolmiosta sivun pituus x .

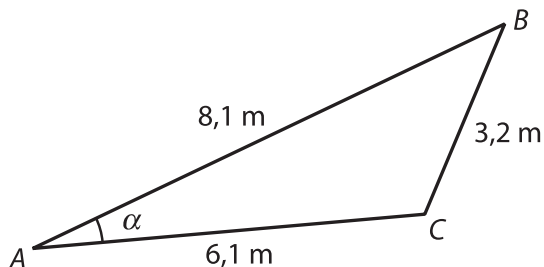


143. Tasaisesti viettävän rinteeseen kaltevuuskulma on $9,0^\circ$. Rinteessä kasvanut pystysuora mänty katkesi 3,5 metrin korkeudelta ja latvaosa taittui ylärinteeseen osuen 5,3 metrin päähän tyvestä irtoamatta tyvi-osasta. Laske männyn pituus.
144. Veneilijä osti uuden kompassin ja unohti tarkistaa kompassin antaman suunnan paikkansapitävyyden. Hän ajoi lähtöpisteestään $12,3$ meripeninkulmaa kompassisuuntaan 137° ja huomasi tulleen väärän saaren rantaan $2,1$ meripeninkulman päähän tavoitteena olleesta Juuriluodosta. Kuinka monta astetta oli kompassilukeman virhe? Lähtöpisteen etäisyys Juuriluodosta on $11,9$ meripeninkulmaa.

145. Laske oheisen metsäpalstan pinta-ala.



146. Määritä kulma α .



147. Kolmion kaksi sivua ovat 12,0 m ja 9,0 m. Kolmion pinta-ala on $27,0 \text{ m}^2$. Laske kolmion kolmannen sivun pituus.
148. Mäen laelta näkyy kaksi linkkimastoa. Toiseen on kartan mukaan matkaa 2,4 km ja toiseen 6,3 km. Suuntimakompassin mukaan mastojen väli näkyy 15° kulmassa. Mikä on mastojen välinen etäisyys?
149. Kolmion sivut ovat $\sqrt{2}$, 2 ja 3.
 a) Määritä kolmion pienin kulma asteen kymmenyksen tarkkuudella.
 b) Onko kolmio suorakulmainen?
150. Kolmion sivujen pituudet ovat $\sqrt{3}a$, $\sqrt{5}a$ sekä $2\sqrt{2}a$.
 a) Määritä kolmion pienin kulma asteen kymmenyksen tarkkuudella.
 b) Onko kolmio suorakulmainen?
151. Suunnikkaan sivujen pituudet ovat 3,4 m ja 7,2 m. Suunnikkaan eräs kulma on 38° . Laske suunnikkaan pidemmän lävistäjän pituus.

152. Robinson istuu rannalla ja katselee Palmuluotoa, johon on matkaa 9,4 km. Kun hän kääntää katsetaan 32° oikealle, hän näkee majakan. Kuinka kaukana majakka on Robinsonista, jos Palmuluodon ja majakan välimatka on 5,8 km?

153. Kun retkeilijä katsoo rinteessä olevaa pystysuoraa mastoa alarinteen puolelta 37,0 metrin päästä maan pinnan tasalta, hän näkee maston huipun $30,3^\circ$ rinteen yläpuolella. Kun hän katsoo mastoa ylärinteen puolelta niinikään 37,0 metrin päästä maan pinnan tasalta, hän näkee huipun $40,4^\circ$ rinteen yläpuolella. Laske maston korkeus.

154. Merellä on kolme saarta, joilla on kalastajatorpat Ruttula, Takkula ja Pottula. Ruttulan ja Pottulan välisen suoran reitin pituus on 5,3 km, tällä reitillä tosin on pieni Kiviluoto, joka on aina kierrettävä varoen. Kiviluodolta on 2,0 km matka Takkulaan. Pottulan ja Takkulan 2,4 km pituinen väli näkyy Kiviluodolta katsottaessa 73° kulmassa.
 a) Missä kulmassa Pottulan ja Takkulan väli näkyy Ruttulasta katsottaessa?
 b) Kuinka pitkä matka on Ruttulasta Takkulaan?

155. Osoita kosinilauseen $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ paikkansapitävyys, kun kulma γ on terävä.

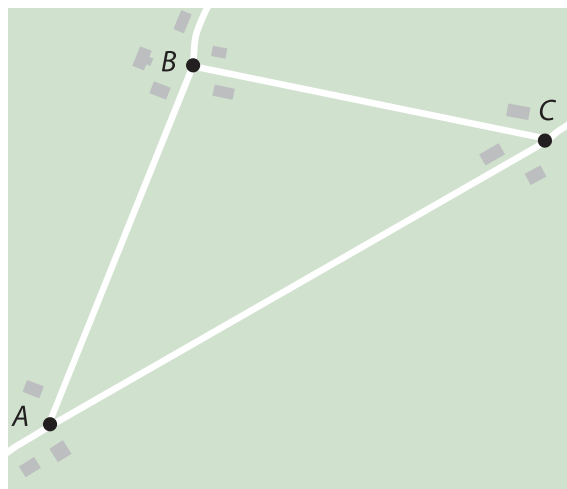
3.4 Kolmioon liittyviä lauseita

TUTKIMUS



Karttaan on merkitty kylät A , B ja C sekä niiden väliset tiet AB , BC ja AC . Kylien käyttöön aiotaan rakentaa vesitorni. Tutki geometriaohjelman avulla, miten löydät piirtämällä vesitornin rakennuspaikan, kun sen tulee olla yhtä kaukana

- a) kaikista kolmesta kylästä
- b) kyliä yhdistävistä teistä.



Kulmanpuolittajalause

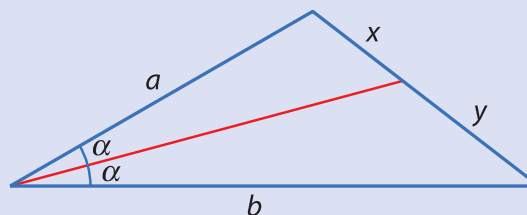
Kaikille kolmioille on voimassa seuraava lause.

Kulmanpuolittajalause

Lause

Kolmion kulmanpuolittaja jakaa vastaisen sivun viereisten sivujen suhteessa.

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$$



Kolmion kulmanpuolittaja on jana, joka jakaa kulman kahteen yhtä suureen osaan.

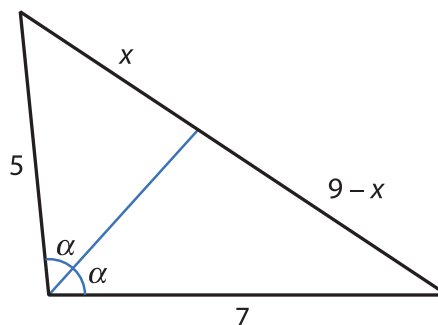
Todistus on harjoitustehtävänä 175.

ESIMERKKI 1

Kolmion sivujen pituudet ovat 5, 7 ja 9. Kuinka pitkiin osiin kolmion suurimman kulman puolittaja jakaa vastaisen sivun?

RATKAISU

Kolmion suurin kulma on pisimmän sivun vastainen kulma. Kulmanpuolittaja jakaa pisimmän sivun kahteen osaan. Merkitään näiden osien pituuksia x ja $9 - x$.



Muodostetaan yhtälö kulmanpuolittajalauseen perusteella.

$$\frac{x}{9-x} = \frac{5}{7}$$

$$7x = 5(9-x)$$

$$7x = 45 - 5x$$

$$12x = 45 \quad | :12$$

$$x = \frac{45}{12} = 3\frac{3}{4}$$

Vastainen sivu jakautuu viereisten sivujen suhteessa.

Yhtälön voi ratkaista myös laskimella.

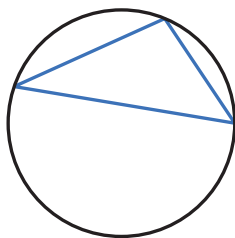
Vastaisen sivun toisen osan pituus on $9 - x = 9 - 3\frac{3}{4} = 5\frac{1}{4}$. Suurimman kulman vastainen sivu jakautuu osiin, joiden pituudet ovat $3\frac{3}{4}$ ja $5\frac{1}{4}$.

VASTAUS

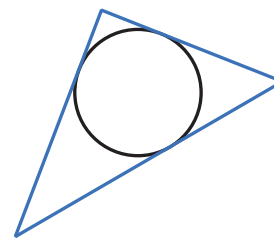
$$3\frac{3}{4} \text{ ja } 5\frac{1}{4}$$

Kolmion merkilliset pisteet

Jokaiseen kolmioon liittyy erityiset pisteet, joita kutsutaan kolmion merkillisiksi pisteiksi. Näiden tutkimista varten on sovittava seuraavaa:



Kolmion ympäri piirretty ympyrä kulkee kolmion kaikkien kärkien kautta.



Kolmion sisään piirretty ympyrä sivuaa kolmion kaikkia sivuja.

Kulmanpuolittajan jokainen piste on yhtä etäällä kulman molemmista kyljistä.

Janan keskinormaali on suora, joka kulkee janan keskipisteen kautta ja on kohtisuorassa janaa vastaan.

Keskinormaalin jokainen piste on yhtä etäällä janan molemmista päätepisteistä.

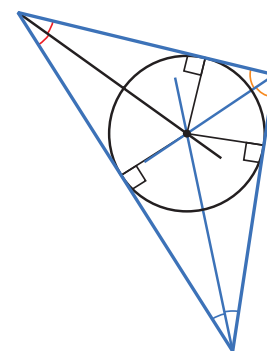
Mediaani eli keskijana yhdistää kolmion kärjen sen vastaisen sivun keskipisteeseen.

Jokainen tasapaksusta materiaalista valmistettu tasokuvio voidaan asettaa vaakatasoon tukemalla se ainoastaan painopisteestään.

Kolmion merkilliset pisteet

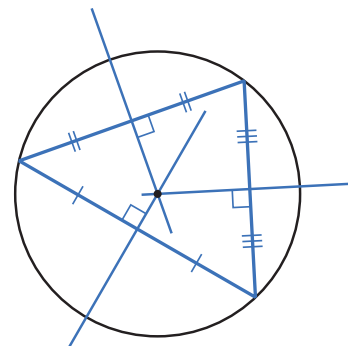
Kulmanpuolittajien leikkauspiste

Kolmion kulmanpuolittajat leikkaavat pisteessä, joka on kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste.



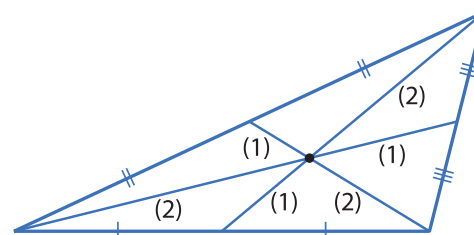
Keskinormaalien leikkauspiste

Kolmion sivujen keskinormaalit leikkaavat toisensa pisteessä, joka on kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste.



Mediaanien leikkauspiste

- Kolmion mediaanit leikkaavat samassa pisteessä.
- Mediaanien leikkauspiste jakaa mediaanit suhteessa 2 : 1 kärjestä lukien.
- Mediaanien leikkauspiste on kolmion painopiste.

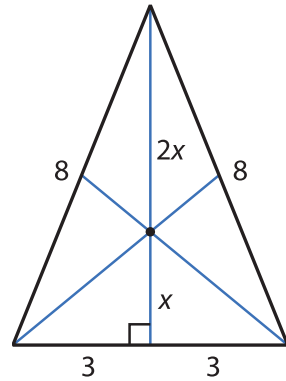


ESIMERKKI 2

Tasakylkisen kolmion kanta on 6,0 cm ja kyljet 8,0 cm. Määritä kolmion painopisteen etäisyys huippukulman kärjestä.

RATKAISU

Huipusta kannalle kulkeva mediaani jakaa tasakylkisen kolmion kahteen suorakulmaiseen kolmioon. Painopiste jakaa tämän mediaanin suhteessa 2 : 1 kärjestä lukien.



Muodostetaan yhtälö Pythagoraan lauseen avulla käyttäen kuvan merkintöjä ja ratkaistaan kysytty etäisyys $2x$.

$$8^2 = 3^2 + (3x)^2$$

$$64 = 9 + 9x^2$$

$$9x^2 = 55$$

$$x^2 = \frac{55}{9}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{55}{9}} = \pm 2,47\dots$$

Korkeusjanan pituus on
 $x + 2x = 3x$.

Yhtälön voi ratkaista myös
laskimella.

Etäisyys x on positiivinen, joten saadaan $x = 2,47\dots$ cm. Kysytty painopisteen etäisyys kolmion huippukulman kärjestä on

$$2x = 2 \cdot 2,47\dots = 4,94\dots \approx 4,9 \text{ (cm)}.$$

VASTAUS

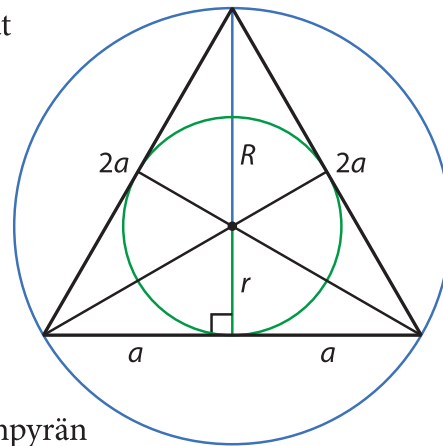
4,9 cm



Määritä tasasivuisen kolmion sisään ja ympäri piirrettyjen ympyröiden säteet, kun kolmion sivun pituus on $2a$.

RATKAISU

Tasasivuisen kolmion mediaanit ovat samalla kolmion kulmanpuolittajia, kolmion korkeusjanoja ja kolmion sivujen keskinormaaleja. Siis tasasivuisen kolmion sisään ja ympäri piirrettyjen ympyröiden keskipisteet yhtyvät ja sijaitsevat mediaanien leikkauspisteessä. Merkitään sisään piirretyn ympyrän sädettä kirjaimella r ja ympäri piirretyn ympyrän sädettä kirjaimella R .



Mediaanien leikkauspiste jakaa mediaanit suhteessa $2 : 1$ kärjestä lukien, joten $R = 2r$. Muodostetaan yhtälö Pythagoraan lauseen avulla.

$$(2a)^2 = (R + r)^2 + a^2$$

Sijoitetaan $R = 2r$.

$$4a^2 = (3r)^2 + a^2$$

$$4a^2 = 9r^2 + a^2$$

$$3a^2 = 9r^2$$

$$r^2 = \frac{\cancel{3}^1 a^2}{\cancel{9}_3} = \frac{a^2}{3}$$

$$r = \pm \sqrt{\frac{a^2}{3}} \quad | \quad r > 0$$

$$r = \sqrt{\frac{a^2}{3}}$$

$$r = \frac{|a|}{\sqrt{3}} \quad | \quad a > 0$$

$$r = \frac{1}{\sqrt{3}} a$$

Kolmion ympäri piirretyn ympyrän säteeksi saadaan $R = 2r = \frac{2}{\sqrt{3}} a$.

VASTAUS

Sisään piirretyn ympyrän säde on $\frac{1}{\sqrt{3}} a$ ja ympäri piirretyn ympyrän säde on $\frac{2}{\sqrt{3}} a$.

Harjoitustehtäviä

Sarja I

156. Kolmion sivujen pituudet ovat 6, 12 ja 16. Kuinka pitkiin osiin kolmion pienimmän kulman puolittaja jakaa vastaisen sivun?
157. Tasakylkisen kolmion kylkien pituus on 14 ja kannan pituus 10. Kuinka pitkiin osiin kantakulman puolittaja jakaa vastaisen kyljen?
158. Tasakylkisen kolmion kylkien pituus on 14 ja kannan pituus 10. Määritä kolmion painopisteen etäisyys huippukulman kärjestä.
159. Määritä suorakulmaisen kolmion painopisteen etäisyys pienimmän kulman kärjestä. Kolmion kateettien pituudet ovat 6 ja 8.
160. Piirrä geometriaohjelmalla kolmio, jonka sivujen pituudet ovat 7, 9 ja 13. Määritä piirtämällä kolmion a) sisään b) ympäri piirretyn ympyrän säde yhden desimaalin tarkkuudella.
161. Piirrä geometriaohjelmalla suorakulmaisen kolmio, jonka kateettien pituudet ovat 6 ja 8. Määritä piirtämällä kolmion painopisteen etäisyys hypotenuusasta yhden desimaalin tarkkuudella.

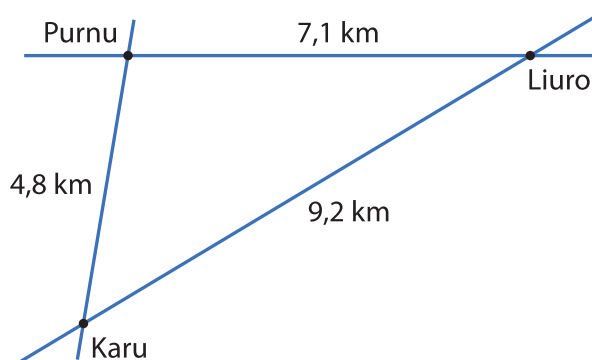
162. a) Piirrä geometriaohjelmalla tasasivuinen kolmio sekä sen sisään ja ympäri piirretyt ympyrät ja kolmion mediaanit. Mitä havaitset?



- b) Tutki, mitä tapahtuu edellä piirretyn kolmion sisään ja ympäri piirrettyjen ympyröiden keskipisteille ja kolmion painopisteelle, kun kolmio muutetaan tasakylkiseksi kolmioksi niin, että kannan pituus lyhenee puoleen ja sekä kannan keskipiste että huippu säilyvät alkuperäisillä paikoillaan.

163. Sinilause voidaan täydentää muotoon $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$, jossa R on kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde. Määritä tämän avulla kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän säde, kun tiedetään, että kolmion eräs kulma on $38,0^\circ$ ja tämän kulman vastaisen sivun pituus on 13,6 cm.

164. Kolme kylää, Purnu, Karu ja Liuro, suunnittelevat yhteisen vesitornin rakentamista. Määritä geometriaohjelman avulla vesitornin paikka kartalla, kun tornin pitää olla yhtä kaukana a) kaikista kylistä b) kyliä yhdistävistä suorista teistä.



165. Osoita, että kolmion mediaani puolittaa kolmion alan.

- 166.** Suorakulmaisen kolmion kateettien pituudet ovat 15 ja 20. Määritä kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde.
- 167.** Suorakulmaisen kolmion ympäri piirretyn ympyrän säteen pituus on 7. Määritä kolmion hypotenuusan pituus.
- 168.** Totea piirtämällä geometriaohjelmalla, että  kolmion korkeusjanat tai niiden jatkeet leikkaavat toisensa samassa pisteessä.
- 169.** Kolmion sivujen pituudet ovat 4,0; 6,0 ja 8,0. Määritä geometriaohjelman avulla kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde. Tarkista tulos laskemalla käyttäen tehtävässä 163 annettua kaavaa.
- 170.** Tasasivuisen kolmion sivun pituus on 6.  Määritä
- kolmion painopisteen etäisyys kolmion kärjestä
 - kolmion sisään piirretyn ympyrän säde
 - kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde.
- 171.** Määritä tasakylkisen kolmion sisään piirretyn ympyrän säde, kun kolmion kylkien pituus on 10 ja kannan pituus 8.
- 172.** Tasakylkisen kolmion kannan pituus on puolet kyljen pituudesta. Määritä kolmion sisään piirretyn ympyrän säteen tarkka arvo, kun kannan pituus on $2a$.
- 173.** Kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste P on ympyrän sivulla. Osoita, että kolmio on suorakulmainen.
- 174.** Määritä laskemalla suorakulmaisen kolmion painopisteen etäisyys hypotenuusasta. Kolmion kateettien pituudet ovat 6 ja 8.
- 175.** Todista kulmanpuolittajalause: Kolmion kulmanpuolittaja jakaa vastaisen sivun viereisten sivujen suhteessa.



4

Ympyrä

Tässä luvussa kerrataan ympyrän ominaisuuksia, lasketaan ympyrään liittyviä pituuksia ja pinta-aloja sekä tutkitaan ympyrään liittyvien kulmien suhteita.

4.1 Peruskäsitteitä

TUTKIMUS



- 1) Piirrä säännöllinen kuusikulmio ja lävistäjä, joka kulkee kuusikulmion keskipisteen kautta. Mittaa kuusikulmion piirin ja lävistäjän pituudet. Laske piirin pituuden suhde lävistäjän pituuteen.
- 2) Piirrä ympyrä, joka kulkee kuusikulmion kärkipisteiden kautta. Mittaa ympyrän kehän ja halkaisijan pituudet. Laske kehän pituuden ja halkaisijan pituuden suhde.
- 3) Tarkastellaan säännöllistä monikulmiota, jossa on parillinen määrä kärkiä. Tutki, kuinka monta sivua tässä monikulmiossa tulee vähintään olla, jotta sen piirin pituuden ja sen keskipisteen kautta kulkevan lävistäjän pituuden suhde olisi yhden desimaalin tarkkuudella sama kuin ympyrän kehän pituuden ja halkaisijan pituuden suhde.



Ympyrän piirtäminen geometriaohjelmalla

Ympyrä voidaan piirtää geometriaohjelmalla neljällä tavalla:

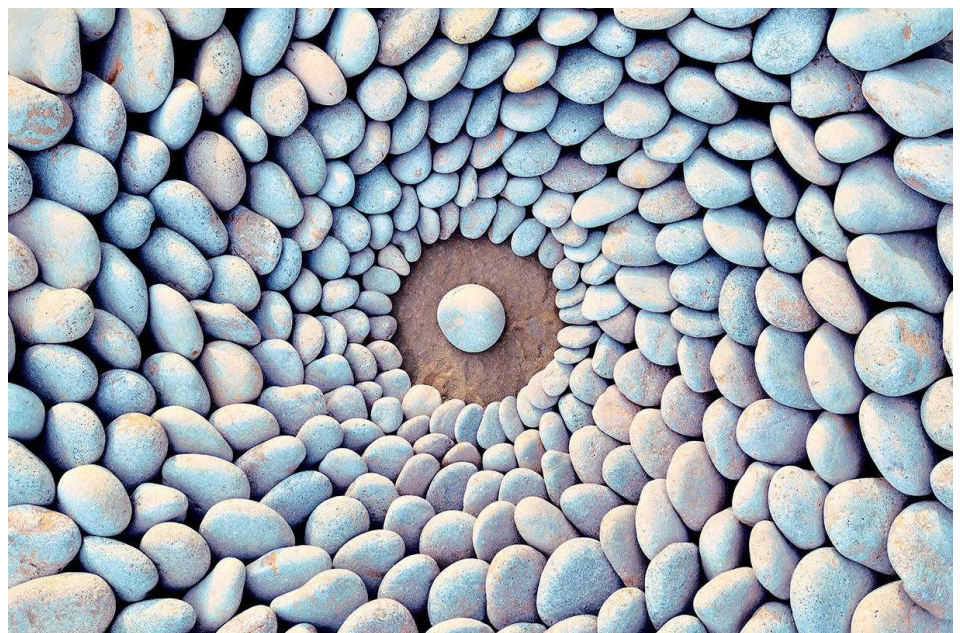
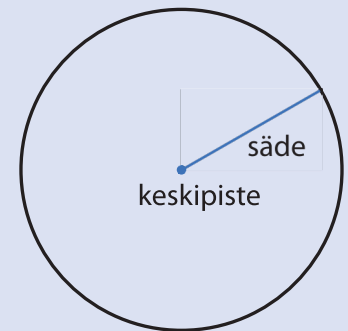
- Valitaan ensin keskipiste, sitten jokin kehän piste.
- Valitaan ensin keskipiste ja sitten annetaan säteen pituus.
- Valitaan kolme ympyrän kehällä olevaa pistettä.
- Valitaan säteen pituinen jana tai kaksi pistettä, joiden etäisyys on ympyrän säde ja sitten ympyrän keskipiste.

Ympyrä

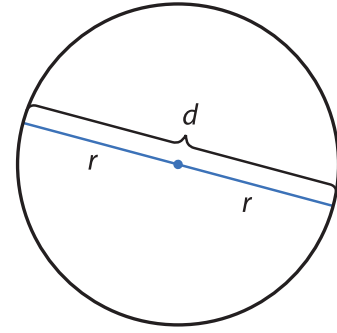
Määritelmä

Ympyrä muodostuu niistä tason pisteistä, jotka ovat samalla etäisyydellä kiinteästä pisteestä. Kiinteää pistettä kutsutaan ympyrän *keskipisteeksi* ja etäisyyttä ympyrän *säteeksi*.

Jos säde olisi nolla, niin ympyrä kutistuisi vain keskipisteeksi. Koska pistettä ei määritellä ympyräksi, niin säteen tulee olla positiivinen.



Halkaisija on ympyrän keskipisteen kautta kulkeva jana, joka yhdistää ympyrän kaksi pistettä. Halkaisijan pituus on kaksinkertainen verrattuna säteen pituuteen.



Ympyrän sädettä merkitään usein kirjaimella r (radius) ja halkaisijaa kirjaimella d (diameter).

Kreikkalainen Arkhimedes 287–212 eaa pystyi osoittamaan ympyrän ympäri ja sisään piirrettyjen 96-sivuisten monikulmioiden avulla, että luvun π arvo on lukujen $\frac{22}{7}$ ja $\frac{223}{71}$ välillä.

Vasta 1700-luvun lopulla pystyttiin osoittamaan, että luku π on irrationaaliluku. Nykyisin on luvun π desimaaleja pystytty laskemaan tietokoneiden avulla $13,3 \cdot 10^{12}$ kappaletta.

Kaikki ympyrät ovat yhdenmuotoisia, joten ympyrän kehän pituuden p ja halkaisijan d suhde ei riipu ympyrän koosta vaan suhde on vakio. Tätä vakiota merkitään kreikkalaisella kirjaimella π (pii).

$$\pi = \frac{p}{d}$$

Luku π on irrationaaliluku, jonka desimaalimuoto on päättymätön ja jaksoton.

$$\pi = 3,14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288\ 41971\ 693\dots$$

Luvun π määritelmästä seuraa, että ympyrän kehän pituus eli piiri p on luvun π ja ympyrän halkaisijan d tulo. Kehän pituus voidaan laskea myös säteen r avulla, koska $d = 2r$.

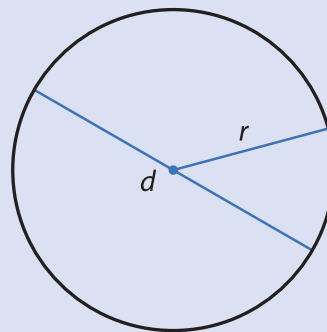
Ympyrän kehän pituus

Lause

Jos ympyrän halkaisija on d ja säde r , niin kehän pituus

$$p = \pi d \text{ eli}$$

$$p = 2\pi r.$$



ESIMERKKI 1

Matilla on polkupyörässään laskuri, joka laskee eturenkaan pyörähdysten lukumäärän. Kuinka pitkän matkan Matti ajoi, kun eturengas pyörähti 2384 kertaa? Eturenkaan ulkohalkaisija on 28 tuumaa.

RATKAISU

1 tuuma on 2,54 cm eli
1" = 2,54 cm

Määritetään renkaan halkaisijan pituus metreinä.

$$d = 28 \cdot 2,54 \text{ cm} = 71,12 \text{ cm} = 0,7112 \text{ m}$$

Lasketaan renkaan kehän pituus.

$$p = \pi d = \pi \cdot 0,7112 = 0,7112\pi \text{ (m)}$$

Laskutehtävissä luvun π arvo
saadaan laskimesta.

Lasketaan matkan pituus.

$$\begin{aligned} s &= 2384 \cdot p \\ &= 2384 \cdot 0,7112 \cdot \pi \\ &= 5326,57... \text{ (m)} \end{aligned}$$

Sijoitetaan $p = 0,7112\pi \text{ (m)}$.

Matin ajaman matkan pituus on $5326,57... \text{ m} \approx 5,3 \text{ km}$.

VASTAUS

5,3 km



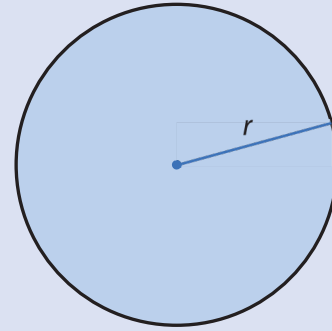
Ympyrän rajaaman tasoalueen pinta-alaa kutsutaan ympyrän pinta-alaksi. Ympyrän pinta-ala lasketaan ympyrän säteen avulla.

Ympyrän pinta-ala

Lause

Jos ympyrän säde on r ,
niin ympyrän pinta-ala

$$A = \pi r^2.$$



ESIMERKKI 2



Helikopterin laskeutumispaikka on ympyrän muotoinen ja sen pinta-ala on 720 m^2 . Määritä laskeutumisalueen halkaisija.

RATKAISU

Ympyrän pinta-ala $A = \pi r^2$. Toisaalta $A = 720 \text{ m}^2$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan säde r .

$$\begin{aligned}\pi r^2 &= 720 & | : \pi \\ r^2 &= \frac{720}{\pi} \\ r &= \pm \sqrt{\frac{720}{\pi}} = \pm 15,1387\dots\end{aligned}$$

Yhtälö voidaan ratkaista myös laskimella.

Koska säde on positiivinen luku, niin $r \approx 15,1387\dots$

Lasketaan halkaisijan pituus.

$$d = 2r = 2 \cdot 15,1387\dots = 30,2775\dots \approx 30 \text{ (m)}$$

Laskeutumisalueen halkaisija on 30 m.

VASTAUS

30 m

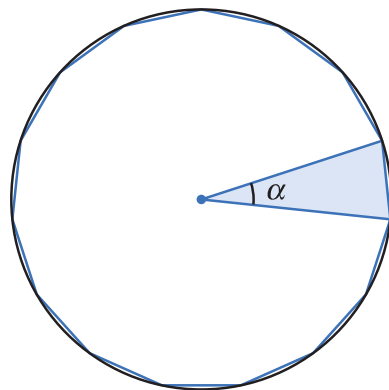
ESIMERKKI 3

Luvun π likiarvo voidaan määrittää arvioimalla ympyrän pinta-alaa sen sisään piirretyn säännöllisen monikulmion pinta-alan avulla. Laske luvun π kaksidesimaalinen likiarvo säännöllisen 15-kulmion pinta-alan avulla.

RATKAISU

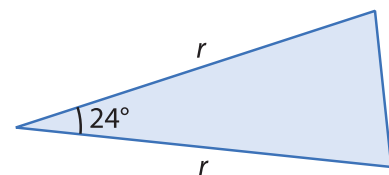
Piirretään 15-sivuinen säännöllinen monikulmio ja ympyrä, joka kulkee monikulmion kärkipisteiden kautta.

Ympyrällä ja 15-kulmiolla on yhteinen keskipiste. Keskipisteen etäisyys 15-kulmion kärkipisteistä on ympyrän säde. Kun monikulmion kärkipisteet yhdistetään keskipisteeseen, monikulmio jakaantuu 15 yhteneväksi kolmioksi. Nämä kolmiot ovat tasakylkisiä, kylkinä ympyrän säteet ja kantana monikulmion sivu. Huippukulman kärki on ympyrän keskipiste.



Kolmion huippukulma on viidestoista osa täydestä kulmasta.

$$\alpha = \frac{360^\circ}{15} = 24^\circ$$



Monikulmio muodostuu 15 yhtenevästä kolmiosta. Lasketaan monikulmion pinta-ala.

$$A = 15 \cdot \frac{1}{2} \cdot r \cdot r \sin 24^\circ = \frac{15}{2} \cdot r^2 \cdot \sin 24^\circ$$

Kolmion ala: $A = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$

Ympyrän pinta-ala on likimain yhtä suuri kuin 15-kulmion pinta-ala. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan luku π .

$$\pi r^2 \approx \frac{15}{2} \cdot r^2 \cdot \sin 24^\circ \quad \Big| : r^2 (> 0)$$

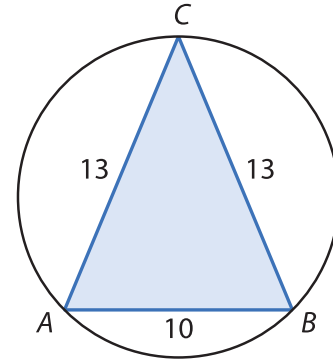
$$\pi \approx \frac{15}{2} \cdot \sin 24^\circ = 3,0505 \dots \approx 3,05$$

VASTAUS

$$\pi \approx 3,05$$

Tasakylkisen kolmion ABC kylkien pituus on 13 ja kannan pituus 10. Kolmion ympäri piirretään ympyrä, joka kulkee kolmion jokaisen kärjen kautta.

Kuinka monta prosenttia kolmion pinta-ala on ympyrän pinta-alasta?



RATKAISU

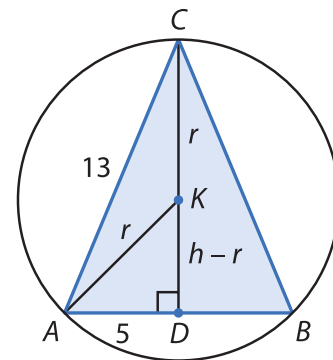
Kolmion kärjet ovat yhtä kaukana kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipisteestä, joten ympyrän keskipiste K on kolmion sivujen keskinormaalien leikkauspiste.

Tasakylkisen kolmion kantaa vasten piirretty korkeusjana on samalla kannan keskinormaali. Ympyrän keskipiste K on tällä korkeusjanelä.

Pisteen K etäisyys kolmion kärjistä on ympyrän säde r . Merkitään kolmion korkeusjanan CD pituutta kirjaimella h .

Koska kolmio ABC on tasakylkinen, kolmion korkeusjana CD puolittaa kannan AB .

Koska kolmio ADC on suorakulmainen, niin korkeusjanan pituus h voidaan ratkaista Pythagoraan lauseella.



$$5^2 + h^2 = 13^2$$

$$h^2 = 13^2 - 5^2$$

$$h^2 = 144$$

$$h = \pm\sqrt{144}$$

$$h = \pm 12$$

Koska kolmion korkeus on positiivinen, $h = 12$.

Kolmio ADK on suorakulmainen ja kateetin KD pituus on $|KD| = h - r = 12 - r$. Ratkaistaan r Pythagoraan lauseella.

$$\begin{aligned}5^2 + (12 - r)^2 &= r^2 \\5^2 + 12^2 + 2 \cdot 12 \cdot (-r) + r^2 &= r^2 \\25 + 144 - 24r &= 0 \\169 - 24r &= 0 \\r &= \frac{169}{24}\end{aligned}$$

Yhtälön voi ratkaista myös laskimella.

Lasketaan kolmion ABC pinta-ala A_k .

$$A_k = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 = 60$$

Kolmion ala on $\frac{1}{2}ah$.

Lasketaan ympyrän pinta-ala A_y .

$$A_y = \pi \cdot \left(\frac{169}{24}\right)^2$$

Ympyrän ala on πr^2 .

Lasketaan lopuksi pinta-alojen suhde.

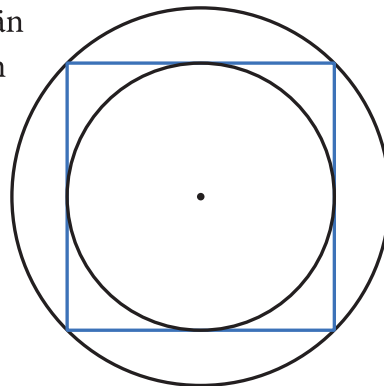
$$\frac{A_k}{A_y} = \frac{60}{\pi \left(\frac{169}{24}\right)^2} = 0,38516... \approx 0,38 = 38 \%$$

Kolmion pinta-ala on 38 % ympyrän pinta-alasta.

VASTAUS

38 %

- a) Laske neliön sisään piirretyn ympyrän säteen suhde neliön ympäri piirretyn ympyrän säteeseen.
- b) Ympyrän säde on R . Tämän ympyrän sisään piirretään neliö, jonka kärkipisteet ovat ympyrän kehällä. Tämän neliön sisään piirretään mahdollisimman suuri ympyrä, jonka sisään piirretään jälleen mahdollisimman suuri neliö. Näin jatketaan, kunnes ympyröitä on 10. Laske ympyröiden kehien pituuksien summa.

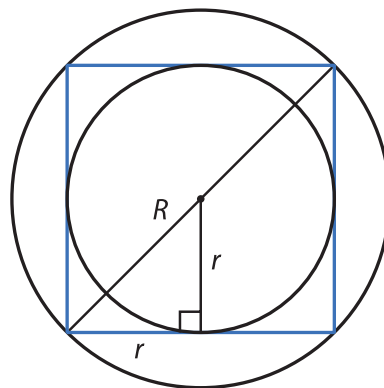


RATKAISU

- a) Merkitään neliön ympäri piirretyn ympyrän sädettä kirjaimella R ja sisään piirretyn ympyrän sädettä kirjaimella r .

Tavoitteena on laskea suhde $\frac{r}{R}$.

Neliön sisään piirretyn ympyrän säde on puolet neliön sivusta ja ympäri piirretyn ympyrän säde puolet neliön lävistäjästä.



Muodostetaan yhtälö Pythagoraan lauseen avulla ja ratkaistaan säteiden r ja R suhde.

$$r^2 + r^2 = R^2$$

$$2r^2 = R^2 \quad | : 2R^2$$

$$\frac{r^2}{R^2} = \frac{1}{2}$$

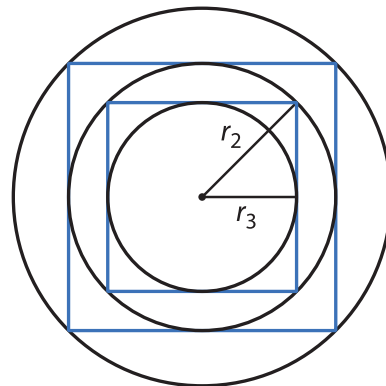
$$\left(\frac{r}{R}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{r}{R} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Koska säteet r ja R ovat positiivisia, saadaan $\frac{r}{R} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

- b) Ympyrät muodostavat jonon, jossa kahden peräkkäisen ympyrän yhdenmuotoisuussuhde on $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Siten ympyröiden säteet muodostavat geometrisen jonon

$$R, \frac{1}{\sqrt{2}}R, \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 R, \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 R, \dots$$



Ympyröiden kehien pituudet muodostavat myös geometrisen jonon:

$$2\pi R, 2\pi \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}R, 2\pi \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 R, 2\pi \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 R, \dots$$

Jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 2\pi R$ ja suhdeluku $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Koska ympyröitä piirretään 10, saadaan geometrinen summa, jossa termien lukumäärä $n = 10$.

Lasketaan ympyröiden kehien pituuksien summa.

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$$

$$S_{10} = 2\pi R \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{31\pi}{16 - 8\sqrt{2}} R$$

$a_1 = 2\pi R, q = \frac{1}{\sqrt{2}}, n = 10$

VASTAUS

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{31\pi}{16 - 8\sqrt{2}} R$

Harjoitustehtäviä

Sarja I

176. Laske ympyrän kehän pituus ja pinta-ala, kun ympyrän

- a) säde on 4,5 cm
b) halkaisija on 5,0 cm.

177. Matti haluaa mitata suoralta mökkitieltä

E1 200 metrin matkan. Hänellä on polkupyöränsä eturenkaassa laskuri, joka laskee renkaan pyörähdysten lukumäärän. Kuinka montaa pyörähdystä laskuri näyttää ajettaessa mökkitie päästä päähän? Renkaan ulkohalkaisija on 26" ja $1" = 2,54$ cm.

178. Pyörölän kaupunkia kiertää kaksi kehätietä, jotka ovat muodoltaan likimain samankeskisiä ympyröitä. Sisemmän kehätien pituus on 97 km. Laske ulomman kehätien pituus, kun teiden etäisyys toisistaan on 8,5 km.

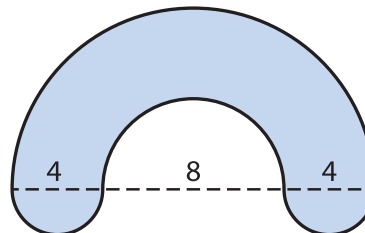
179. Ympyrän pinta-ala on 18 cm^2 . Laske ympyrän kehän pituus.

180. Elisa käveli metsälammen ympäri ja mittasi lammen piiriksi noin 270 metriä. Laske lammen pinta-ala hehtaareina.

181. Neliön sivun pituus on 5.

- E2**  a) Piirrä ympyrä, joka kulkee neliön kaikkien kärkipisteiden kautta.
 b) Laske ympyrän pinta-alan tarkka arvo.

182. Kuvio muodostuu puoliympyröistä kuvan mukaisesti. Laske väritetyn alueen piiri ja pinta-ala.



183. Säännöllisen kuusikulmion ympäri piirretään ympyrä. Kuinka monta prosenttia ympyrän pinta-ala on kuusikulmion pinta-alaa suurempi? Anna vastaus prosentin tarkkuudella.

184. Ympyrän sisään on piirretty mahdollisimman suuri tasakylkinen kolmio, jonka kannan pituus on 8. Laske kolmion kyljen pituuden tarkka arvo, kun ympyrän säde on 5 ja sen keskipiste on kolmion sisäpuolella.

185. Neliön sisään piirretään mahdollisimman suuri ympyrä, jonka sisään piirretään mahdollisimman suuri neliö ja edelleen tämän neliön sisään piirretään mahdollisimman suuri ympyrä, jonka sisään jälleen piirretään mahdollisimman suuri neliö. Näin jatketaan kunnes ympyröitä on 10 kappaletta. Laske ympyröiden pinta-alojen summa, kun ensimmäisen neliön sivun pituus on 32.

Sarja II

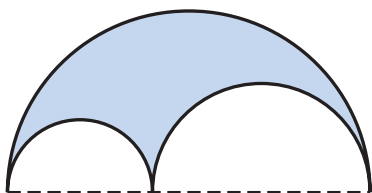
186. Maapallo, jonka säde on 6400 km, kiertää vuodessa kerran Auringon ympäri 150 miljoonan kilometrin etäisyydellä. Kuinka monessa minuutissa Maa kulkee halkaisijansa pituisen matkan? Maan kiertorataa voidaan pitää ympyränä. [yo lyhyt k1991]

187. Iiron pyörässä on digitaalinen matkamittari, joka syöttää ajatun matkan, kun siihen on syötetty renkaan ulkohalkaisija. Iiro syöttää vahingossa renkaan kooksi 28 tuumaa, kun oikea koko on 26 tuumaa. Mittarin mukaan Iiro oli ajanut 23,5 km. Kuinka pitkän matkan Iiro ajoi todellisuudessa?

188. Meteoriittikraatteriin syntynyt järvi on likimain ympyrän muotoinen. Järven halkaisija on 2,1 cm kartalla, jonka mittakaava on 1 : 400 000. Laske järven pinta-ala neliökilometreinä.

189. Neliön sivun pituus on a . Neliön sisään piirretään ympyrä, joka sivuaa neliön jokaista sivua. Kuinka monta prosenttia ympyrän pinta-ala on neliön pinta-alasta? Anna vastaus prosentin tarkkuudella.

190. Puoliympyrän sisään on piirretty kaksi pienempää puoliympyrää. Laske varjostetun kuvion piiri ja pinta-ala, kun pienempien puoliympyröiden säteet ovat 2 ja 3.

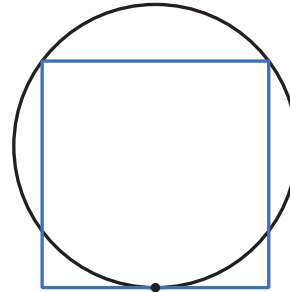


191. Suorakulmion sivujen pituudet ovat 6 cm ja 10 cm. Suorakulmion ympäri piirretään ympyrä, joka kulkee suorakulmion jokaisen kärjen kautta. Kuinka monta prosenttia ympyrän pinta-alasta on suorakulmion ulkopuolella?

192. Arkhimedes laski luvulle π likiarvon säännöllisen 96-kulmion avulla. Määritä luvun π kaksidesimaalinen likiarvo arvioimalla ympyrän
a) pinta-alaa **b)** piiriä ympyrän sisään piirretyn 96-sivuisen monikulmion avulla.

193. Ympyrä kulkee neliön kahden kärkipisteen kautta ja sivuaa neliön sivua sivun keskipisteessä kuvan mukaisesti.

- a)** Kumpi on pidempi, neliön vai ympyrän piiri? Kuinka monta prosenttia pidempi?
b) Kumpi on suurempi, neliön vai ympyrän pinta-ala? Kuinka monta prosenttia?



194. R -säteisen ympyrän sisään piirretään neljä samankokoista ympyrää, jotka sivuavat pareittain toisiaan sekä alkuperäistä ympyrää. Laske pienempien ympyröiden säde.

195. Paperirullan ulkohalkaisija on 12,0 cm ja sisähalkaisija 4,5 cm. Paperin paksuus on 0,1 mm. Paperikerrokset voidaan ajatella sisäkkäisiksi ympyröiksi.

- a)** Osoita, että paperikerrosten pituudet muodostavat aritmeettisen jonon.
b) Kuinka monta metriä rullassa on paperia. [yo lyhyt s1995 mukailtuna]

196. Kassakoneessa käytettävän kuittipaperirullan sisähalkaisija on 13 mm ja ulkohalkaisija 40 mm. Rullassa on paperia 19 m. Laske paperin paksuus.

197. Ympyrän sisään piirretään mahdollisimman suuri tasasivuinen kolmio, jonka sisään piirretään mahdollisimman suuri ympyrä ja edelleen tämän sisään piirretään mahdollisimman suuri ympyrä. Näin toistetaan kunnes ympyröitä on 12 ja kolmioita on 11. Laske kuinka monta prosenttia kolmioiden pinta-alojen summa on ympyröiden pinta-alojen summasta.

4.2 Ympyrän osia

TUTKIMUS

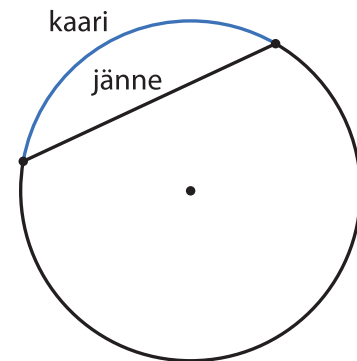
Tutki, kuinka monella tavalla voit jakaa ympyrän muotoisen pizzan suorilla viilloilla neljään pinta-alaltaan yhtä suureen osaan.

Kaari ja sektori

Jänne on jana, joka yhdistää ympyrän kaksi kehäpistettä.

Kaksi ympyrän pistettä jakaa ympyrän kehän kahteen *kaareen*.

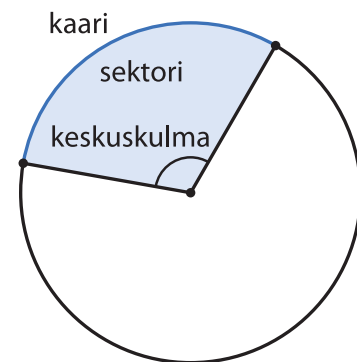
Halkaisija on jänne, joka kulkee ympyrän keskipisteen kautta.



Keskuskulma on ympyrän kahden säteen välinen kulma.

Kaaren asteluku on sitä vastaavan keskuskulman asteluku.

Ympyrän *sektori* on alue, jota rajoittavat kaksi sädettä ja niiden välinen kaari.



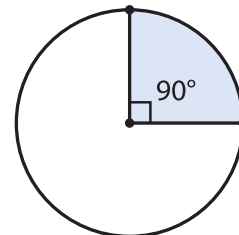
Kun kaaren päätepisteisiin piirretään ympyrän säteet, on kaaren suuntaan avautuva kulma *kaarta vastaava keskuskulma*.

ESIMERKKI 1

Ympyrän säde on 4,0 cm. Ympyrään on piirretty sektori, jonka keskuskulma on 90° . Laske kaaren pituus ja sektorin pinta-ala.

RATKAISU

Keskuskulma 90° on neljäsosa täydestä kulmasta 360° , joten sektorin kaaren pituus on neljäsosa ympyrän kehän pituudesta ja pinta-ala on neljäsosa ympyrän pinta-alasta.



Lasketaan kaaren pituus.

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 4,0 \\ &= 2\pi \\ &= 6,283\dots \approx 6,3 \text{ (cm)} \end{aligned}$$

Ympyrän kehän pituus on $2\pi r$.

Lasketaan sektorin pinta-ala.

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 4,0^2 \\ &= 4\pi \\ &= 12,56\dots \approx 13 \text{ (cm}^2\text{)} \end{aligned}$$

Ympyrän pinta-ala on πr^2 .

VASTAUS

Kaaren pituus on 6,3 cm ja sektorin pinta-ala 13 cm^2 .

Kun keskuskulma on puolet, kolmasosa, neljäsosa jne. täydestä kulmasta 360° , niin kaaren pituus on vastaavasti puolet, kolmasosa, neljäsosa jne. ympyrän kehän pituudesta ja sektorin pinta-ala ympyrän pinta-alasta.

Tämä päättely voidaan yleistää:

kun keskuskulma on suuruudeltaan α , niin

- kaaren pituus on $\frac{\alpha}{360^\circ}$ kertaa ympyrän kehän pituus ja
- sektorin pinta-ala on $\frac{\alpha}{360^\circ}$ kertaa ympyrän pinta-ala.

Kaaren pituus ja sektorin pinta-ala

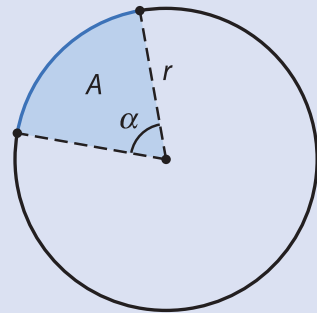
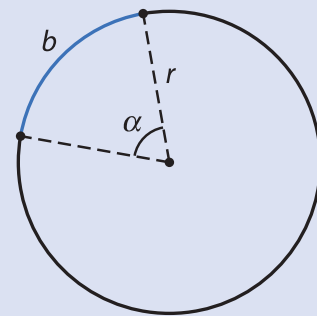
Lause

Jos ympyrän säde on r , keskuskulmaa α vastaavan kaaren pituus on

$$b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$$

ja keskuskulmaa α vastaavan sektorin pinta-ala on

$$A = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2.$$

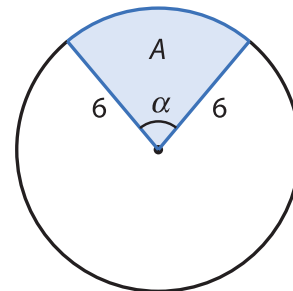


ESIMERKKI 2

Ympyrän säde on 6. Laske sektorin piiri, kun sektorin pinta-ala on 8π .

RATKAISU

Sektorin pinta-alan avulla voidaan määrittää keskuskulma α .
Tämän jälkeen voidaan laskea kaaren pituus.



Määritetään keskuskulma α .

$$\begin{aligned} A &= \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2 \\ 8\pi &= \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 6^2 & | : \pi \\ 8 &= \frac{\alpha}{\cancel{360^\circ}^{10^\circ}} \cdot \cancel{36} & | \cdot 10^\circ \\ \alpha &= 80^\circ \end{aligned}$$

$$A = 8\pi, r = 6$$

Yhtälön voi ratkaista myös laskimella.

Lasketaan kaaren pituus.

$$\begin{aligned} b &= \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r \\ &= \frac{80^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 6 \\ &= \frac{8}{3}\pi \end{aligned}$$

$$\alpha = 80^\circ, r = 6$$

Sektorin piiri muodostuu kaaresta ja kahdesta ympyrän säteestä.

Lasketaan piiri.

$$p = b + 2r = \frac{8}{3}\pi + 2 \cdot 6 = \frac{8}{3}\pi + 12.$$

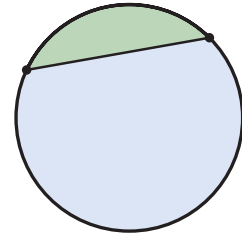
VASTAUS

$$\frac{8}{3}\pi + 12.$$

Segmentti

Segmentti on kaaren ja sitä vastaavan janteen rajoittama alue.

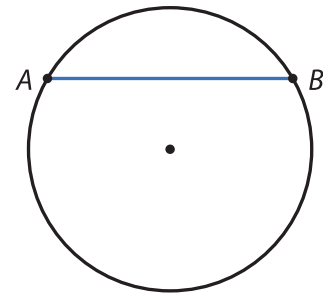
Jänne jakaa ympyrän kahteen segmenttiin.



Segmentin pinta-alan laskeminen	
Kun ympyrän keskipiste on segmentin ulkopuolella, segmentin pinta-ala lasketaan vähentämällä sektorin alasta säteiden ja janteen rajaaman tasakylkisen kolmion ala.	
Kun ympyrän keskipiste on segmentin sisällä, segmentin pinta-ala lasketaan lisäämällä sektorin alaan säteiden ja janteen rajaaman tasakylkisen kolmion ala.	

ESIMERKKI 3

Pisteet A ja B jakavat ympyrän kehän suhteessa $1 : 2$. Kuinka monta prosenttia janteen AB rajaaman pienemmän segmentin pinta-ala on suuremman segmentin pinta-alasta? Anna vastaus yhden prosenttiyksikön tarkkuudella.



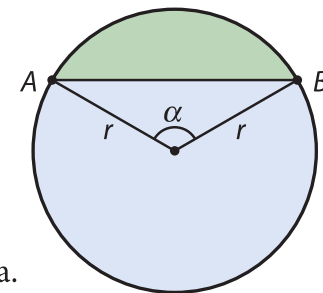
RATKAISU

Koska pisteiden A ja B välisten kaarien pituuksien suhde on $1 : 2$, niin lyhyemmän kaaren pituus on kolmasosa ympyrän kehän pituudesta.

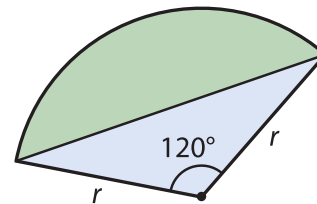
Merkitään ympyrän sädettä kirjaimella r ja lyhyempää kaarta vastaava keskuskulmaa kirjaimella α .

Koska kaaren pituus on kolmasosa ympyrän kehän pituudesta, niin kaarta vastaava keskuskulma on kolmasosa täydestä kulmasta.

$$\alpha = \frac{1}{3} \cdot 360^\circ = 120^\circ$$



Pienemmän segmentin pinta-ala saadaan, kun 120° asteen keskuskulmaa vastaavan sektorin alasta vähennetään tasakylkisen kolmion ala.

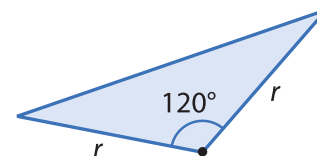


Lasketaan sektorin pinta-ala.

$$A_s = \frac{120^\circ}{360^\circ} \cdot \pi r^2 = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2$$

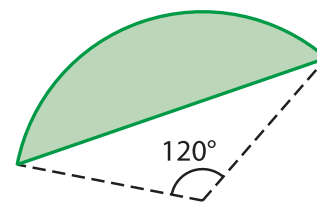
Lasketaan kolmion pinta-ala.

$$A_k = \frac{1}{2} \cdot r \cdot r \cdot \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} r^2$$



Lasketaan pienemmän segmentin pinta-ala.

$$\begin{aligned} A_1 &= A_s - A_k \\ &= \frac{1}{3} \pi r^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} r^2 \\ &= \left(\frac{1}{3} \pi - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) r^2 \end{aligned}$$



Suuremman segmentin pinta-ala saadaan, kun ympyrän alasta vähennetään pienemmän segmentin pinta-ala.

$$\begin{aligned} A_2 &= \pi r^2 - \left(\frac{1}{3} \pi r^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} r^2 \right) \\ &= \pi r^2 - \frac{1}{3} \pi r^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} r^2 \\ &= \left(\frac{2}{3} \pi + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) r^2 \end{aligned}$$

Lausekkeen voi sieventää laskimella.

Lasketaan pienemmän segmentin pinta-alan suhde suuremman segmentin pinta-alan ja ilmoitetaan tulos prosentteina.

$$\begin{aligned} \frac{A_1}{A_2} &= \frac{\left(\frac{1}{3} \pi - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \cancel{r^2}}{\left(\frac{2}{3} \pi + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \cancel{r^2}} \\ &= \frac{\frac{1}{3} \pi - \frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{2}{3} \pi + \frac{\sqrt{3}}{4}} \\ &= 0,396... \approx 40 \% \end{aligned}$$

VASTAUS

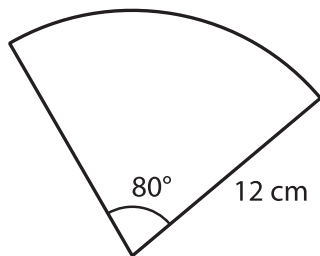
40 %

Harjoitustehtäviä

Sarja I

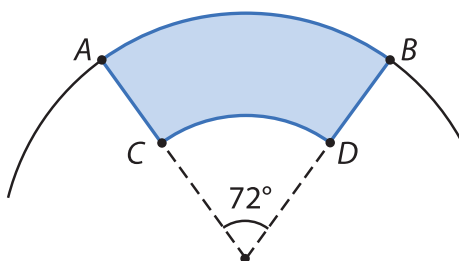
198. Ympyrä, jonka säde on 5, jaetaan viideksi yhtä suureksi sektoriksi. Laske yhden sektorin
- keskuskulman suuruus
 - kaaren pituus
 - pinta-ala.

199. Laske sektorin piiri ja pinta-ala.

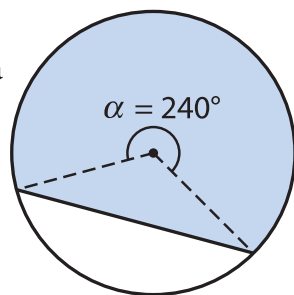


200. Sektorin pinta-ala on $1,0 \text{ m}^2$ ja säde 1,5 m. Määritä sektorin keskuskulma.

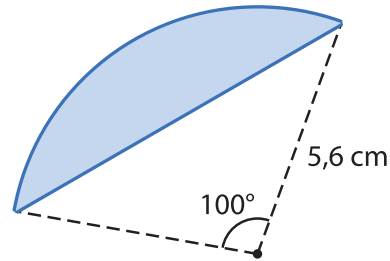
201. Laske ympyräkaarten AB ja CD rajoittaman alueen pinta-ala, kun ympyrän säde on 12 cm ja $|CA| = |DB| = 5,0 \text{ cm}$.



202. Ympyrän säde on 8,0 cm ja segmenttiä rajaavan kaaren asteluku on 240° . Laske segmentin pinta-ala.



203. Laske segmentin piiri ja pinta-ala.



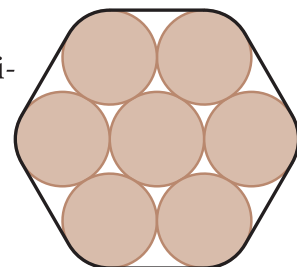
204. Urheilukentälle on viivoilla merkitty ympyräsektorin muotoinen alue, jonka keskuskulma on $30,0^\circ$ ja sivut 90,0 m. Toimitsija kiertää alueen ympäri kulkien sen ulkopuolella metrin päässä reunasta. Piirrä kuvio toimitsijan reitistä ja määritä reitin pituus. [yo lyhyt k1997]

205. Lotta jakaa ympyrän muotoisen pizzan kahdella yhdensuuntaisella viillolla kolmeksi viipaleeksi siten, että jokaisessa pizzaviipaleessa on yhtä paljon reunaa. Laske viipaleiden pinta-alat, kun pizzan halkaisija on 28 cm.

206. Segmenttiä vastaavan janteen pituus on 8,0 cm ja janteen keskipisteen kohtisuora etäisyys kaaresta on 2,5 cm. Määritä ympyrän säteen pituus piirtämällä kuva geometriaohjelmalla ja tekemällä tarvittavat mittaukset. Osoita tulos oikeaksi laskemalla.

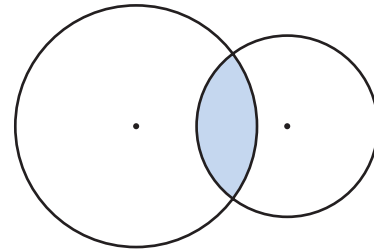
Sarja II

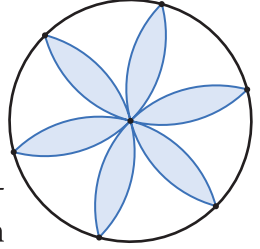
207. Seitsemän mäntytukkia sidotaan vaijerilla alla olevan poikkileikkauskuvion mukaisesti. Kuinka paljon vaijeria tarvitaan yhteen kierrokseen? Jokaisen tukin halkaisija on 20 cm. Anna vastaus senttimetrin tarkkuudella. [yo lyhyt k2014]



- 208.** Tasasivuisen kolmion kärki keskipisteinä piirretään ympyrä, jonka säde on kolmion korkeusjanan pituinen. Kuinka monta prosenttia kolmion pinta-alasta on ympyrän ulkopuolella, kun kolmion sivun pituus on 8.
- 209.** Ympyräsektorin piirin pituus on yhtä suuri kuin ympyrän kehän pituus. Määritä sektorin keskuskulma asteen tarkkuudella.
- 210.** Turun ja Tukholman välille suunnitellaan tunnelin rakentamista. Tunneli kulkisi meren alla ja olisi täysin suora. Kuinka pitkä tunneli olisi, kun Turun ja Tukholman välinen Maan pintaa pitkin mitattu etäisyys on 265 km ja maapallon säde on 6370 km.
- 211.** Pisteet A ja B jakavat ympyrän kehän suhteessa 1 : 7. Kuinka monta prosenttia pienemmän segmentin pinta-ala on koko ympyrän pinta-alasta? Anna vastaus prosentin kymmenyksen tarkkuudella.
- 212.** Ympyräsegmenttiä vastaavan jänteen pituus on 12,0 cm ja kaaren suurin etäisyys jänteestä on 5,0 cm. Laske ympyrän säteen pituus sekä kaaren asteluku.
- 213.** Tasaiseen pehmeään hiekkaan pudonneesta pallosta oli jäänyt ympyränmuotoinen kuoppa, jonka halkaisija oli 18,6 cm ja syvyys 5,8 cm. Laske pallon halkaisijan pituus.
- 214.** Osoita, että sektorin pinta-ala voidaan laskea kaavalla $\frac{br}{2}$, jossa r on ympyrän säde ja b sektorin rajaama ympyrän kaari.

- 215.** Ympyröiden säteet ovat 8,0 cm ja 6,0 cm. Ympyröiden keskipisteiden välinen etäisyys on 10,0 cm. Laske ympyröiden rajoittaman yhteisen alueen pinta-ala.



- 216.** Kukka muodostuu kuudesta ympyränkaaresta, joiden säde on sama kuin alkuperäisen ympyrän. Kaarten keskipisteet ovat alkuperäisen ympyrän ja piirrettyjen kaarten leikkauspisteitä. Kuinka monta prosenttia kuusiterälehtisen kukan pinta-ala on ympyrän pinta-alasta?
- 
- 217.** Tarinan mukaan Egyptissä asunut Eratosthenes (n. 276–194 eaa) tutki maapallon kaarevuutta mittaamalla auringon säteiden ja pystysuoran suunnan välistä kulmaa kahdessa eri paikassa samalla hetkellä. Kevätpäivänseisauksena keskipäivän auringon säteet osuivat syvän kaivon pohjaan Syenessä. Samaan aikaan 5000 stadionin matkan päässä Aleksandriassa auringon säteiden tulokulma poikkesi pystysuorasta suunnasta viideskymmenesosan täydestä kulmasta. Laske tämän perusteella arvio Maan ympärysmitalle, kun käytetään mitana egyptiläistä stadionia, joka on 157 m.

4.3 Ympyrään liittyviä kulmia

TUTKIMUS

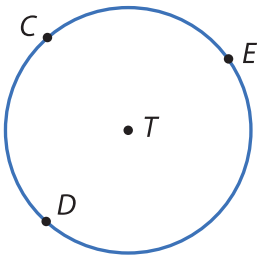


- 1) Piirrä ympyrä, jonka keskipiste on K ja joka kulkee pisteen A kautta.

- Piirrä säde KA .
- Piirrä suora, joka kulkee pisteen A kautta ja on sädettä KA vastaan kohtisuorassa. Kuinka monta yhteistä pistettä on piirretyllä suoralla ja ympyrällä?
- Siirrä pistettä A pitkin ympyrän kehää. Mitä havaitset?

- 2) Piirrä ympyrä ja merkitse sen ulkopuolelle piste B .

- Piirrä pisteen B kautta suora, joka sivuaa ympyrää yhdessä pisteessä. Kuinka monta tällaista suoraa voit piirtää?
- Piirrä sivuamispisteeseen ympyrän säde. Kuinka suuri on säteen ja suoran välinen kulma?
- Siirrä pistettä B . Mitä havaitset?



- 3) Piirrä ympyrä, jonka keskipiste on T . Sijoita ympyrän kehälle pisteet C , D ja E .

- Piirrä kulmat CTD ja CED . Vertaa kulman CTD suuruutta kulman CED suuruuteen.
- Siirrä kulman kärkipistettä C pitkin ympyrän kehää. Mitä havaitset?

- 4) Siirrä kohdan 3 ympyrässä pistettä D siten, että jänteestä CD tulee ympyrän halkaisija.

- Siirrä pistettä E pitkin ympyrän kehää ja seuraa kulman CED suuruutta. Mitä havaitset?

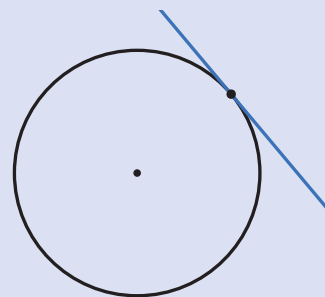
Ympyrän tangentti

Ympyrän tangentti

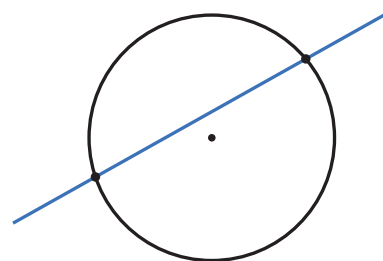
Määritelmä

Ympyrän *tangentti* on suora, joka sivuaa ympyrää.

Tangentilla ja ympyrällä on täsmälleen yksi yhteinen piste.



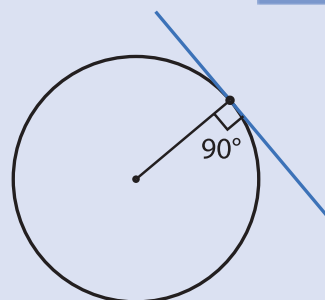
Suora, joka leikkaa ympyrän kahdessa pisteessä, on *sekantti*.



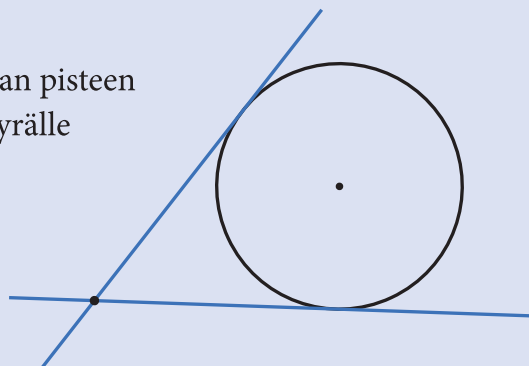
Tangentin ominaisuuksia

Lause

Tangentti on kohtisuorassa sivuamis-
pisteeseen piirrettyä sädettä vastaan



Ympyrän ulkopuolella olevan pisteen
kautta voidaan piirtää ympyrälle
kaksi tangenttia.





Helsingin Hakaniemessä sijaitsevan Ympyrätalon pohja on ympyrän muotoinen. Sara ja Onni yrittävät arvioida Ympyrätalon ympärysmittaa. He seisovat kohdassa, johon juuri ja juuri näkyy toisella puolella talon seinässä olevan mainoksen pystyreuna. He mittaavat askelten avulla tarkastelupisteensä etäisyyden mainoksen reunasta, ja saavat tulokseksi 60 m. He arvioivat talon näkyvän tarkastelupisteeseen 64 asteen kulmassa. Laske näiden tietojen perusteella Ympyrätalon ympärysmitta.

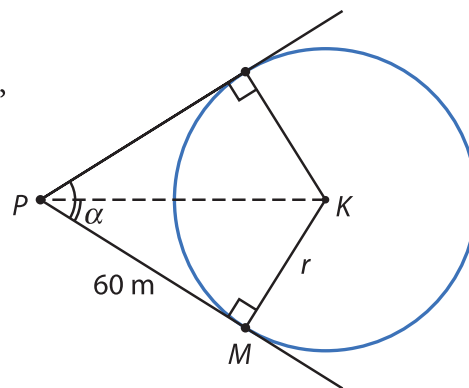
RATKAISU

Piirretään tilanteesta mallikuva ylhäältä päin.

Merkitään tarkastelupistettä kirjaimella P ja mainoksen reunan sijaintikohtaa kirjaimella M .

Kulma, jossa Ympyrätalo nähdään, on ympyrälle piirrettyjen tangenttien välinen kulma.

Piirretään säteet tangenttien sivuamispisteisiin.



Jana PK jakaa säteiden ja tangenttien muodostaman nelikulmion kahdeksi yhteneväksi suorakulmaiseksi kolmioksi. Tällöin jana PK puolittaa tangenttien välisen kulman. Merkitään kulman puolikasta kirjaimella α .

$$\alpha = \frac{64^\circ}{2} = 32^\circ$$

Ratkaistaan säde r suorakulmaisesta kolmiosta PMK .

$$\begin{aligned}\tan 32^\circ &= \frac{r}{60} \\ r &= 60 \tan 32^\circ = 37,492... \text{ (m)}\end{aligned}$$

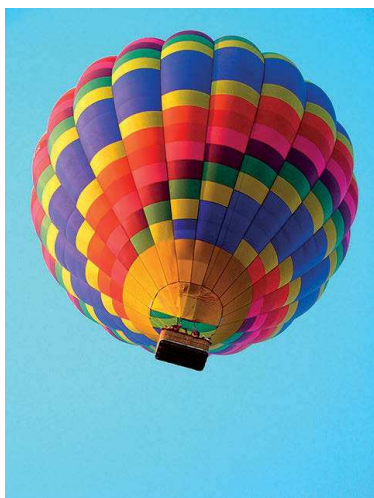
Lasketaan ympyrän piiri.

$$p = 2\pi \cdot 37,492... = 235,57... \approx 240 \text{ (m)}$$

Ympyrätalon ympärysmitaksi saatiin 240 m.

VASTAUS

240 m



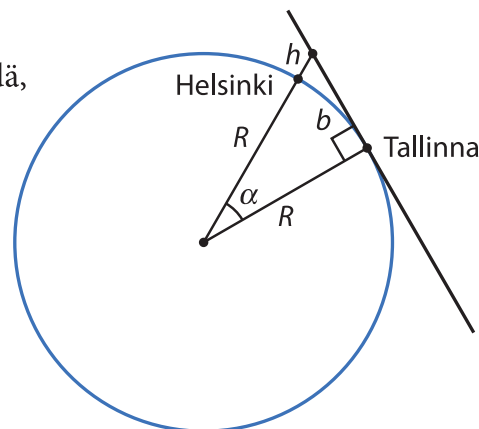
Kuinka korkealle kuumailmapallolla tulisi nousta Helsingin yläpuolelle, jotta voisi nähdä koko merialueen Helsingin ja Tallinnan välillä? Helsingin ja Tallinnan välinen etäisyys on 84 km ja maapallon säde on 6370 km.

RATKAISU

Tarkastellaan maapallon poikkileikkausympyrää, jonka kehälle merkitään Helsingin ja Tallinnan sijainti.

Merenpinnan etäisin kohta, joka kuumailmapallosta voidaan nähdä, on piste, jossa katselupisteestä maapallolle piirretty tangentti kohtaa maapallon pinnan.

Helsingin ja Tallinnan välinen etäisyys on maapallon poikkileikkausympyrän kaaren pituus $b = 84$ km. Merkitään tätä kaarta vastaavaa keskuskulmaa kirjaimella α .



Muodostetaan yhtälö ympyrän kaaren pituuden avulla ja ratkaistaan α .

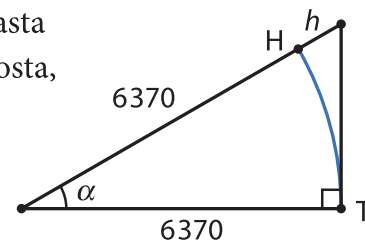
$$b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r \quad b = 84, \quad r = 6370$$

$$84 = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 6370$$

Ratkaistaan yhtälö laskimella.

$$\alpha = 0,75554\dots^\circ$$

Kuumailmapallon etäisyys h Maan pinnasta voidaan ratkaista suorakulmaisesta kolmiosta, jonka toinen kateetti on maapallon säde 6370 km ja hypotenuusa $h + 6370$ km.



Muodostetaan yhtälö keskuskulman α kosinin avulla.

$$\cos 0,75554\dots^\circ = \frac{6370}{6370 + h}$$

Ratkaistaan yhtälö laskimella.

$$h \approx 0,5536\dots \approx 0,55 \text{ (km)}$$

Kuumailmapallon on noustava 0,55 km = 550 m korkeuteen.

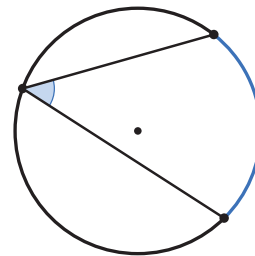
VASTAUS

550 m

Kulman kosini on sen viereisen kateetin suhde hypotenuusaan.

Kehäkulma

Kulma, jonka kärki on ympyrän kehällä ja jonka kyljet ovat ympyrän jäniteitä on *kehäkulma*.

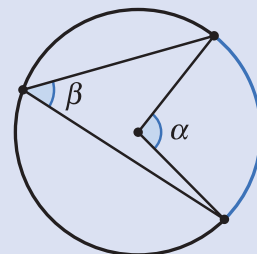


Kehäkulman suuruus

Kehäkulma β on puolet samaa kaarta vastaavasta keskuskulmasta α .

$$\beta = \frac{1}{2}\alpha$$

Lause

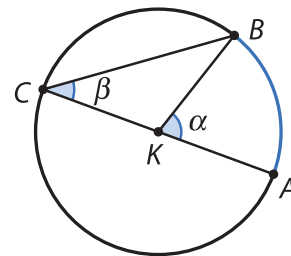


TODISTUS

Todistetaan lause aluksi erikoistapauksessa, jossa kehäkulman toinen kylki on ympyrän halkaisija.

Olkoon ympyrän keskipiste K , kaarta AB vastaava keskuskulma $\sphericalangle AKB = \alpha$ ja kehäkulma $\sphericalangle ACB = \beta$.

Osoitetaan, että $\beta = \frac{1}{2}\alpha$.



Kolmio CKB on tasakylkinen kolmio, jonka kyljet CK ja BK ovat ympyrän säiteitä. Kulmat β ja CBK ovat tämän kolmion kantakulmina yhtä suuret.

Tasakylkisen kolmion huippukulma CKB on kulman AKB vieruskulma, joten sen suuruus on $180^\circ - \alpha$.

Muodostetaan yhtälö kolmion CKB kulmien summasta ja ratkaistaan β .

$$\beta + \beta + (180^\circ - \alpha) = 180^\circ$$

Kolmion kulmien summa on 180° .

$$2\beta + 180^\circ - \alpha = 180^\circ$$

$$2\beta = \alpha$$

$$\beta = \frac{1}{2}\alpha$$

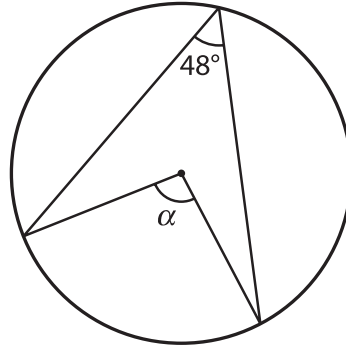
Siis keskuskulmaa α vastaava kehäkulma β on suuruudeltaan puolet keskuskulmasta. $\square$

Edellä esitetyn erikoistapauksen avulla voidaan osoittaa tuloksen pitävän paikkansa myös, kun kumpikaan kulman kyljistä ei ole ympyrän halkaisija. Tämä jätetään harjoitustehtäväksi (tehtävä 239).

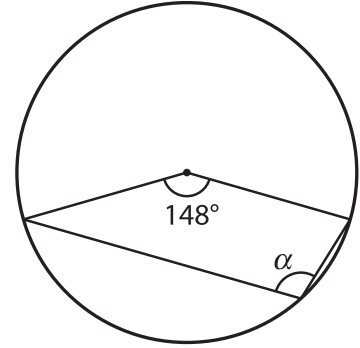
ESIMERKKI 3

Määritä kulma α .

a)



b)



RATKAISU

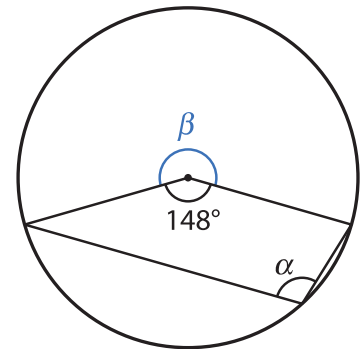
a) Kulmaa α vastaavan kehäkulman suuruus on 48° , joten $\alpha = 2 \cdot 48^\circ = 96^\circ$.

b) Kulmaa α vastaavan keskuskulman β suuruus on $360^\circ - 148^\circ = 212^\circ$.

$$\text{Tällöin } \alpha = \frac{1}{2} \cdot 212^\circ = 106^\circ.$$

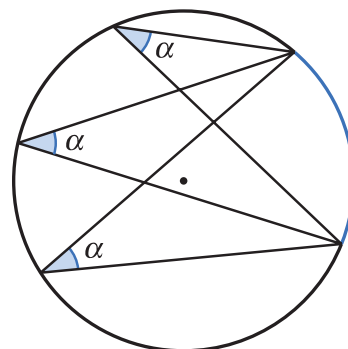
VASTAUS

a) $\alpha = 96^\circ$ b) $\alpha = 106^\circ$

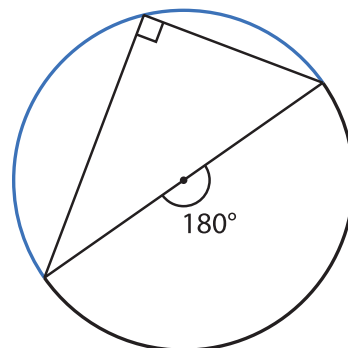


Kehäkulman suuruutta koskevan lauseen seurauksena saadaan kaksi tärkeää tulosta:

- 1) Samaa kaarta vastaavat kehäkulmat ovat yhtä suuria.



- 2) Puoliympyrän sisältämä kehäkulma on suora, koska vastaava keskuskulma on oikokulma, jonka asteluku on 180° .



ESIMERKKI 4

Pohjakasvrikartoitusta tekevä tutkimussukeltaja pulahtaa veteen pyöreän metsälammen rannassa. Hän ui ensin 150 metriä pohjoiseen kunnes tulee lammen rantaan. Tämän jälkeen hän ui 80 metriä länteen kunnes saapuu jälleen lammen rantaan. Määritä lammen halkaisija.

RATKAISU

Piirretään mallikuva. Sukeltaja lähtee pisteestä A , kääntyy pisteessä B ja saapuu rantaan pisteessä C .

Koska kehäkulman CBA suuruus on 90° , niin kaari ABC on puoliympyrä. Siis pisteiden A ja C välinen jana on ympyrän halkaisija.

Kolmio ABC on suorakulmainen. Halkaisijan AC pituus voidaan ratkaista Pythagoraan lauseella.

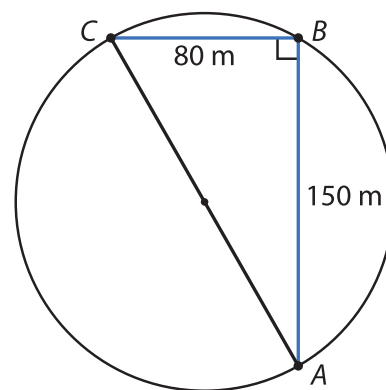
$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$$

$$|AC|^2 = 150^2 + 80^2$$

$$|AC|^2 = 28\,900$$

$$|AC| = \pm\sqrt{28\,900} = \pm 170 \text{ (m)}$$

$$|AB| = 150, |BC| = 80$$



Ympyrän halkaisijan pituus on positiivinen, joten $|AC| = 170$ metriä.

VASTAUS

170 m

ESIMERKKI 5

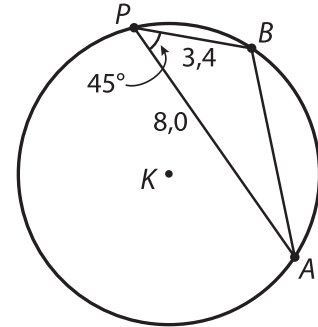
Ympyrän kehällä olevasta pisteestä P on piirretty kaksi jännettä, joiden pituudet ovat 8,0 cm ja 3,4 cm sekä niiden välinen kulma 45° . Laske ympyrän säde.

RATKAISU

Piirretään mallikuva ja käytetään kuvan merkintöjä.

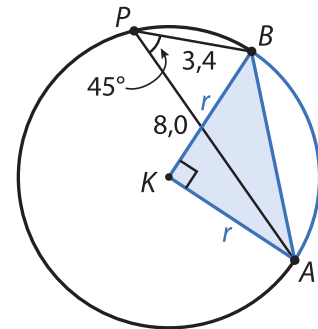
Yhdistetään jänneiden päätepisteet A ja B .

Muodostuu kolmio ABP .



Yhdistetään pisteet A ja B ympyrän keskipisteeseen K . Koska kehäkulman APB suuruus on 45° , niin sitä vastaava keskuskulman AKB suuruus on 90° .

Kolmio ABK on tasakylkinen suorakulmainen kolmio, jonka kylkinä ovat ympyrän säteet. Ympyrän säde r voidaan siis ratkaista Pythagoraan lauseella.



Lasketaan ensin jänteen AB pituuden neliö kolmiosta ABP kosinilauseen avulla.

$$\begin{aligned} |AB|^2 &= |AP|^2 + |BP|^2 - 2 \cdot |AP| \cdot |BP| \cos 45^\circ & |AP| &= 8,0; |BP| = 3,4 \\ |AB|^2 &= 8,0^2 + 3,4^2 - 2 \cdot 8,0 \cdot 3,4 \cdot \cos 45^\circ = 37,0933... \end{aligned}$$

Muodostetaan yhtälö Pythagoraan lauseen avulla kolmiosta ABK ja ratkaistaan r .

$$\begin{aligned} |AK|^2 + |BK|^2 &= |AB|^2 & |AK| &= |BK| = r \\ 2r^2 &= 37,0933... & |AB|^2 &= 37,0933... \\ r &= \pm \sqrt{\frac{37,0933...}{2}} = \pm 4,30658... \text{ (cm)} \end{aligned}$$

Koska säteen pituus on positiivinen, saadaan $r \approx 4,3$ cm.

VASTAUS

4,3 cm

Harjoitustehtäviä

Sarja

I

218. Ympyrälle piirretään kaksi tangenttia, jotka leikkaavat toisensa 50° asteen kulmassa. Tangenttien leikkauspisteen etäisyys ympyrästä on $13,3$ cm. Määritä ympyrän säde.

219. Piirrä geometriaohjelmalla ympyrä ja sille kaksi tangenttia, joiden välinen kulma on 60° . Piirrä ympyrän ja tangentin sivuamispisteisiin säteet. Mittaa säteen pituus ja ympyrän keskipisteen etäisyys tangenttien leikkauspisteestä. Laske säteen pituuden suhde tähän etäisyyteen.

220. Ympyrä, jonka säde on 12 cm, näkyy pisteestä P katsottuna 30° asteen kulmassa. Määritä pisteen P etäisyys ympyrän keskipisteestä.

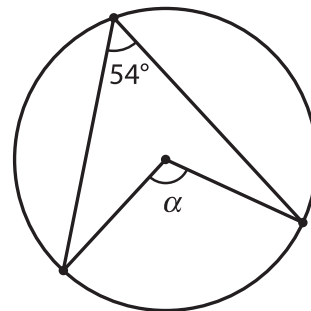
221. Turisti katsoo suoran kadun päässä olevaa pilvenpiirtäjää, jonka pohja on ympyrän muotoinen. Hän näkee rakennuksen vaakasuunnassa 16° asteen kulmassa. Kartan mukaan tarkastelupisteen suora etäisyys pilvenpiirtäjästä on 150 m. Laske pilvenpiirtäjän pohjan halkaisijan pituus.

222. Maapallon säde on 6370 km ja Kuun säde on 1737 km. Kuuta sanotaan superkuuksi silloin, kun se on täyden kuun aikaan ratansa Maata lähimmässä pisteessä. Laske sadan kilometrin tarkkuudella Kuun keskipisteen etäisyys maapallon keskipisteestä, kun superkuu näkyy Maan pinnalta $0,56^\circ$ asteen kulmassa.

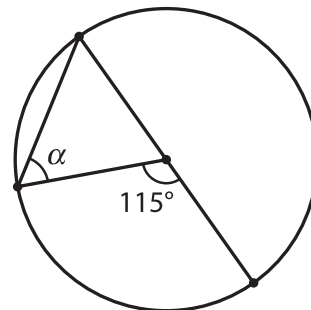
223. Teneriffalla sijaitsevan tulivuori Teiden korkeus merenpinnasta on 3718 metriä. Hyvissä olosuhteissa Teiden huipulta näkee juuri ja juuri Afrikan rannikolle. Kuinka monta kilometriä on Teiden lyhyin etäisyys Afrikasta? Maapallon säde on 6370 km.

224. Määritä kulma α .

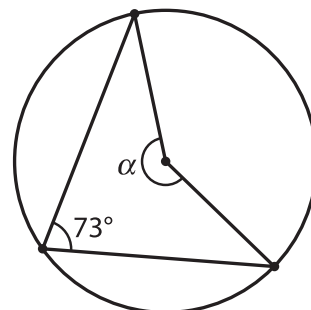
E3 a)



b)

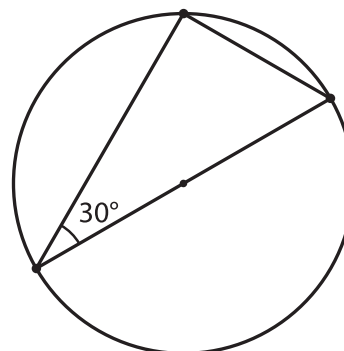


c)



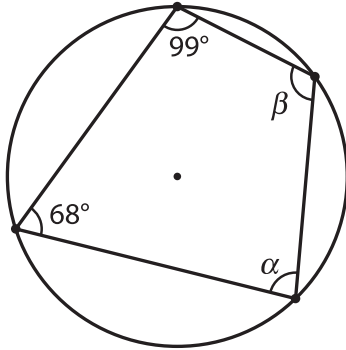
225. Laske kolmion pinta-ala, kun ympyrän säde on $5,0$ cm.

E4



226. Pyöreästä puukiekosta saatiin juuri ja juuri sahattua suorakulmion muotoinen juustotarjotin, jonka leveys oli 15,0 cm ja pituus 19,0 cm. Mikä oli puukiekon säde?

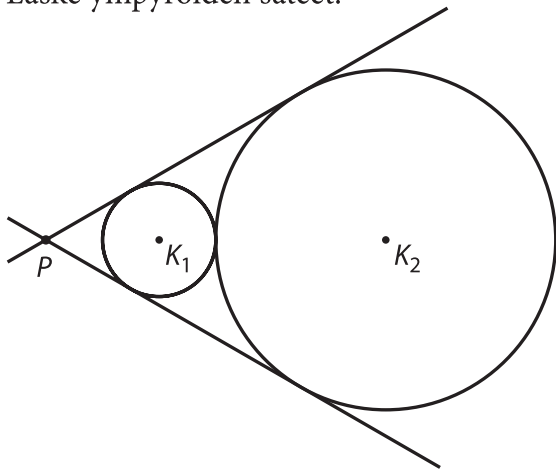
227. Määritä jännelikulmion kulmat α ja β .



228. Pyöreän mainostelineen kylkeen on kiinnitetty juliste, jonka leveys on 2,6 metriä. Mainostelineen halkaisija on 1,8 m. Voiko koko mainoksen nähdä 4 metrin etäisyydellä mainoksesta?

Sarja II

229. Ympyröille on piirretty pisteen P kautta yhteiset tangentit. Tangenttien välinen kulma on 60° . Pienemmän ympyrän keskipisteen K_1 etäisyys pisteestä P on 10. Laske ympyröiden säteet.

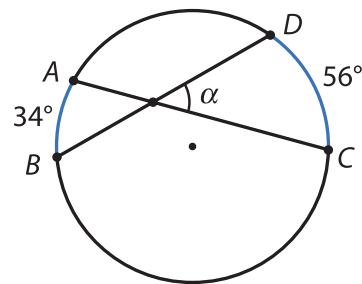


230. Kaksi kaupunkia sijaitsee merenlahden vastakkaisilla puolilla. Kaupunkien välinen etäisyys on 110 km. Toiseen kaupunkiin rakennetaan linkkitorni, jonka korkeus on 190 m. Kuinka korkea tulisi toiseen kaupunkiin rakennettavan tornin vähintään olla, jotta torneista olisi suora näköyhteys toisiinsa? Maapallon ympärysmitta on 40 000 km.

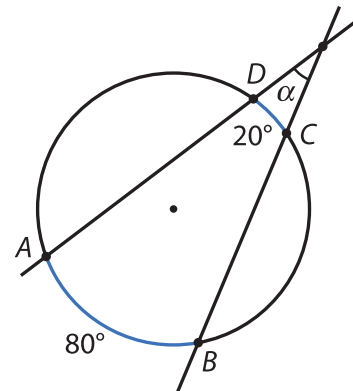
231. Nelikulmion kahden vierekkäisen kulman suuruudet ovat 40° ja 110° . Kuinka suuria kaksi muuta kulmaa ovat, kun nelikulmion ympäri voidaan piirtää ympyrä.

232. Määritä kulma α . Kuvaan merkitty kaaren asteluku tarkoittaa sitä vastaavan keskuskulman suuruutta.

a)



b)



233. Kalastaja istuu lammen rannalla kannon nokassa ja mittailee etäisyyksiä pitkulaisen saaren eri osiin. Hän pääättelee, että kannolta on matkaa saaren keskellä olevalle kiville puolet saaren pituudesta. Hän saa myös selville, että saaren päihin on matkaa 48 metriä ja 86 metriä.

a) Missä kulmassa kalastaja näkee saaren?

b) Mikä on saaren pituus?

234. Avaruusalus on Maan ja Kuun keskipisteitä yhdistävällä suoralla pisteessä, josta Maa ja Kuu näyttäivät yhtä suurilta eli ne näkyvät saman suuruisissa kulmissa. Laske avaruusaluksen etäisyys Maan pinnalta. Maan säde on 6370 km ja Kuun säde on 1737 km ja niiden keskipisteiden välinen etäisyys on 384 000 km.

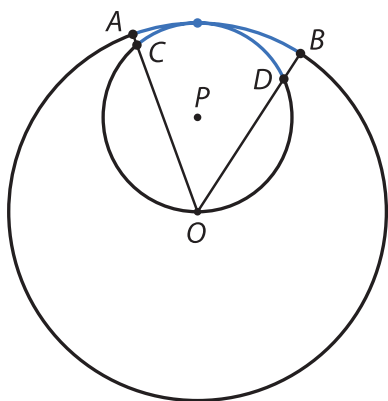
235. a) Tutki, voidaanko jokaisen suorakulmion ympäri piirtää ympyrä.



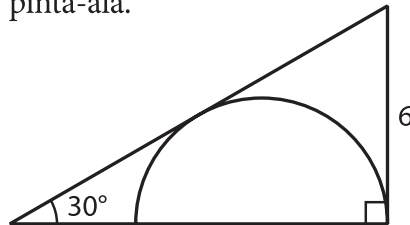
b) Tutki, voidaanko jokaisen suunnikkaan ympäri piirtää ympyrä.

c) Mikä ehto nelikulmion vastakkaisten kulmien suuruudella täytyy olla, jotta nelikulmion ympäri olisi mahdollista piirtää ympyrä?

236. P -keskinen ympyrä kulkee O -keskisen ympyrän keskipisteen kautta sekä sivuaa tätä ympyrää sisäpuolitse. Pisteestä O on piirretty suuremmalle ympyrällä kaksi sädettä OA ja OB , jotka leikkaavat P -keskisen ympyrän pisteissä C ja D . Osoita, että kaaret CD ja AB ovat yhtä pitkät. [yo pitkä k1930 mukailtuna]

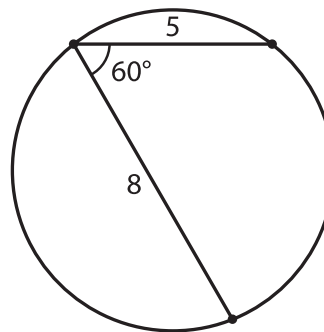


237. Suorakulmaiseen kolmioon on piirretty puoliympyrä, jonka halkaisija on pidemmällä kateetilla ja jonka toinen päätepiste on suoran kulman kärjessä. Kolmion lyhyemmän kateetin pituus on 6 ja toinen terävä kulma on 30° . Laske puoliympyrän pinta-ala.

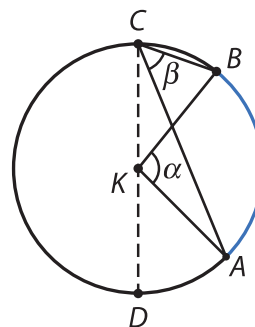
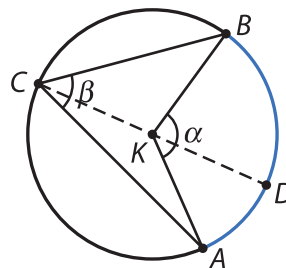


238. Laske ympyrän säteen pituus.

E5



239. Todista, että kehäkulma on puolet sitä vastaavasta keskuskulmasta myös tapauksessa, kun keskuskulman kylki ei ole osa kehäkulman kylkeä. Käytä todistuksessa apuna kuvan mukaisia apupiirroksia.

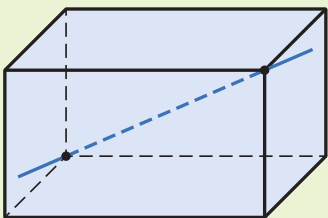


Tässä luvussa kerrataan ja syvennetään kolmiulotteisen geometrian taitoja. Aluksi tutkitaan avaruuteen muodostuvia kulmia. Sen jälkeen tarkastellaan kappaleita sekä niiden pinta-aloja ja tilavuuksia.

5.1 Kulma avaruudessa

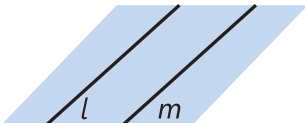
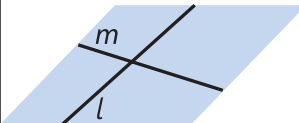
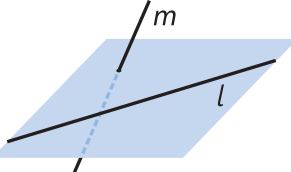
TUTKIMUS

- 1) Tutkitaan avaruussuoria.
 - a) Tutki kahden kynän avulla, leikkaavatko kaksi erisuuntaista avaruuden suoraa aina toisensa.
 - b) Miten määrittäisit kahden avaruuden suoran yhdensuuntaisuuden?
- 2) Tarkastellaan pahvilaatikkoa.
 - a) Mitkä laatikon sivutahkoista ovat keskenään yhdenmuotoisia ja mitkä kohtisuorassa toisiaan vastaan?
 - b) Miten laskisit pahvilaatikon pohjan lävistäjän pituuden?
 - c) Miten laskisit etäisyyden pahvilaatikon nurkasta vastakkaiseen, kaukaisimpaan nurkkaan?
 - d) Miten laskisit laatikon läpi nurkasta vastakkaiseen nurkkaan työnnetyn tikun ja laatikon pohjan välisen kulman?
- 3) Piirrä ruutupaperille kuutio, jonka sivun pituus on 4 cm. Voit käyttää piirtämisessä kavaljeeriperspektiiviä, jossa edessä ja takana olevat tahkot piirretään suorakulmioina oikeissa mittasuhteissa ja syvyys suunnassa kulkeva särmä piirretään 45 asteen kulmassa, ja särmän pituus on kuvassa puolet todellisesta vastaavasta pituudesta. Voit hyödyntää tietoa, että neliön muotoisen ruudun lävistäjä on 45 asteen kulmassa neliön sivuja vastaan ja pituudeltaan likimain 1,5-kertainen sivuun verrattuna.

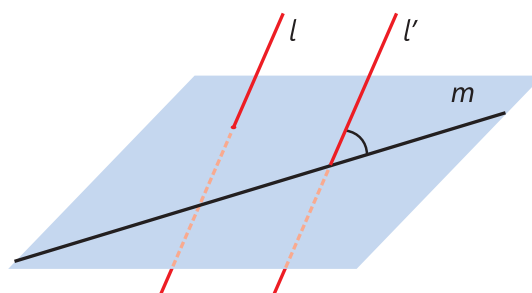


Avaruussuorien välinen kulma

Piste ja suora ovat avaruusgeometrian peruskäsitteitä. Kahden pisteen kautta voidaan piirtää täsmälleen yksi avaruussuora, joten kaksi pistettä määräävät avaruussuoran. Kaksi avaruussuoraa voivat olla yhdensuuntaisia, leikkaavia tai ristikkäisiä suoria.

Yhdensuuntaiset suorat	Leikkaavat suorat	Ristikkäiset suorat
Suorilla ei ole yhteisiä pisteitä tai suorat yhtyvät.  Suorien välinen kulma $\alpha = 0^\circ$.	Suorilla on yksi yhteinen piste.  Suorien välinen kulma α toteuttaa ehdon $0^\circ < \alpha \leq 90^\circ$.	Suorilla ei ole yhteisiä pisteitä.  Suorien välinen kulma α toteuttaa ehdon $0^\circ < \alpha \leq 90^\circ$.

Ristikkäisten suorien välinen kulma saadaan siirtämällä suoria niiden suunnat säilyttäen niin, että ne leikkaavat. Tämän jälkeen kulma on laskettavissa kuten leikkaavilla suorilla.

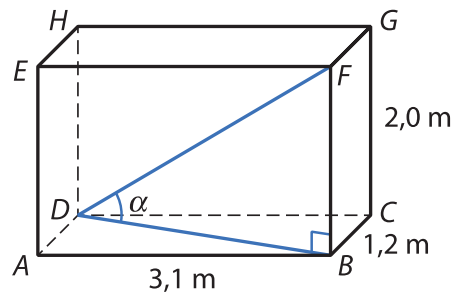


Avaruussuorien välinen kulma α toteuttaa aina ehdon $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$.

ESIMERKKI 1

Laske kuvan suorakulmaisen särmiön

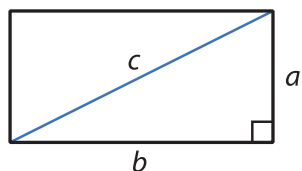
- pohjan lävistäjän DB pituus
- avaruuslävistäjän DF pituus
- lävistäjien DB ja DF välinen kulma asteen kymmenyksen tarkkuudella.



RATKAISU

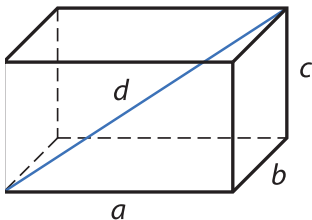
Pythagoraan lauseen mukaan suorakulmion lävistäjän pituuden neliö on sivujen pituuksien neliöiden summa:

$$c^2 = a^2 + b^2$$



Vastaavasti suorakulmaisen särmiön avaruuslävistäjän pituuden neliö on särmien pituuksien neliöiden summa:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$



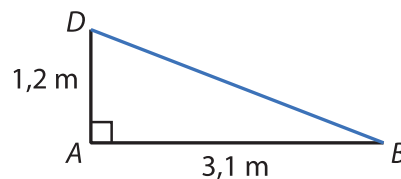
- Ratkaistaan pohjan lävistäjän DB pituus suorakulmaisesta kolmiosta ABD Pythagoraan lauseella.

$$|DB|^2 = |AB|^2 + |AD|^2$$

$$|DB|^2 = 3,1^2 + 1,2^2$$

$$|DB|^2 = 11,05$$

$$|DB| = \pm 3,32...(\text{m})$$



Pohjan lävistäjän pituus on positiivinen, joten $|DB| \approx 3,3 \text{ m}$.

- Ratkaistaan avaruuslävistäjän DF pituus suorakulmaisesta kolmiosta DBF Pythagoraan lauseella.

$$|DF|^2 = |DB|^2 + |BF|^2$$

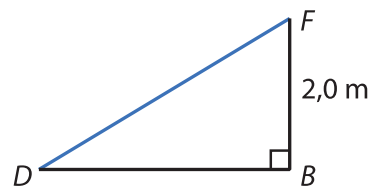
$$|DF|^2 = |AB|^2 + |AD|^2 + |BF|^2$$

$$|DF|^2 = 3,1^2 + 1,2^2 + 2,0^2$$

$$|DF| = \pm \sqrt{3,1^2 + 1,2^2 + 2,0^2}$$

$$|DF| = \pm 3,87...(\text{m})$$

$$|DB|^2 = |AB|^2 + |AD|^2$$



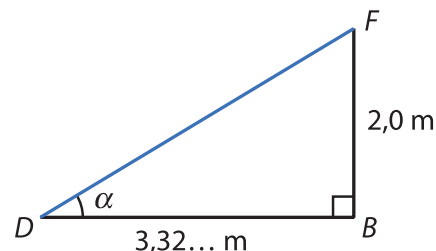
Avaruuslävistäjän pituus on positiivinen, joten $|DF| \approx 3,9 \text{ m}$.

- Ratkaistaan lävistäjien DB ja DF välinen kulma α suorakulmaisesta kolmiosta DBF .

$$\tan \alpha = \frac{2,0}{3,32...}$$

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{2,0}{3,32...}$$

$$= 31,03...^\circ \approx 31,0^\circ$$

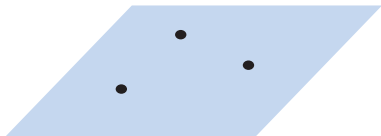
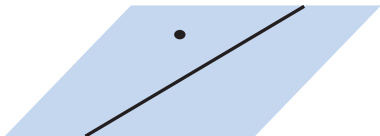
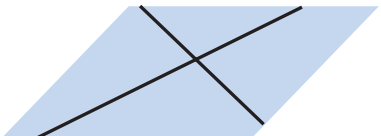
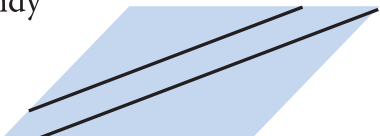


VASTAUS

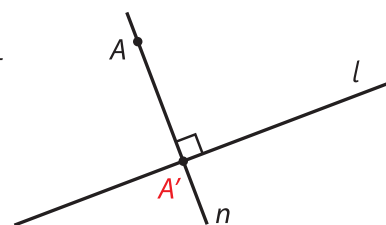
- 3,3 m
- 3,9 m
- 31,0°

Suoran ja tason välinen kulma

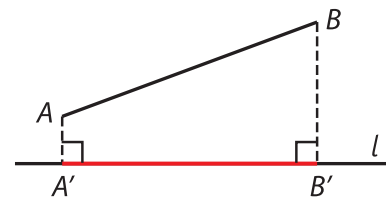
Pisteen ja suoran lisäksi taso on avaruusgeometrian peruskäsite.

Seuraavat tilanteet määräävät avaruuden tason yksikäsitteisesti	
kolme pistettä, jotka eivät ole samalla suoralla	suora ja sen ulkopuolinen piste
	
kaksi leikkaavaa suoraa	kaksi yhdensuuntaista suoraa, jotka eivät yhdy
	

Pisteen A kohtisuora projektio A' suoralla l on pisteestä A suoralle l piirretyn normaalin n ja suoran l leikkauspiste.

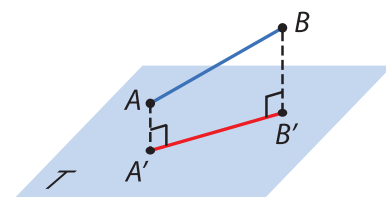


Janan AB kohtisuora projektio $A'B'$ suoralla l saadaan projisoimalla janan jokainen piste suoralle l .



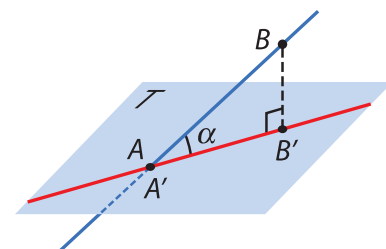
Pisteen A kohtisuora projektio A' tasolla T on pisteestä A tasolle piirretyn normaalin ja tason leikkauspiste.

Janan AB kohtisuora projektio $A'B'$ tasolla T saadaan projisoimalla janan jokainen piste tasolle.



Suoran AB kohtisuora projektiosuora $A'B'$ tasolla T saadaan projisoimalla suoran jokainen piste tasolle.

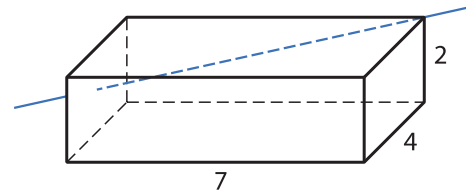
Suoran ja tason välinen kulma α tarkoittaa suoran ja sen tasolla olevan projektiosuoran välistä kulmaa.



Suoran ja tason välinen kulma α toteuttaa aina ehdon $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$.

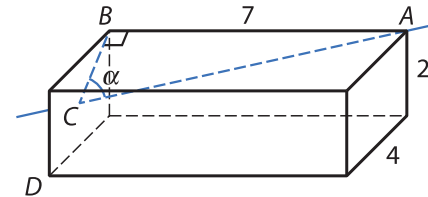
ESIMERKKI 2

Suora kulkee suorakulmaisen särmiön kärjen ja vastakkaisen päätytahkon keskipisteen kautta kuvan mukaisesti. Laske päätytahkon ja suoran välinen kulma asteen tarkkuudella.



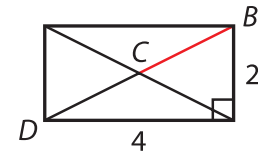
RATKAISU

Tehtävässä kysytty suoran ja päätytahkon välinen kulma on janan CA ja sen päätytahkolla olevan projektiojanan CB välinen kulma α . Kolmio ABC on suorakulmainen, joten kulma α voidaan ratkaista, kun kolmiosta tiedetään kaksi sivua.



Monikulmion keskipiste on yhtä kaukana sen kärjistä.

Lasketaan ensin sivun CB pituus. Päätytahkon lävistäjät leikkaavat toisensa päätytahkon keskipisteessä C , joten $|CB| = \frac{1}{2}|DB|$.



Lävistäjän DB pituus saadaan Pythagoraan lauseen avulla.

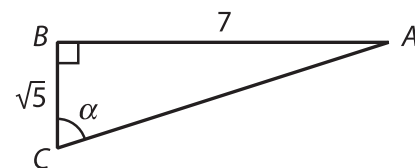
$$\begin{aligned} |DB|^2 &= 4^2 + 2^2 \\ |DB| &= \pm\sqrt{20} = \pm 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

Lävistäjän pituus on positiivinen, joten $|DB| = 2\sqrt{5}$.

$$\text{Tällöin } |CB| = \frac{1}{2}|DB| = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} = \sqrt{5}.$$

Ratkaistaan kulma α suorakulmaisesta kolmiosta ABC .

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{7}{\sqrt{5}} \\ \alpha &= \tan^{-1} \frac{7}{\sqrt{5}} \\ \alpha &= 72,28\dots^\circ \approx 72^\circ \end{aligned}$$

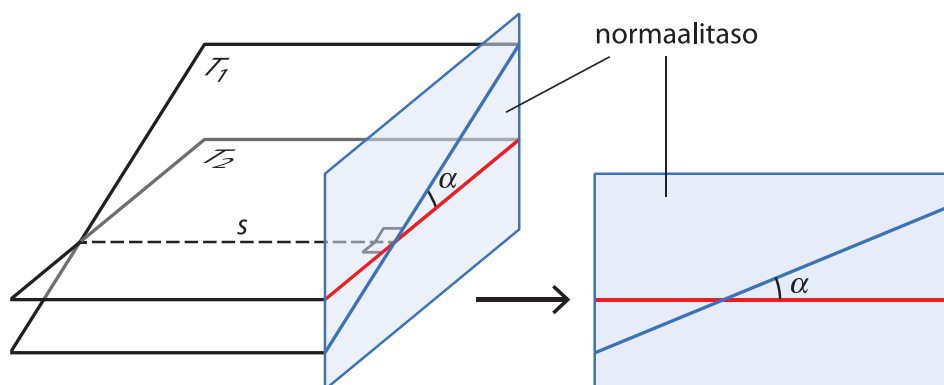


VASTAUS

Suora leikkaa päätytahkon 72° kulmassa.

Kahden tason välinen kulma

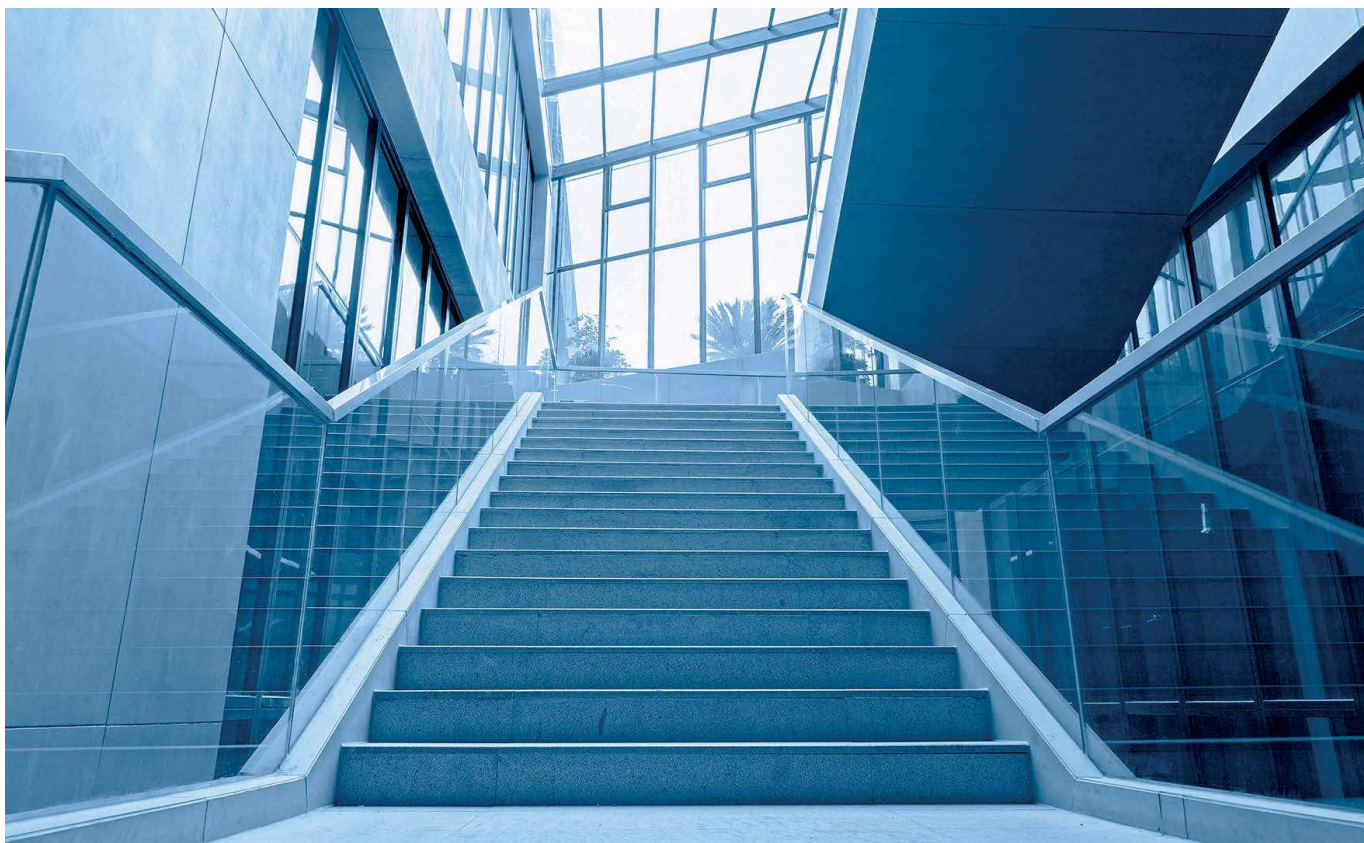
Kaksi tasoa voivat leikata toisensa tai olla yhdensuuntaiset. Kahden tason T_1 ja T_2 leikatessa toisensa on leikkauskuviona suora. Tätä suoraa s vastaan kohtisuoraa tasoa kutsutaan normaalitasoksi. Kahden leikkaavan tason välinen kulma α on normaalitasolle piirtyvien suorien välinen kulma.



Jos tasot ovat yhdensuuntaisia tai ne yhtyvät, niiden välinen kulma on 0° .

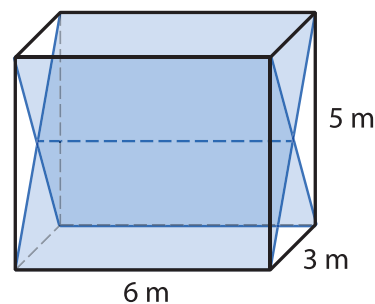


Kahden tason välinen kulma α toteuttaa aina ehdon $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$.



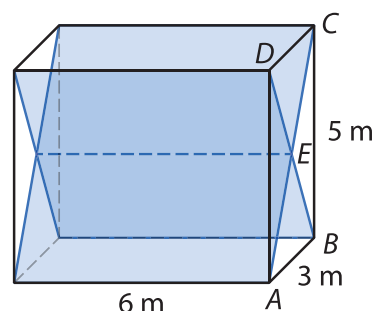
ESIMERKKI 3

Kaksi tasoa lävistävät suorakulmaisen särmiön kuvan mukaisesti. Laske tasojen välinen kulma asteen tarkkuudella.

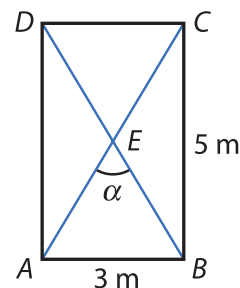


RATKAISU

Suorakulmaisen särmiön päätytahko $ABCD$ on kohtisuorassa tasojen leikkaussuoraa vastaan. Tasojen välinen kulma α saadaan laskemalla päätytahkon lävistäjien AC ja BD välinen kulma.



Tasojen välinen kulma α voidaan ratkaista tasakylkisestä kolmiosta ABE . Lasketaan päätytahkon lävistäjän AC ja kolmion kyljen AE pituudet.



$$|AC| = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$$

$$|AE| = \frac{|AC|}{2} = \frac{\sqrt{34}}{2}$$

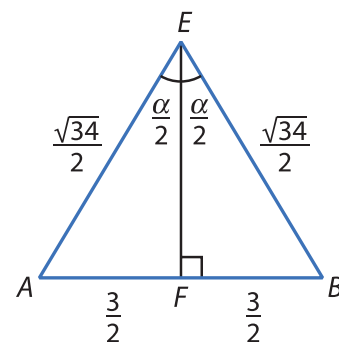
Kulman α puolittaja jakaa tasakylkisen kolmion ABE kahdeksi suorakulmaiseksi kolmioksi. Ratkaistaan kulma α .

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{34}}{2}} = \frac{3}{\sqrt{34}}$$

$$\frac{\alpha}{2} = \sin^{-1} \left(\frac{3}{\sqrt{34}} \right)$$

$$\frac{\alpha}{2} = 30,96...^\circ \quad | \cdot 2$$

$$\alpha = 61,927...^\circ \approx 62^\circ$$



Suorakulmio on suunnikas.
Suunnikkaan lävistäjät puolittavat toisensa.

Mikäli laskettu kulma α on yli 90° , niin kysytty tasojen välinen kulma on α :n vieruskulma $180^\circ - \alpha$.

Koska kulma α on välillä $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$, niin tasojen välinen kulma on 62° .

VASTAUS

62°

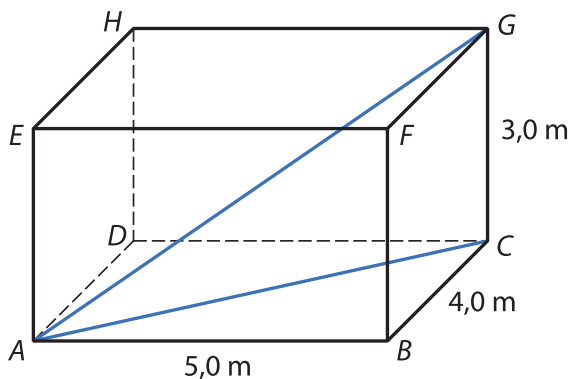
Harjoitustehtäviä

Sarja I

- 240.** Piirrä suorakulmainen särmiö, jonka korkeus on 4 cm, pohjan pituus on 8 cm ja leveys 3 cm.

- 241.** Suorakulmaisen särmiön muotoisen huoneen mitat ovat 5,0 m, 4,0 m ja 3,0 m kuvan mukaisesti. Laske

- a)** lattian lävistäjän AC pituus
b) avaruoslävistäjän AG pituus
c) lävistäjien AC ja AG välinen kulma asteen kymmenyksen tarkkuudella.



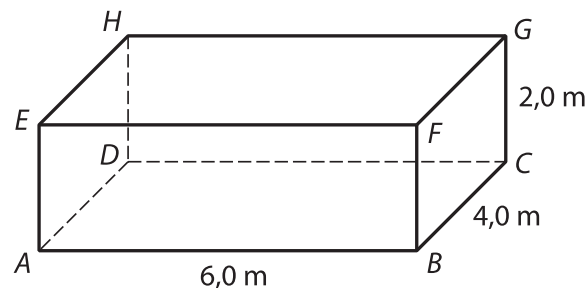
- 242.** Suorakulmaisen särmiön muotoisen säilytyslaatikon pohjan mitat ovat 43 cm ja 35 cm. Laatikon korkeus on 25 cm. Kuinka pitkä suora sauva mahtuu

- a)** laatikon pohjalle
b) laatikon sisään?

- 243.** Kuution sivun pituus on 15,0 cm. Laske asteen kymmenesosan tarkkuudella avaruoslävistäjän ja pohjan lävistäjän välinen kulma.

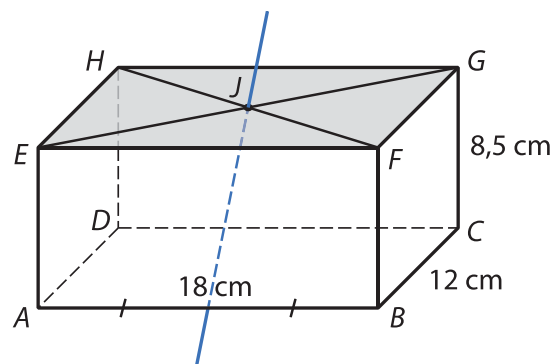
- 244.** Suorakulmaisen särmiön muotoisen kellarihuoneen pituus on 6,0 m, leveys 4,0 m ja korkeus 2,0 m. Laske

- a)** lattian lävistäjän AC ja lattialistan AB
b) sivuseinän $ABFE$ lävistäjien
c) lattialistan BC ja avaruoslävistäjän EC välinen kulma asteen tarkkuudella.

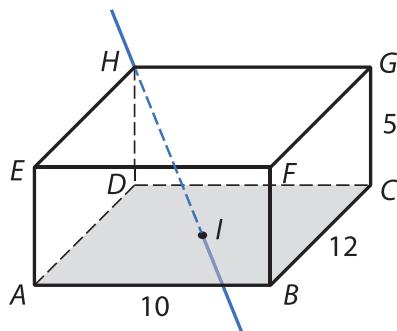


- 245.** Laske edellisen tehtävän kellarihuoneen katonnurkasta E lähtevien seinien lävistäjien välinen kulma asteen tarkkuudella.

- 246.** Suorakulmaisen särmiön muotoisen laatikon läpi on työnnetty tikku niin, että se lävistää kannen ja sivusärmän niiden keskipisteissä kuvan mukaisesti. Määritä asteen tarkkuudella, kuinka suuressa kulmassa tikku leikkaa laatikon kannen.

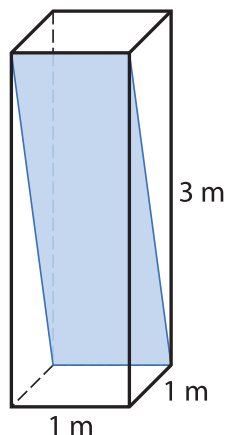


247. Piste I on suorakulmaisen särmiön pohjan keskipiste. Laske suoran HI ja pohjatahkon välinen kulma asteen tarkkuudella.



248. Suorakulmainen särmiö leikataan tasolla kuvan mukaisesti. Laske leikkauspinnan ja pohjan välinen kulma asteen tarkkuudella.

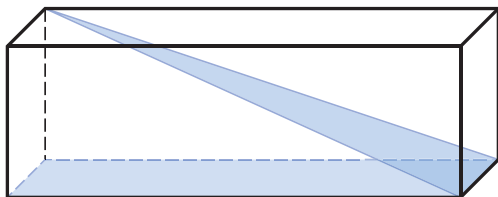
E3



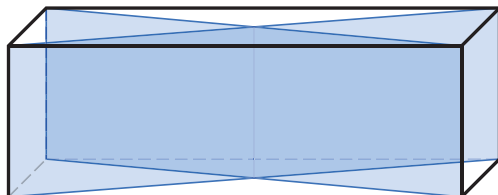
249. Suorakulmaisen särmiön korkeus on kaksinkertainen ja pohjan pituus kuusinkertainen pohjan leveyteen verrattuna. Laske väritettyjen tasojen välinen kulma yhden desimaalin tarkkuudella.



a)



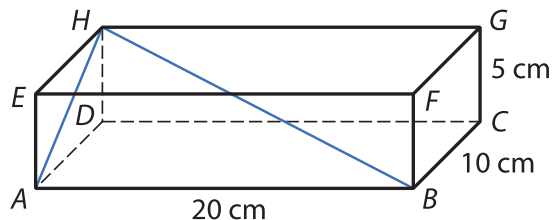
b)



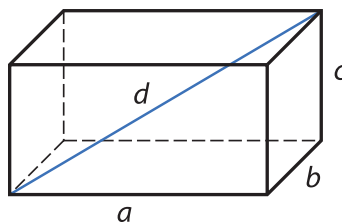
Sarja II

250. Laske yhden kymmenesosan tarkkuudella suorakulmaisen särmiön

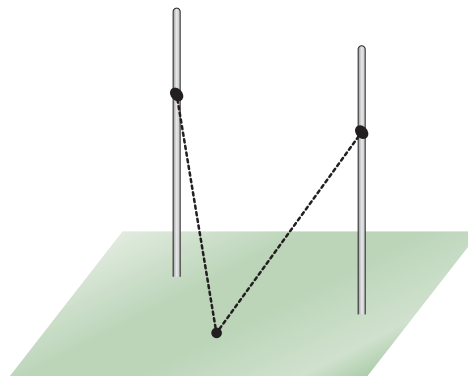
- sivutahkon lävistäjän AH pituus
- avaruuslävistäjän HB pituus
- lävistäjien AH ja HB välinen kulma.



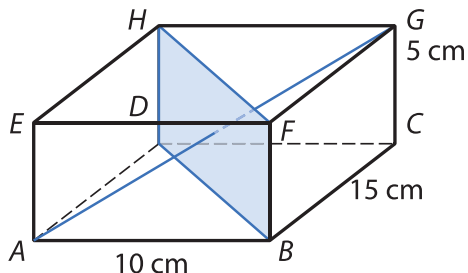
251. Osoita, että suorakulmaisen särmiön avaruuslävistäjän pituus $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, kun särmien pituudet ovat a , b ja c .



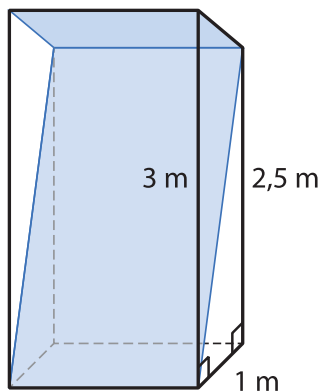
252. Kaksi pystysuoraa pylvästä ovat 8,5 m etäisyydellä toisistaan. Pylväistä on vedetty tukivaijerit maahan samaan pisteeseen, joka on molemmista pylväistä 5,0 m etäisyydellä. Laske vaijerien välinen kulma, kun niiden kiinnityskohdat ovat 11 m korkeudella.



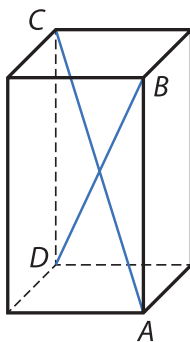
253. Suorakulmaisen särmiön muotoisen laatikon mitat ovat 10 cm, 15 cm ja 5 cm kuvan mukaisesti. Laatikon sisällä on pahvilevy, joka jakaa laatikon kahteen osaan. Laske asteen kymmenyksen tarkkuudella, kuinka suuressa kulmassa laatikon läpi työnnetty tikku AG leikkaa pahvilevyn $BFHD$.



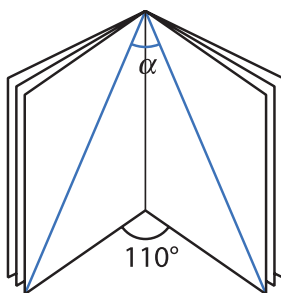
254. Laske väritettyjen tasojen välinen kulma asteen tarkkuudella. Kaikki piirretyn särmiön tahkot päätyjä lukuun ottamatta ovat suorakulmioita.



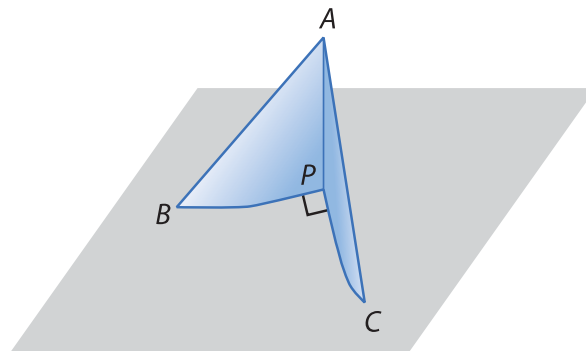
255. Neliöpohjaisen suorakulmaisen särmiön pohjan pinta-ala on $3,0 \text{ m}^2$ ja korkeus 3,0 m. Laske avaruuslävistäjän välinen kulma asteen tarkkuudella.



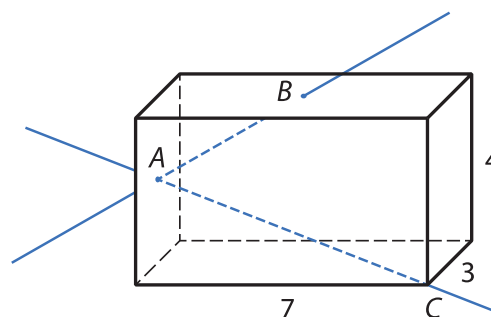
256. Tekijä-kirja ($18,4 \text{ cm} \times 23,8 \text{ cm}$) on jätetty auki kuvan mukaisesti niin, että sivujen välinen kulma on 110° . Laske sivuille piirrettyjen lävistäjien välinen kulma α .



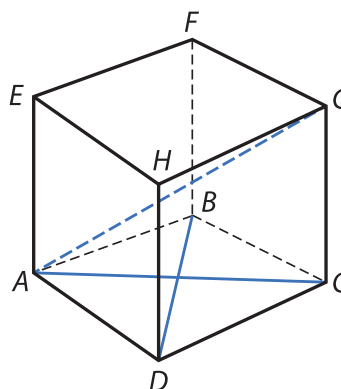
257. Servietti ($32 \text{ cm} \times 16 \text{ cm}$) taitetaan ensin tasakylkiseksi kolmioksi ja asetetaan sen jälkeen pystyyn pöydälle kuvan mukaisesti. Laske asteen kymmenesosan tarkkuudella
a) tason ABC ja pöydän välinen kulma
b) tason ABC ja janan AP välinen kulma.



258. Pisteet A ja B ovat suorakulmaisen särmiön sivutahkojen keskipisteet ja piste C kärkipiste kuvan mukaisesti. Laske suorien AB ja AC välinen kulma asteen tarkkuudella.



259. Laske kuution avaruuslävistäjän AG ja sivutahkon lävistäjän AC suuntien välinen kulma $0,1$ asteen tarkkuudella. Laske edelleen avaruuslävistäjän AG ja sivutahkon lävistäjän BD suuntien välinen kulma. [yo pitkä k2007]



5.2 Pallo

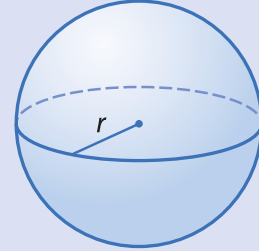
Pallon pinta-ala ja tilavuus

Pallo

Pallo muodostuu niistä avaruuden pisteistä, jotka ovat samalla etäisyydellä kiinteästä pisteestä. Tätä kiinteää pistettä kutsutaan pallon keskipisteeksi ja etäisyyttä säteeksi.

Jos säde olisi nolla, niin pallo kutistuisi vain keskipisteeksi. Koska pistettä ei määritellä palloksi, niin säteen tulee olla positiivinen.

Määritelmä



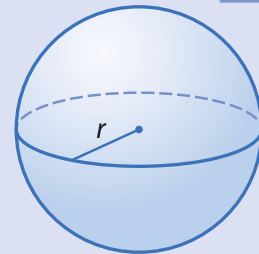
Pallon pinta-ala ja tilavuus voidaan laskea pallon säteen avulla.

Pallon pinta-ala ja tilavuus

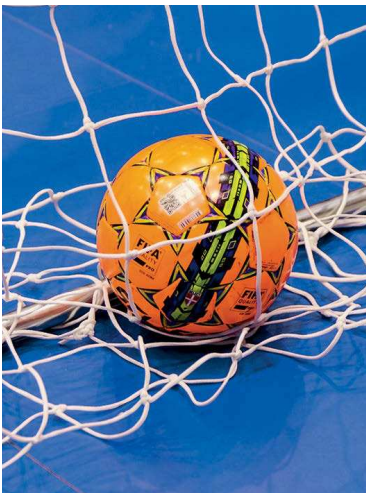
Jos pallon säde on r , niin pallon

- pinta-ala $A = 4\pi r^2$
- tilavuus $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Lause



ESIMERKKI 1



Futsal-pallon pinta-ala on 1260 cm^2 . Laske pallon tilavuus litroina.

RATKAISU

Koska pallon pinta-ala $A = 1260 \text{ cm}^2$, niin pallon säde r voidaan ratkaista yhtälöstä $A = 4\pi r^2$.

$$4\pi r^2 = 1260$$

$$r^2 = \frac{1260}{4\pi}$$

$$r = \pm 10,013... \text{ (cm)}$$

Pallon säde on positiivinen, joten $r = 10,013... \text{ cm}$.

Lasketaan pallon tilavuus.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{Sijoitetaan } r = 10,013... \text{ cm.}$$
$$= \frac{4}{3}\pi \cdot (10,013...)^3 = 4205,6... \approx 4210 \text{ (cm}^3\text{)}$$

$$V = 4210 \text{ cm}^3 = 4,21 \text{ dm}^3 = 4,21 \text{ L}$$

Futsal-pallon tilavuus on 4,21 litraa.

VASTAUS

4,21 L

ESIMERKKI 2

Kuparipallon halkaisija on 12 cm. Laske kuparipallon massa, kun kuparin tiheys on $8,96 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$.

RATKAISU

Tiheys ρ on massan m ja tilavuuden V osamäärä $\rho = \frac{m}{V}$, joten $m = \rho V$.

Koska tiheyden yksikkönä on kg/m^3 , niin muutetaan pallon säde metreiksi, jotta tilavuuden yksiköksi saadaan m^3 .

Lasketaan ensin pallon tilavuus V . Koska pallon halkaisija on 12 cm, niin pallon säde $r = 6 \text{ cm} = 0,06 \text{ m}$.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{Sijoitetaan } r = 0,06 \text{ m.}$$
$$= \frac{4}{3}\pi \cdot (0,06 \text{ m})^3$$
$$= 0,0009047... \text{ m}^3$$

Lasketaan pallon massa.

$$m = \rho V \quad \rho = 8,96 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$$
$$= 8,96 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 \cdot 0,0009047... \text{ m}^3 \quad V = 0,0009047... \text{ m}^3$$
$$= 8,106... \text{ kg} \approx 8,1 \text{ kg}$$

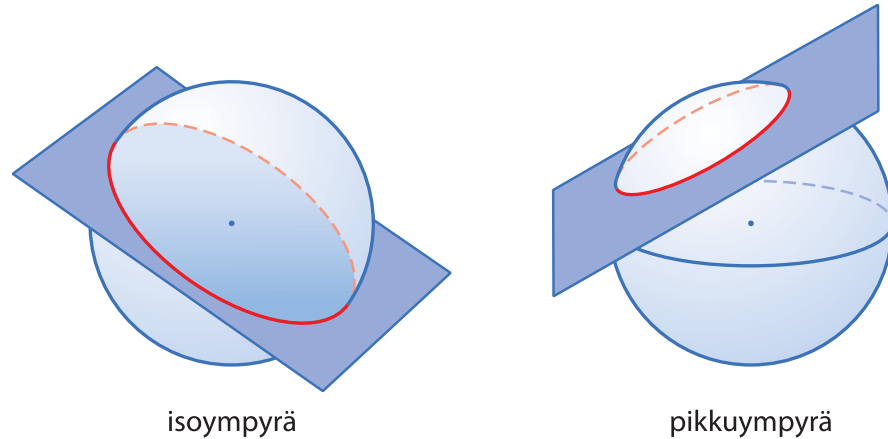
Kuparipallon massa on 8,1 kg.

VASTAUS

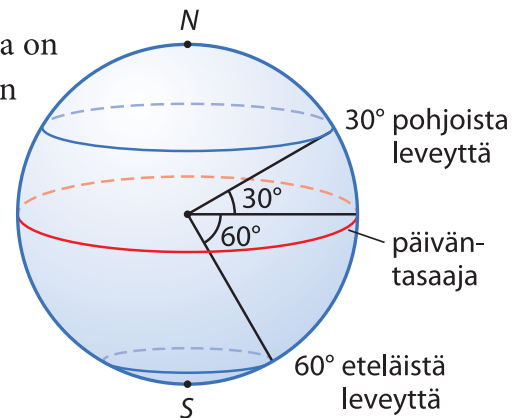
8,1 kg

Maapallo

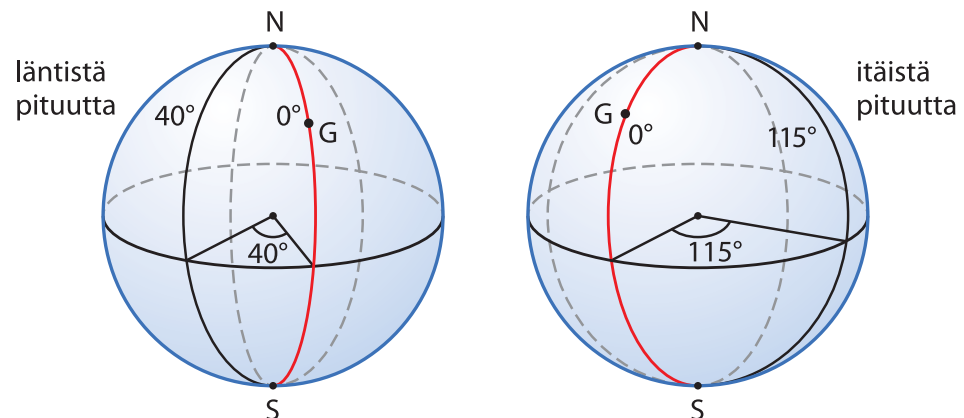
Kun taso leikkaa pallon, syntävä leikkauskuvio on ympyrä. Jos leikkaava taso kulkee pallon keskipisteen kautta, syntyy *isoympyrä*. Isoympyrä on suurin mahdollinen leikkauskuviona saatava ympyrä ja sillä on sama säde kuin pallolla. Muita ympyröitä kutsutaan *pikkuympyröiksi* ja niiden säde on pienempi kuin pallon säde.



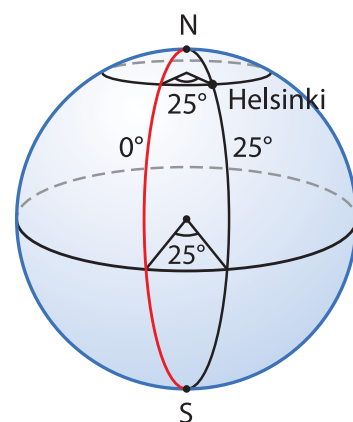
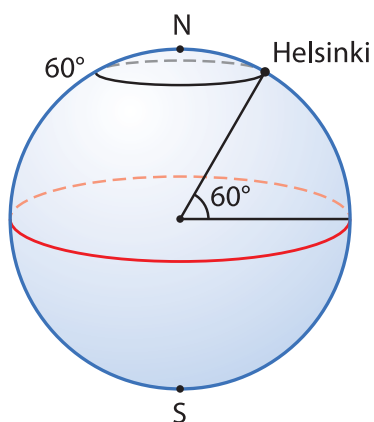
Nollaleveyspiiri eli päiväntasaaja on isoympyrä, joka jakaa maapallon eteläiseen ja pohjoiseen pallonpuoliskoon. Muut *leveyspiirit* ovat sen kanssa yhdensuuntaisia pikkuympyröitä. Leveyspiirit ovat välillä $[0^\circ, 90^\circ]$.



Maapallon pohjois- ja etelänavan kautta kulkevia isoympyrän puolikkaita kutsutaan *pituuspiireiksi*. Nollapituuspiiri kulkee Greenwichissä sijaitsevan kuninkaallisen observatorion kautta ja se jakaa maapallon läntiseen ja itäiseen pallonpuoliskoon. Pituuspiirien asteluvut ovat välillä $[0^\circ, 180^\circ]$.



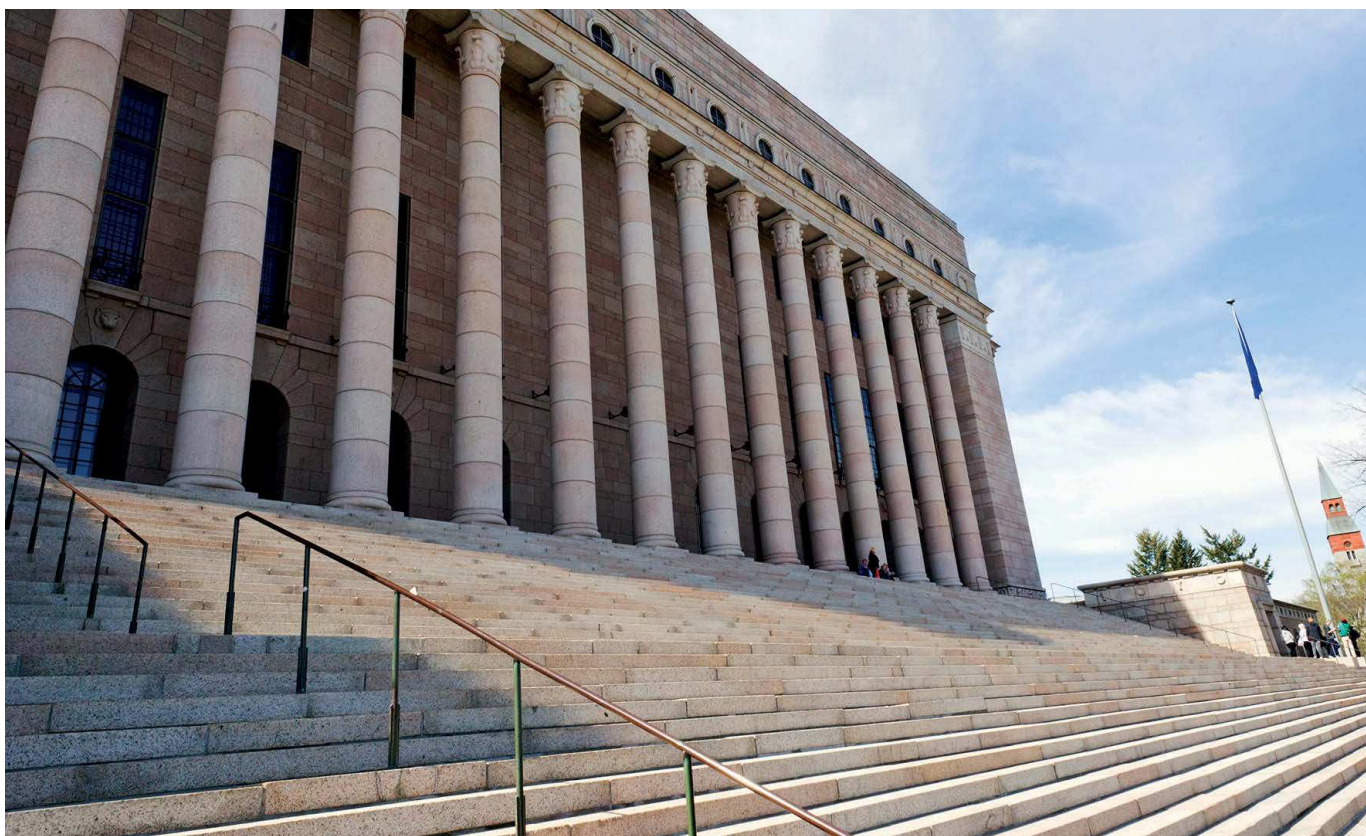
Helsingin sijainti asteen tarkkuudella on 60° N , 25° E , mikä tarkoittaa sitä, että Helsinki on 60 astetta pohjoiseen päiväntasaajasta ja 25 astetta itään nollapituuspiiristä.



1 aste on 60 kulmaminuuttia eli $1^\circ = 60'$.

1 minuutti on 60 kulmasekuntia eli $1' = 60''$.

Paikan sijainti voidaan ilmoittaa myös tarkemmin kuin asteen tarkkuudella käyttämällä kulmaminuutteja ja kulmasekunteja. Esimerkiksi eduskuntatalon sijainti Helsingissä on $60^\circ 10' 21'' \text{ N}$, $24^\circ 55' 59'' \text{ E}$.



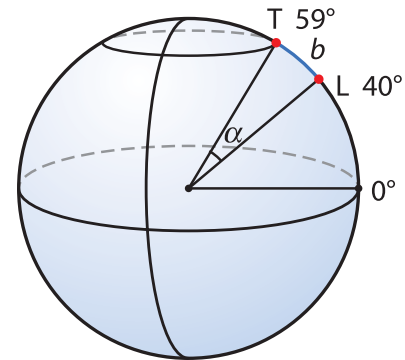
ESIMERKKI 3

Tukholman sijainti on 59° pohjoista leveyttä ja 18° itäistä pituutta. Italian 'saappaankorossa' sijaitsevan Leccen kaupungin sijainti on 40° pohjoista leveyttä ja 18° itäistä pituutta. Laske Tukholman ja Leccen välinen etäisyys Maan pintaa pitkin mitattuna, kun maan epätasaisuuksia ei huomioida. Maapallon ympärysmitta on kolmen numeron tarkkuudella 40 000 km.

RATKAISU

Pallopinnalla lyhin reitti kahden pisteen välillä kulkee pitkin isoympyrää.

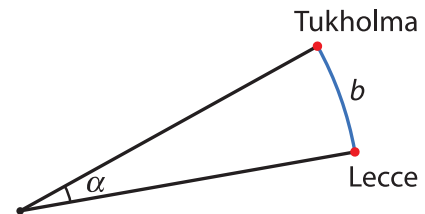
Tukholma ja Lecce sijaitsevat samalla pituuspiirillä, joten niiden välinen (lyhin) etäisyys saadaan laskemalla isoympyrän kaaren pituus b . Koska Tukholma ja Lecce ovat samalla puolella päiväntasaajaa, niin kulma α saadaan leveyspiirien astelukujen erotuksena.



$$\alpha = 59^\circ - 40^\circ = 19^\circ$$

Kaaren pituus on

$$\begin{aligned} b &= \frac{19^\circ}{360^\circ} \cdot 40000 \text{ km} \\ &= 2111,11\dots \text{ km} \approx 2110 \text{ km}. \end{aligned}$$



Tukholman ja Leccen välinen etäisyys on 2110 km.

VASTAUS

2110 km

Maan ympärysmitta ei ole satumalta pyöreästi 40 000 km eli 40 000 000 m. Kyseessä on yksikön metri alkuperäinen määritelmä. Ranskan Suuren vallankumouksen aikaan metrin pituudeksi sovittiin yksi kymmenesmiljoonasosa Pariisin kautta kulkevan pituuspiirin siitä osasta, joka jää pohjoisnavan ja päiväntasaajan väliin. Nykyisin käytetyn metrin määritelmän mukaan napojen kautta mitattu ympärysmitta on 40 008 km.



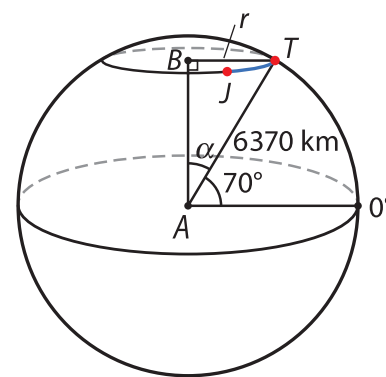
Norjan rannikolla sijaitsevan Tromssan kaupungin sijainti on 70° pohjoista leveyttä ja 19° itäistä pituutta. Jan Mayenin saaren eteläpään sijainti on likimain 70° pohjoista leveyttä ja 8° läntistä pituutta. Merentutkimusalaus lähtee purjehtimaan Tromssasta pitkin 70° pohjoista leveyspiiriä länteen kohti Jan Mayenin saaren eteläpäästä. Kuinka pitkä matka on purjehdettava? Maapallon säde on 6370 km.

RATKAISU

Kuljettava matka on 70° pohjoisen leveyspiirin (pikkuympyrä) kaari.

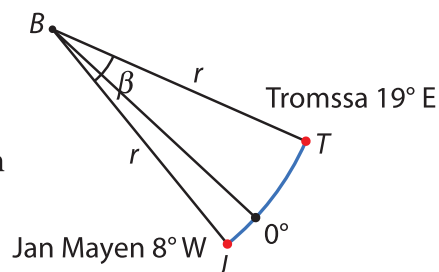
Ratkaistaan 70° leveyspiirin säde r suorakulmaisesta kolmiosta ATB , jossa $\alpha = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$.

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{r}{6370} \\ r &= 6370 \cdot \sin \alpha \\ &= 6370 \cdot \sin 20^\circ \\ &= 2178,66... \text{ (km)}\end{aligned}$$



Tromssa ja Jan Mayen sijaitsevat nollapituuspiirin eri puolilla, joten pikkuympyrän kaarta vastaava keskuskulma saadaan laskemalla yhteen pituuspiirien asteluvut.

$$\beta = 19^\circ + 8^\circ = 27^\circ$$



Pikkuympyrän 27° kaaren pituus on

$$\begin{aligned}b &= \frac{\beta}{360^\circ} \cdot 2\pi r \\ &= \frac{27^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 2178,66... \\ &= 1026,6... \approx 1030 \text{ (km)}.\end{aligned}$$

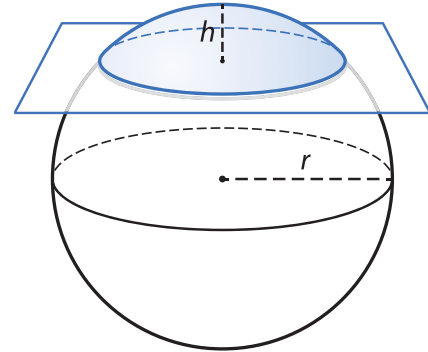
VASTAUS

1030 km

Pallon osat

Taso jakaa pallopinnan kahteen *kalottiin*.

Kuvassa on väritetty kaloteista pienempi.

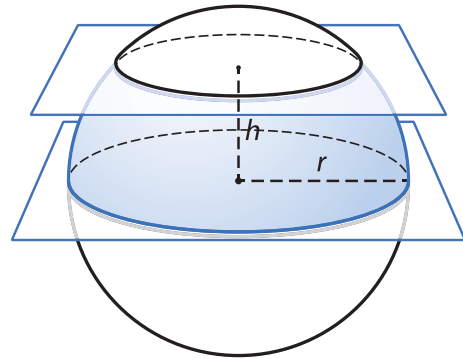


Kaksi yhdensuuntaista tasoa rajaavat pallopinnasta *vyöhykkeen*.

Sekä kalotin että vyöhykkeen pinta-ala A voidaan laskea pallon säteen r ja kalotin tai vyöhykkeen korkeuden h avulla.

Kalotin ja vyöhykkeen pinta-ala

$$A = 2\pi rh.$$

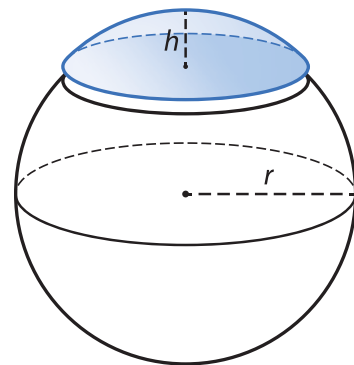


Taso jakaa pallon kahteen kappaleeseen, joita kutsutaan *pallosegmenteiksi*. Kuvassa on väritetty pallosegmenteistä pienempi.

Pallosegmentin tilavuus V voidaan laskea pallon säteen r ja pallosegmentin korkeuden h avulla.

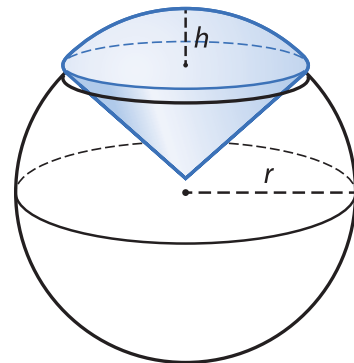
Pallosegmentin tilavuus

$$V = \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3} \right).$$



Kalotti ja ympyräkartion vaippa rajaavat *pallosektorin*.

Kuvassa on väritetty pallosektoreista pienempi.



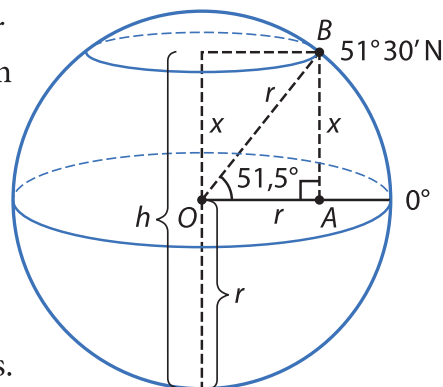
ESIMERKKI 5

Lontoo sijaitsee pohjoisella leveyspiirillä $51^{\circ} 30'$. Laske prosentoin tarkkuudella, kuinka suuri osa maapallon pinta-alasta jää Lontoon leveyspiirin eteläpuolelle. Maapallon säde on 6370 km.

RATKAISU

Kalotin pinta-ala $A = 2\pi rh$, jossa r on maapallon säde ja h on Lontoon leveyspiirin eteläpuolelle jäävän kalotin korkeus.

Kuvan merkintöjen mukaan Lontoon leveyspiirin eteläpuolelle jäävän kalotin korkeus $h = r + x$, jossa x on kolmion OAB korkeus.



Muutetaan kulma asteiksi.

$$51^{\circ}30' = 51,5^{\circ}$$

Ratkaistaan suorakulmaisesta kolmiosta OAB kateetin AB pituus x .

$$\sin 51,5^{\circ} = \frac{x}{r}$$

$$x = r \cdot \sin 51,5^{\circ}$$

$$= 6370 \cdot \sin 51,5^{\circ}$$

$$= 4985,21... \text{ (km)}$$

Sijoitetaan $r = 6370 \text{ (km)}$.

Lasketaan kalotin korkeus.

$$h = r + x = 6370 + 4985,21... = 11\,355,21... \text{ (km)}$$

Lasketaan Lontoon leveyspiirin eteläpuolelle jäävän kalotin pinta-alan $A_K = 2\pi rh$ suhde maapallon koko pinta-alaan $A_M = 4\pi r^2$.

$$\frac{A_K}{A_M} = \frac{\cancel{2} \cancel{\pi} \cancel{r} h}{\cancel{4} \cancel{\pi} \cancel{r^2}} = \frac{h}{2r}$$

$$= \frac{11\,355,21... \text{ km}}{2 \cdot 6370 \text{ km}}$$

$$= 0,891... \approx 89 \%$$

Sijoitetaan $r = 6370 \text{ km}$ ja $h = 11\,355,21... \text{ km}$.

Siis Lontoon leveyspiirin eteläpuolelle jää 89 % maapallon pinta-alasta.

VASTAUS

89 %

1 aste on 60 kulmaminuuttia
eli $1^{\circ} = 60'$.

Harjoitustehtäviä

Tämän luvun tehtävissä voit olettaa tunnetuksi Maan ympärysmittan ja säteen, jotka ovat kolmen numeron tarkkuudella 40 000 km ja 6370 km.

Sarja I

- 260.** Jalkapallon säde on 11 cm. Laske pallon
a) pinta-ala b) tilavuus.
- 261.** Laske rantapallon säde, kun sen
E1 a) pinta-ala on 4070 cm²
b) tilavuus on 74 litraa.
- 262.** Tel Aviv Balloon -kuumailmapallon pinta-ala on 1660 m² ja se on likimain pallon muotoinen. Laske kuumailmapallon
a) halkaisija b) tilavuus.
- 263.** Rautapallon säde on 15 cm ja massa
E2 93 kg. Onko rautapallo umpinainen vai ontto? Raudan tiheys on 7,87 g/cm³.
- 264.** Pallon tilavuus kasvaa 15 prosenttia.
E3 Kuinka monta prosenttia kasvaa tällöin
a) pallon säde b) pallon pinta-ala?

265.
E3

Oslo	60° pohjoista leveyttä 12° itäistä pituutta
Pisa	44° pohjoista leveyttä 12° itäistä pituutta
Pointe-Noire	4° eteläistä leveyttä 12° itäistä pituutta

Laske taulukossa annettujen sijaintien avulla sadan kilometrin tarkkuudella, kuinka pitkä matka Maan pintaa pitkin mitattuna on
a) Oslost Pisaan
b) Oslost Pointe-Noireen.
Maan epätasaisuuksia ei tarvitse ottaa huomioon.

- 266.** Taupon kaupunki Uudessa-Seelannissa
E4 sijaitsee 38. eteläisellä leveyspiirillä.
E5 Maailmanmatkaaja lähtee Tauposta ja kulkee koko ajan itään päin. Laske kolmen numeron tarkkuudella, kuinka pitkän matkan hän on kulkenut, kun hän palaa takaisin Taupoon. Maan epätasaisuuksia ei tarvitse ottaa huomioon.
- 267.** Kittilän sijainti on 67° 39' N, 24° 55' E.
E5 Laske prosenttien kymmenyksen tarkkuudella, kuinka monta prosenttia maapallon pinta-alasta on Kittilän leveyspiirin pohjoispuolella.
- 268.** Greippi, jonka halkaisija on 11,5 cm ja massa 165 g, on likimain pallon muotoinen. Elias leikkaa greipistä 4,0 cm korkean segmentin. Laske Eliaksen leikkaaman segmentin tilavuus ja arvioi sen massa.
- 269.** Veneen avaimissa on kiinni styroksista valmistettu pallo, jonka halkaisija on 5,0 cm. Kun avaimet tipahtavat järveen, jää pallosta veden pinnan yläpuolelle segmentti, jonka korkeus on 2,0 cm. Kuinka monta prosenttia pallon a) pinta-alasta b) tilavuudesta on veden alla?

Sarja II

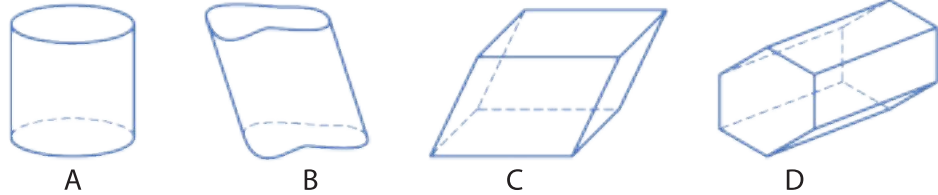
- 270.** Pallon muotoisen painesäiliön pinta-ala on 3,65 m². Laske säiliön tilavuus litroina.
- 271.** Marleena on ostanut puutarhaan koristeeksi onton betonipallon, jonka halkaisija on 29 cm ja betonikuoren paksuus 2,0 cm. Laske betonipallon massa, kun betonin tiheys on 2100 kg/m³. Sisällä olevan ilman massaa ei huomioida.

- 272.** Kokkola ja Uumaja sijaitsevat likimain samalla leveyspiirillä $63^{\circ} 50'$ pohjoista leveyttä. Kokkola sijaitsee pituuspiirillä $23^{\circ} 8'$ itäistä pituutta ja Uumaja $20^{\circ} 16'$ itäistä pituutta.
- Kuinka pitkä matka on Kokkolasta Uumajaan, kun kuljetaan koko ajan samalla leveyspiirillä?
 - Kuinka monta metriä suora tunneli Kokkolasta Uumajaan lyhentäisi a-kohdan matkaa?
- 273.** Tampereelta ($61^{\circ} 30' N$, $23^{\circ} 45' E$) lähdettiin lentoon helikopterilla. Ensin lennettiin 200 km pohjoiseen, sen jälkeen 100 km itään ja lopuksi 200 km etelään. Kuinka pitkälle pitäisi laskeutumispaikasta kulkea länteen, jotta päädyttäisiin takaisin Tampereelle? Anna vastaus kilometrin tarkkuudella.
- 274.** Maapallon napa-alueiksi kutsutaan pohjoisen napapiirin pohjoispuolella olevaa aluetta ja eteläisen napapiirin eteläpuolista aluetta. Trooppinen alue on päiväntasaajan kummallakin puolella kääntöpiirin välissä oleva alue. Kuinka monta prosenttia napa-alueet ovat koko maapallon pinta-alasta? Entä kuinka monta prosenttia on trooppinen alue? Napapiirin leveysaste on $66,5^{\circ}$ ja kääntöpiirin $23,5^{\circ}$. [yo pitkä s2001]
- 275.** Tietoliikennesatelliitti ARSAT-2 laukaistiin avaruuteen 30.9.2015 Kouroun avaruuskeskuksesta. Satelliitti pysyttelee koko ajan saman päiväntasaajan pisteen yläpuolella eli on niin sanotulla geostationaarisella radalla 35 800 kilometrin korkeudella. Kuinka monta prosenttia Maan pinnasta satelliitista voi nähdä?
- 276.** Pallo putosi maahan ja teki tasaiseen hiekaan kuopan, jonka leveys on 18 cm ja syvyys 4,0 cm. Laske kuopan tilavuus.
- 277.** Paikkakunnat A ja B sijaitsevat pohjoisella pallonpuoliskolla siten, että kummankin leveysaste on 49° mutta pituusasteiden ero on 38° .
- Laske paikkakuntien välimatka leveyspiiriä pitkin mitattuna.
 - Laske paikkakuntien välinen lyhin välimatka maan pintaa pitkin mitattuna. Maanpinnan epätasaisuuksia ei oteta huomioon. Anna vastaukset kolmen numeron tarkkuudella. [yo pitkä s1999 mukailtuna]
- 278.** Suurennuslasin kaksoiskupera linssi muodostuu kahdesta samansäteisestä pallosegmentistä. Linssin halkaisija on 110 mm ja paksuus keskeltä 25 mm. Laske linssin tilavuus.
- 279.** Pallon sisään asetetaan kuutio, jonka kärjet ovat pallon pinnalla. Kuution sisään asetetaan pallo, joka sivuaa jokaista kuution sivutahkoa. Tämän sisään asetetaan jälleen kuutio jne. Osoita, että pallojen **a)** säteet **b)** pinta-alat **c)** tilavuudet kukin erikseen muodostavat geometrisen jonon. Määritä jonojen suhdeluvut. [yo pitkä k2001]
- 280.** Tasa-aineinen pallo kelluu vedessä siten, että siitä on pinnan yläpuolella osa, jonka korkeus on $\frac{1}{5}r$ (r on pallon säde). Määritä pallon tiheys (kg/m^3), kun veden tiheys on $1,00 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$. [yo pitkä k1991]

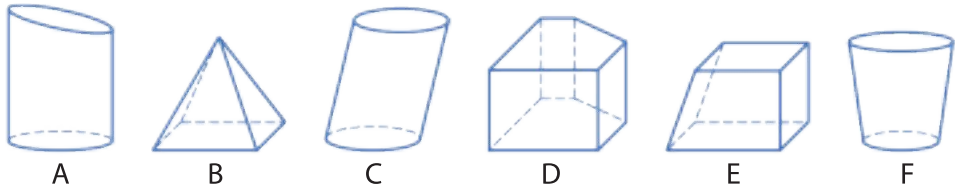
5.3 Lieriö

TUTKIMUS

1) Mitä yhteistä on seuraavilla kappaleilla?



2) Mitkä seuraavista kappaleista ovat lieriöitä?

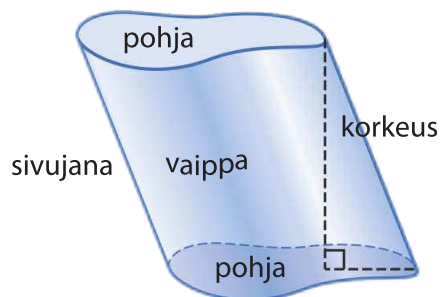
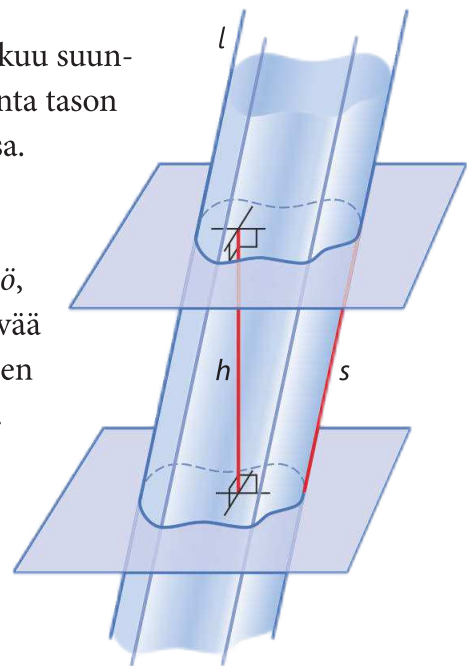


Lieriö

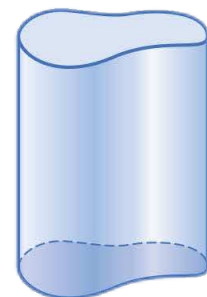
Lieriöpinta syntyy, kun suora l liikkuu suuntansa säilyttäen itseään leikkaamatonta tason käyrää pitkin takaisin lähtökohtaansa.

Kun kaksi yhdensuuntaista tasoa leikkaavat lieriöpinnan, syntyy *lieriö*, jota rajaavat vaippa ja kaksi yhtenevää pohjaa. Lieriön korkeus h on näiden tasojen välinen kohtisuora etäisyys.

Jos sivujana s on kohtisuorassa pohjia vastaan, lieriötä kutsutaan suoraksi lieriöksi. Muussa tapauksessa kyseessä on vino lieriö.



vino lieriö



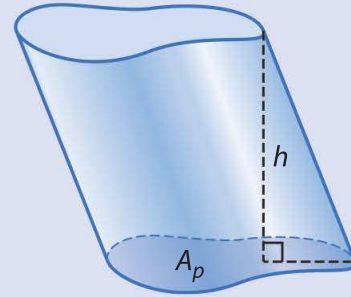
suora lieriö

Lieriön tilavuus

Lause

Lieriön tilavuus V on pohjan pinta-alan A_p ja lieriön korkeuden h tulo.

$$V = A_p \cdot h$$



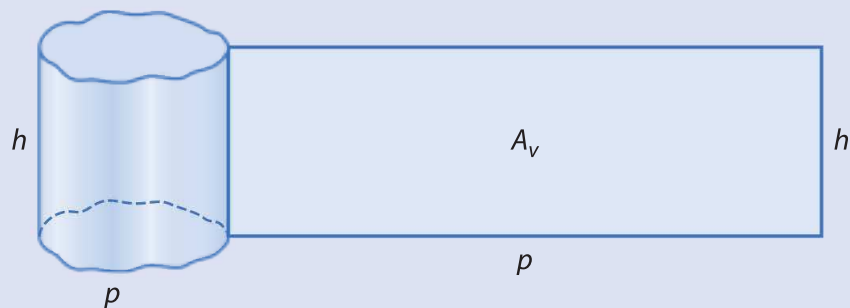
Kun suoran lieriön vaippa levitetään tasoon, syntyy suorakulmio, jonka korkeus on sama kuin lieriön korkeus ja jonka leveytenä on pohjaympyrän piiri.

Suoran lieriön vaipan pinta-ala

Lause

Suoran lieriön vaipan pinta-ala A_v saadaan pohjan piirin p ja korkeuden h tulona.

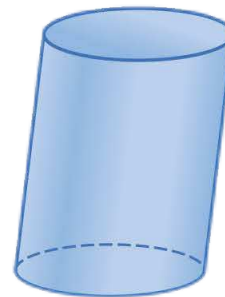
$$A_v = ph$$



Ympyrälieriössä pohjat ovat ympyröitä.



suora ympyrälieriö



vino ympyrälieriö

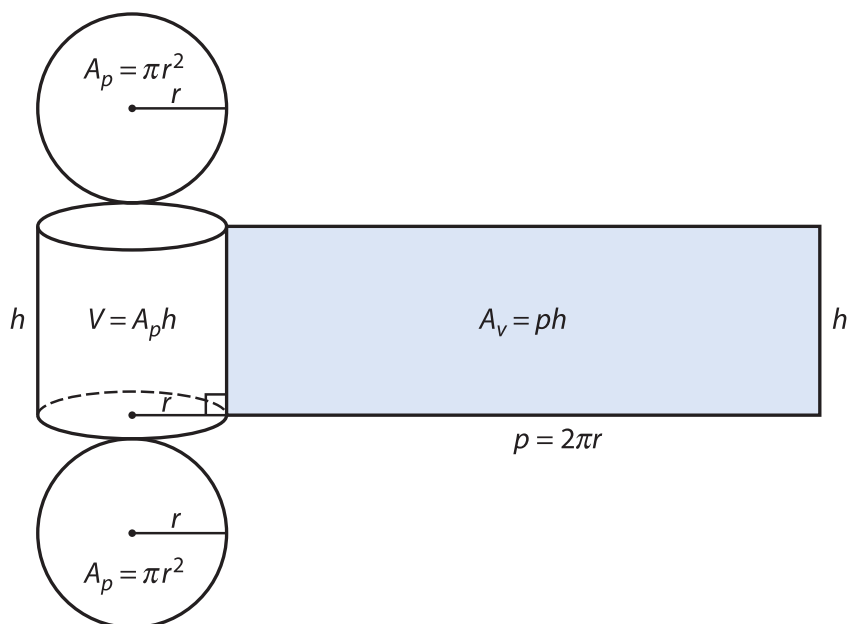
ESIMERKKI 1

Suoran ympyrälieriön muotoisen suolakurkkusäilyketökin pohjan halkaisija on 18,0 cm ja korkeus 23,0 cm. Laske säilyketökin

- tilavuus
- valmistamiseen kuluneen pellin pinta-ala.

RATKAISU

Suoran ympyrälieriön muotoinen tölkki koostuu kahdesta pohjaympyrästä ja niitä yhdistävästä vaipasta.



Lieriön pohjaympyrän säde on $\frac{18,0 \text{ cm}}{2} = 9,0 \text{ cm}$.

- Lasketaan lieriön tilavuus.

$$\begin{aligned} V &= A_p \cdot h \\ &= \pi r^2 \cdot h \\ &= \pi \cdot 9,0^2 \cdot 23,0 \\ &= 5852,7... \\ &\approx 5850 \text{ (cm}^3\text{)} \end{aligned}$$

Pohjaympyrän ala $A_p = \pi r^2$.

Sijoitetaan $r = 9,0$ ja $h = 23,0$.

Tölkin tilavuus $V = 5850 \text{ cm}^3 = 5,85 \text{ dm}^3 = 5,85 \text{ L}$.

- b)** Tölkin kokonaispinta-ala saadaan laskemalla yhteen vaipan sekä kahden pohjan alat.

$$A = A_v + 2 \cdot A_p$$

$$= 2\pi r \cdot h + 2 \cdot \pi r^2$$

$$= 2\pi \cdot 9,0 \cdot 23,0 + 2 \cdot \pi \cdot 9,0^2$$

$$= 1809,5\dots$$

$$\approx 1810 \text{ (cm}^2\text{)}$$

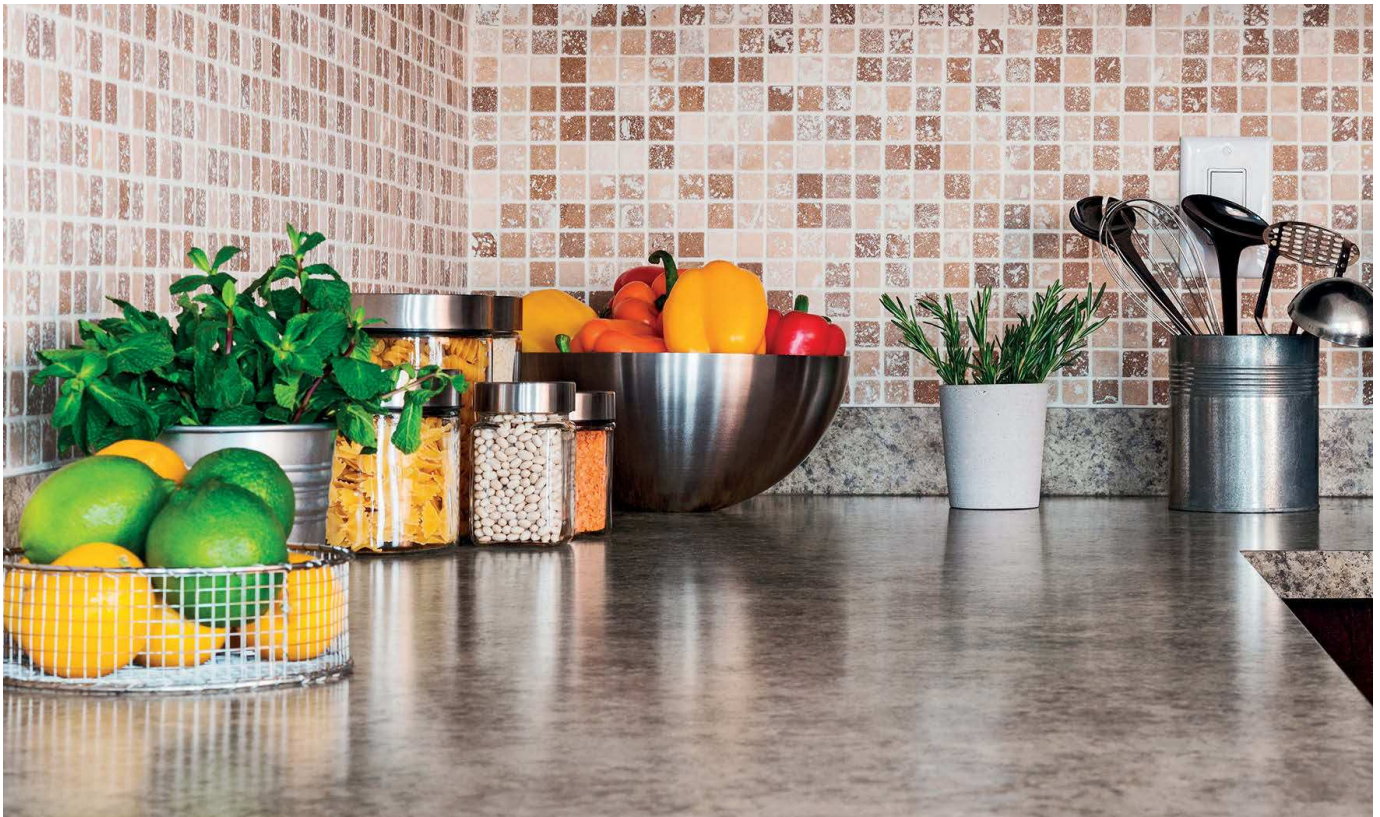
$$A_v = p \cdot h = 2\pi r \cdot h, \quad A_p = \pi r^2$$

Sijoitetaan $r = 9,0$ ja $h = 23,0$.

Lieriön kokonaispinta-ala on 1810 cm^2 .

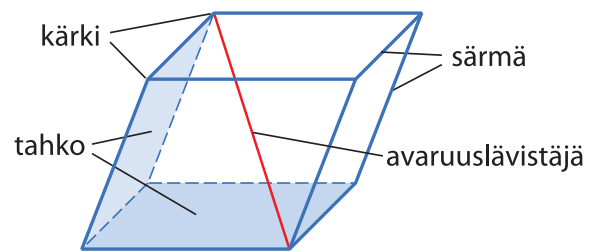
VASTAUS

- a)** Tölkin tilavuus on $5,85 \text{ L}$. **b)** Peltiä kuluu 1810 cm^2 .



Särmiö

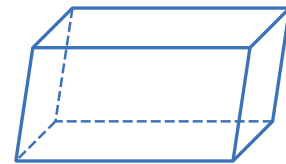
Lieriötä, jonka pohjat ovat monikulmioita, kutsutaan *särmiöksi*.



Avaruuslävistäjä yhdistää kaksi kärkeä, jotka eivät kuulu samaan tahkoon.

Särmiöitä

Suuntaissärmiö on särmiö, jonka kaikki tahkot ovat suunnikkaita.

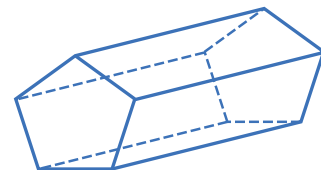


Suorakulmainen särmiö on särmiö, jonka kaikki tahkot ovat suorakulmioita.

Kuutio on suorakulmainen särmiö, jonka tahkot ovat neliöitä.



Säännöllinen särmiö on suora särmiö, jonka pohjat ovat säännöllisiä monikulmioita.

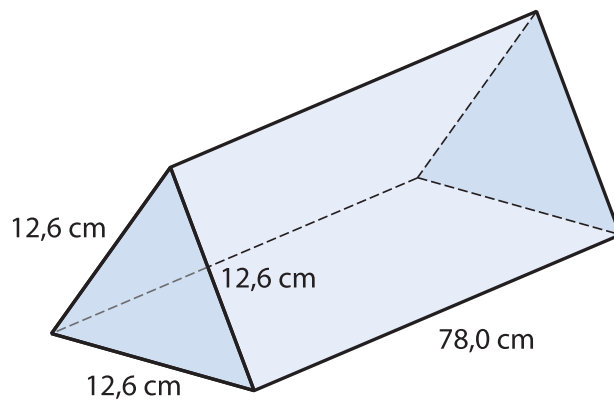


ESIMERKKI 2

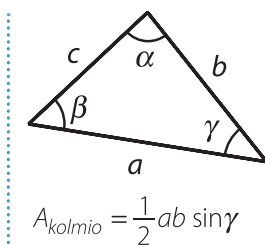
Suklaata myydään säännöllisen kolmisivuisen särmiön muotoisessa pakkauksessa. Jättikokoisen rasian pituus on 78,0 cm ja pohjan sivu on 12,6 cm. Kuinka paljon pahvia tarvitaan rasian valmistamiseen? Saumavaroja ei huomioida.

RATKAISU

Säännöllinen kolmisivuinen särmiö on suora lieriö, jonka pohja on tasasivuinen kolmio ja sivutahkot samanlaisia suorakulmioita.

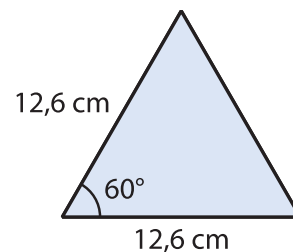


Särmiön kokonaispinta-alan laskemiseksi tarvitaan pohjien ja sivutahkojen pinta-alat.



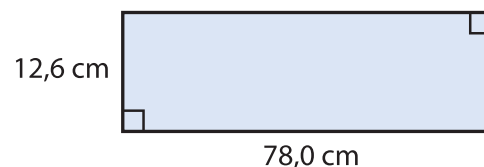
Lasketaan pohjan pinta-ala. Pohjan jokaisen sivun pituus on 12,6 cm ja kulman suuruus 60 astetta.

$$\begin{aligned} A_p &= \frac{1}{2} \cdot 12,6 \cdot 12,6 \cdot \sin 60^\circ \\ &= 68,74... \text{ (cm}^2\text{)} \end{aligned}$$



Lasketaan särmiön yhden sivutahkon pinta-ala.

$$\begin{aligned} A_t &= 78,0 \cdot 12,6 \\ &= 982,8 \text{ (cm}^2\text{)} \end{aligned}$$



Särmiö koostuu kahdesta pohjakolmiosta sekä kolmesta sivutahkosta. Kokonaispinta-ala on

$$A = 2 \cdot A_p + 3 \cdot A_t = 2 \cdot 68,74... + 3 \cdot 982,8 = 3085,8... \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Pahvia kuluu $3085,8... \text{ cm}^2 \approx 3090 \text{ cm}^2$.

VASTAUS

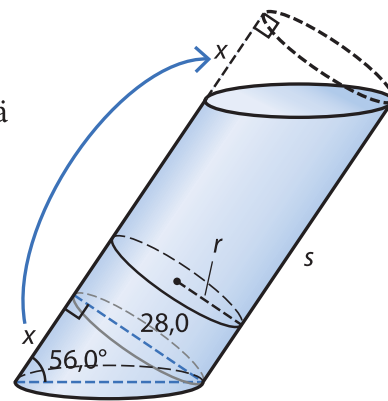
3090 cm²

ESIMERKKI 3

Pyöreän alumiinisauvan pituus on 30,0 cm ja halkaisija 28,0 mm. Sauvasta sahataan mahdollisimman pitkä vinon lieriön mallinen kappale, jonka sivujanan ja pohjan välinen kulma $56,0^\circ$. Laske saadun vinon lieriön tilavuus.

RATKAISU

Vino lieriö voidaan ”oikaista” ajattelemalla, että toisesta päästä sahataan pala kohtisuorasti sivujanaa vasten. Kun tämä pala siirretään lieriön toiseen päähän, saadaan suora lieriö, jonka pohjana on alkuperäisen lieriön kohtisuora poikkileikkaus ja korkeutena alkuperäisen sivujan piteus.



Alumiinisen lieriön kohtisuora poikkileikkaus on ympyrä, jonka halkaisija on 28,0 mm ja säde siis 14,0 mm. Alkuperäisen sauvan pituus on 30,0 cm = 300 mm. Sivujan piteus $s = 300 - x$.

$$\tan 56,0^\circ = \frac{28,0}{x}$$

Yhtälön voi ratkaista laskimella.

$$x \tan 56,0^\circ = 28,0$$

$$x = \frac{28,0}{\tan 56,0^\circ} = 18,886... \text{ (mm)}$$

$$s = 300 - 18,886... = 281,113... \text{ (mm)}$$

Lieriön tilavuus on $V = A_p h$, jossa A_p on kohtisuoran poikkileikkausympyrän pinta-ala ja korkeus h on sivujan piteus s .

$$V = A_p h$$

$$A_p = \pi r^2$$

$$= \pi r^2 h$$

$$r = 14,0 \text{ ja } h = s = 281,113...$$

$$= \pi \cdot 14,0^2 \cdot 281,113...$$

$$= 173\,096,4... \approx 173\,000 \text{ (mm}^3\text{)}$$

Lieriön tilavuus on $173\,000 \text{ mm}^3 = 173 \text{ cm}^3$.

VASTAUS

$$173 \text{ cm}^3$$

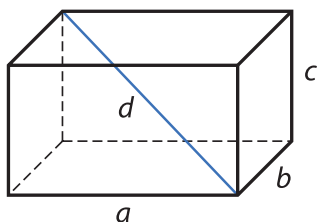
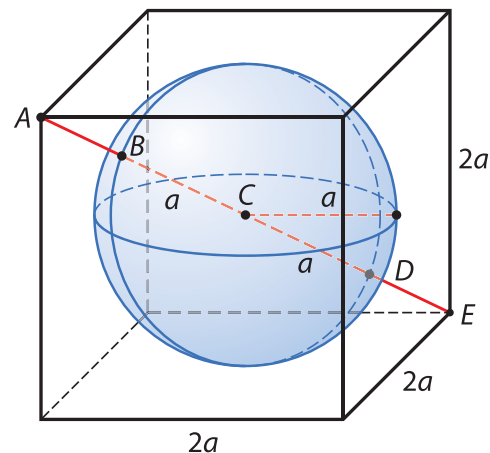


Kuution särmän pituus on $2a$. Kuution sisälle asetetaan mahdollisimman suuri pallo. Laske pallon lyhin etäisyys kuution nurkasta.

RATKAISU



Pallon lyhin etäisyys kuution nurkasta on $|AB|$ ja se saadaan laskemalla kuution avaruuslävistäjän puolikas $|AC|$ ja vähentämällä siitä pallon säde $|BC|$ eli $|AB| = |AC| - |BC|$.



Suorakulmaisen särmiön avaruuslävistäjän pituus
 $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Lasketaan avaruuslävistäjän pituus.

$$\begin{aligned} |AE| &= \sqrt{(2a)^2 + (2a)^2 + (2a)^2} \\ &= \sqrt{4a^2 + 4a^2 + 4a^2} \\ &= \sqrt{12a^2} \\ &= \sqrt{4 \cdot 3 \cdot a^2} \\ &= 2\sqrt{3}a \end{aligned}$$

$$\sqrt{a^2} = |a| = a, \text{ kun } a > 0.$$

$$\text{Saadaan } |AC| = \frac{2\sqrt{3}a}{2} = \sqrt{3}a.$$

Kuution sisään sijoitetun pallon halkaisija on yhtä pitkä kuin kuution sivusärmä. Pallon säde on siis puolet kuution sivusärmän pituudesta eli $|BC| = a$.

Lasketaan pallon lyhin etäisyys kuution nurkasta.

$$\begin{aligned} |AB| &= |AC| - |BC| \\ &= \sqrt{3}a - a \\ &= (\sqrt{3} - 1)a \end{aligned}$$

$$|AC| = \sqrt{3}a, |BC| = a$$

Erotetaan yhteinen tekijä.

Pallon lyhin etäisyys kuution nurkasta on $(\sqrt{3} - 1)a$.

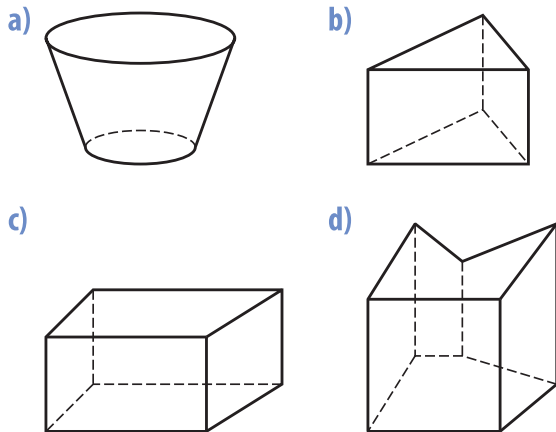
VASTAUS

$$(\sqrt{3} - 1)a$$

Harjoitustehtäviä

Sarja I

281. Mitkä seuraavista kappaleista ovat lieriöitä?

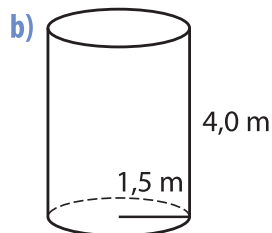
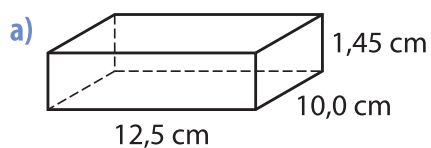


282. Piirrä geometriaohjelmalla seuraavat kappaleet.



- a) Suora ympyrälieriö, jonka säde on 2 cm ja korkeus on 4 cm.
- b) Kuutio, jonka särmän pituus on 6 cm.
- c) Säännöllinen kolmisivuinen särmiö, jonka pohjasärmän pituus on 3 cm ja korkeus 5 cm.

283. Laske kappaleen tilavuus litroina.

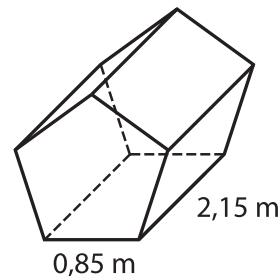


284. Suoran ympyrälieriön muotoisen ananassäilyketölkkin pohjan halkaisija on 8,5 cm ja korkeus 15 cm. Laske säilyketölkkin tilavuus ja kokonaispinta-ala.

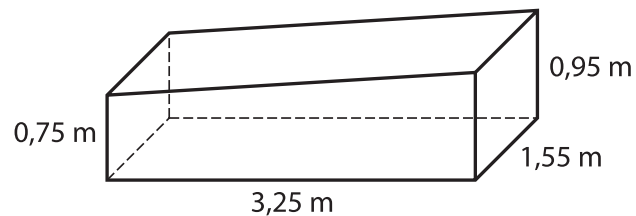


285. Suoran ympyrälieriön muotoiseen astiaan kaadetaan 5,0 l vettä. Tällöin veden korkeus astiassa on 22 cm. Laske pohjan halkaisija.

286. Laske oheisen säännöllisen viisisivuisen särmiön kokonaispinta-ala.



287. Laske oheisen kappaleen kokonaispinta-ala. Kappaleen pohja on suorakulmio ja sivusärmät ovat kohtisuorassa pohjaa vastaan.

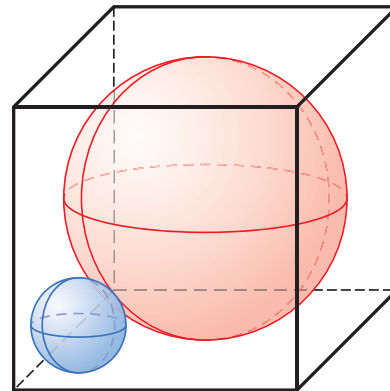


288. Tehtaassa valmistetaan suoran ympyrälieriön muotoisia pakkauksia, joihin juuri ja juuri mahtuu 5 kappaletta tennispalloja. Kuinka suuri osuus pakkauksesta on tyhjää tilaa?

289. Kuutio pienennetään toiseksi kuutioksi siten, että sen kokonaispinta-ala pienenee 36 %. Kuinka monta prosenttia tilavuus pienenee? [yo pitkä s2004]

290. Pyöreä putki, jonka poikkileikkauksen läpimitta on 10 cm, kulkee 3,0 m korkeisen huoneen lattian ja katon läpi muodostaen 70 asteen kulman lattian kanssa. Mikä on huoneessa olevan putken osan tilavuus? [yo pitkä s1994]

- 291.** Laske säännöllisen kuusisivuisen särmiön pohjan pinta-ala, kun sen tilavuus on 2,5 litraa ja korkeus on 17,25 cm.
- 292.** Suoran ympyrälieriön pohjan pinta-ala on 1730 mm^2 ja vaipan ala $39,1 \text{ cm}^2$. Laske lieriön tilavuus millilitran tarkkuudella.
- 293.** Suoran ympyrälieriön vaippa on suorakulmio, jonka sivujen pituudet ovat 25 cm ja 30 cm. Laske ympyrälieriön tilavuus.
- 294.** Turun edustan Airistolla tapahtuneessa merionnettomuudessa mereen valui bensiiniä 1250 kg. Syntyneen ympyränmuotoisen öljylautan ympäröimiseen tarvittiin öljypuomia 576 metriä. Laske öljykalvon paksuus 0,01 millimetrin tarkkuudella, kun bensiinin tiheys on 700 kg/m^3 .
- 295.** Suorakulmaisen särmiön muotoisessa suljetussa lasisäiliössä on 1,20 l vettä. Vaakasuuralla alustalla mitattuna vedenkorkeus on 40 mm. Kun säiliö käännetään kyljelleen, on vedenkorkeus 50 mm, ja kun säiliö käännetään toiselle kyljelleen, on vedenkorkeus 60 mm. Määritä säiliön tilavuus. [yo pitkä k1998]
- 296.** Suoran ympyrälieriön muotoisen tynnyrin vetoisuus on 200 L ja sen pohjan halkaisija on 44 cm. Kyljellään makaavassa tynnyrissä on polttoainetta 8,9 cm. Kuinka paljon polttoaine maksaa tynnyreineen, kun polttoaineen hinta on 1,32 €/L ja tynnyri on arvoltaan 17,99 €?
- 297.** Suoran ympyrälieriön muotoisen mukin korkeus on 5,4 cm ja tilavuus on 2,5 dl. Kuinka paljon mukissa on mehua, kun mukia voi kallistaa 30 astetta ennen kuin mehu valuu reunasta yli.
- 298.** Säännöllisen kuusisivuisen särmiön pohjasärmän pituus on 3 ja korkeus 4. Laske särmiön tarkka tilavuus.
- 299.** Pyöreän tangon halkaisija on 46,0 mm. Tangosta sahataan vino ympyrälieriö, jonka sivujanan pituus on 20,0 cm sekä sivujanan ja pohjan välinen kulma $45,0^\circ$. Laske lieriön kokonaispinta-ala.
- 300.** Lipputangon, jonka poikkileikkauksen halkaisija on 20 cm, ympäri on kierretty maasta huippuun ulottuva naru, joka nousee 60° kulmassa ja kiertää tangon 12 kertaa. Mikä on narun pituus? Mikä on lipputangon korkeus? [yo pitkä s1990]
- 301.** Oheisen kuution särmiön pituus on 2.
E4 Sen sisällä on vaaleanpunainen pallo, joka sivuaa jokaista kuution tahkoa. Kuution yhdessä kulmassa on pienempi sininen pallo, joka sivuaa suurta palloa ja kolmea kuution tahkoa kuvion mukaisesti. Laske sinisen pallon säteen tarkka arvo. [yo pitkä k2013]



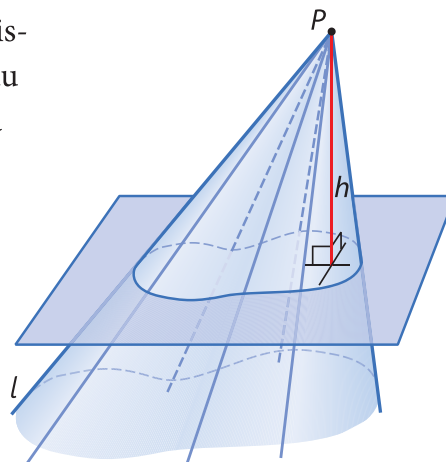
- 302.** Helmitaulua varten on hankittu puupalloja, joiden massa on 2,95 grammaa. Pallon läpi porataan halkaisijaltaan 4,5 mm reikä, joka kulkee pallon keskipisteen kautta ja pallot pujotetaan helmitaulun tankoon. Kuinka monta prosenttia pallon massa pienenee porauksessa? Puun tiheys on 520 kg/m^3 .

5.4 Kartio

Kartion tilavuus ja pinta-ala

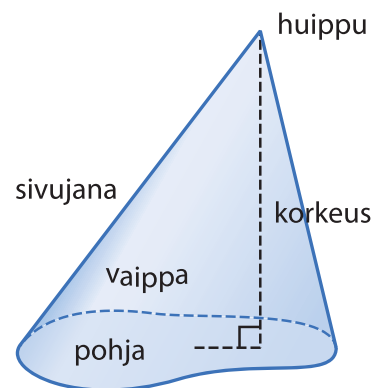
Kartiopinta syntyy, kun kiinteästä pisteestä P alkava puolisuora l liikkuu itseään leikkaamatonta tason käyrää pitkin takaisin lähtökohtaansa.

Kun taso leikkaa kartiopinnan, syntyy *kartio*, jota rajaavat vaippa ja pohja. Kartion korkeus on kiinteän pisteen P kohtisuora etäisyys pohjan kautta kulkevasta tasosta.



Kartio on suora, mikäli kartion pohjalla on keskipiste ja tämä keskipiste on korkeusjanan toinen päätepiste.

Muussa tapauksessa kartio on vino.

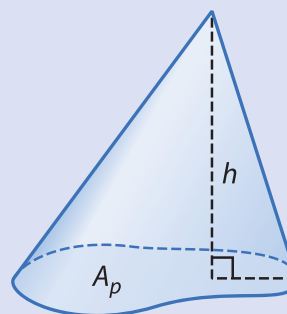


Kartion tilavuus

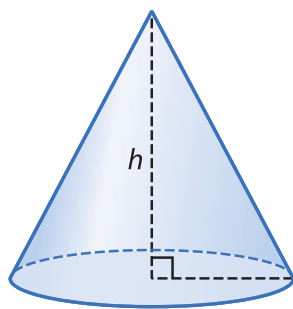
Lause

Kartion tilavuus V on kolmasosa pohjan pinta-alan A_p ja kartion korkeuden h tulosta.

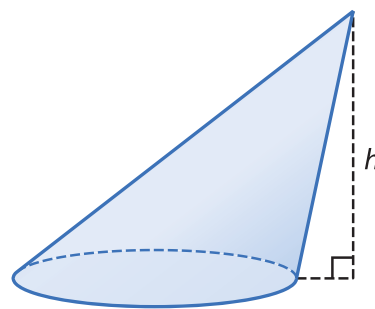
$$V = \frac{1}{3} A_p \cdot h$$



Kartiota, jonka pohja on ympyrä, kutsutaan *ympyräkartioksi*.

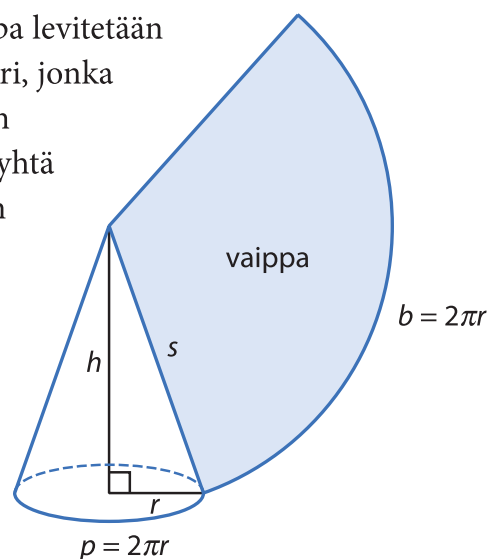


suora ympyräkartio



vino ympyräkartio

Kun suoran ympyräkartion vaippa levitetään tasoon, muodostuu ympyräsektori, jonka säteenä on suoran ympyräkartion sivujana s . Sektorin kaari b on yhtä pitkä kuin kartion pohjaympyrän piiri p .

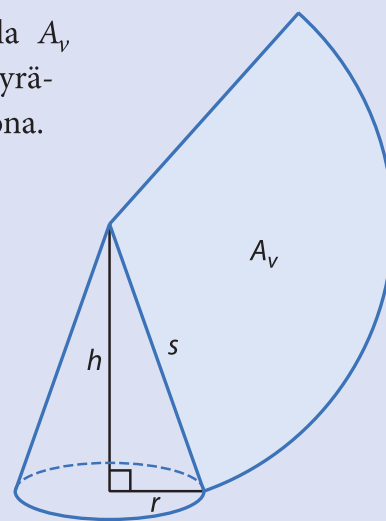


Suoran ympyräkartion vaipan pinta-ala

Lause

Suoran ympyräkartion vaipan pinta-ala A_v saadaan pohjaympyrän säteen r , ympyräkartion sivujan s ja vakion π tulona.

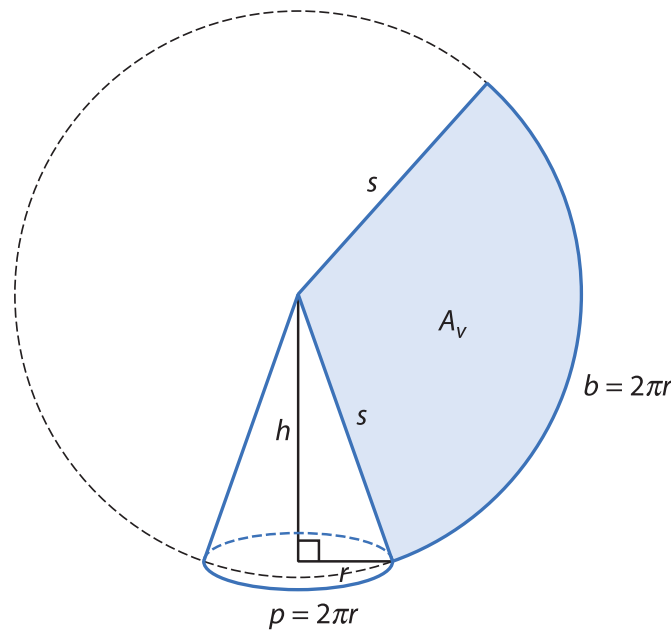
$$A_v = \pi r s$$



TODISTUS

Todistetaan suoran ympyräkartion vaipan pinta-alan lauseke

$A_v = \pi r s$ oikeaksi.



Avattu vaippa on sektori, jonka kaari b on yhtä pitkä kuin kartion pohjaympyrän piiri p eli $b = 2\pi r$.

Vaippasektori on osa s -säteisestä ympyrästä, jonka piiri on $2\pi s$.

Vaippasektorin pinta-ala A_v on ympyrän koko pinta-alasta πs^2 yhtä suuri osa kuin kaaren $2\pi r$ pituus on koko ympyrän kehän pituudesta $2\pi s$.

$$\frac{A_v}{\pi s^2} = \frac{\cancel{2} \pi r}{\cancel{2} \pi s} \quad \Big| \cdot \pi s^2$$

$$A_v = \frac{r \cdot \pi s^{\cancel{2}}}{\cancel{s}} = r \cdot \pi s = \pi r s$$

Saatiin tulos $A_v = \pi r s$. $\square$



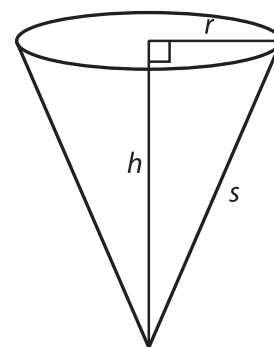
Elokuvateatterissa myydään popcornia suoran ympyräkartion muotoisessa 2,0 litran vetoisessa tötterössä. Marikki mittasi tötterön suuaukon halkaisijan ja sai tulokseksi 18,0 cm. Laske popcornitötterön vaipan pinta-ala.

RATKAISU

Muutetaan yksiköt yhteismitallisiksi. Kartion tilavuus on $V = 2,0 \text{ L} = 2,0 \text{ dm}^3$.

Ympyräkartion pohjan säde on

$$r = \frac{18,0 \text{ cm}}{2} = 9,0 \text{ cm} = 0,90 \text{ dm}.$$



Vaipan pinta-alan laskemiseksi tarvitaan säteen lisäksi sivujana s .

Ratkaistaan ensin kartion korkeus h yhtälöstä, joka saadaan tilavuuden avulla.

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$V = 2,0 \text{ ja } r = 0,90$$

$$2,0 = \frac{1}{3} \pi \cdot 0,90^2 h \quad | \cdot 3$$

$$6,0 = \pi \cdot 0,90^2 h \quad | : (\pi \cdot 0,90^2)$$

Yhtälön voi ratkaista myös laskimella.

$$h = \frac{6,0}{\pi \cdot 0,90^2} \\ = 2,357... \text{ (dm)}$$

Sivujanen s saadaan Pythagoraan lauseen avulla.

$$s = \sqrt{h^2 + r^2} \\ = \sqrt{(2,357...)^2 + 0,90^2} \\ = 2,523... \text{ (dm)}$$

Kartion vaipan pinta-ala on

$$A_v = \pi r s = \pi \cdot 0,90 \cdot 2,523... = 7,135... \approx 7,1 \text{ (dm}^2\text{)}.$$

VASTAUS

$$7,1 \text{ dm}^2$$

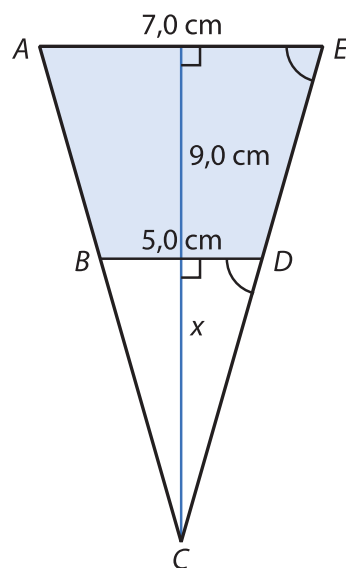
ESIMERKKI 2

Juomalasi on muodoltaan katkaistu ympyräkartio, jonka yläreunan sisähalkaisija on 7,0 cm ja alareunan sisähalkaisija 5,0 cm. Lasin korkeus on 9,0 cm. Laske lasin tilavuus desilitroina.



RATKAISU

Täydennetään katkaistu kartio ympyräkartioksi ja piirretään poikkileikkauskuva.



$\triangle ACE \sim \triangle BCD$ kk-lauseen mukaan, koska

- $\sphericalangle C$ on yhteinen
- $\sphericalangle AEC = \sphericalangle BDC$ (samankohittaiset kulmat ja $AE \parallel BD$).

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan kartion katkaistun kärkiosan korkeus x .

$$\frac{7,0}{5,0} = \frac{9,0 + x}{x}$$

$$7,0x = 5,0(9,0 + x)$$

$$7,0x = 45,0 + 5,0x$$

$$2,0x = 45,0 \quad | :2,0$$

$$x = 22,5$$

Kerrotaan ristiin.

Yhtälön voi ratkaista myös laskimella.

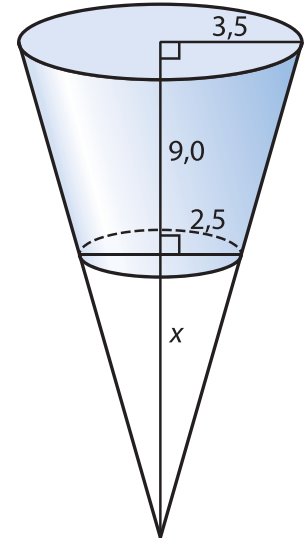
Täydennetyn kartion korkeus on
 $x + 9,0 = 22,5 + 9,0 = 31,5$ (cm).

Ylemmän pohjaympyrän säde on

$$\frac{7,0}{2} = 3,5 \text{ (cm)}$$

ja alemman pohjaympyrän säde

$$\frac{5,0}{2} = 2,5 \text{ (cm)}.$$



Juomalasin tilavuus saadaan vähentämällä koko kartion tilavuudesta katkaistun kärkiosan tilavuus.

Kartion tilavuus on

$$V = \frac{1}{3} A_p h = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

$$\begin{aligned} V_{\text{juomalasi}} &= V_{\text{koko}} - V_{\text{kärki}} \\ &= \frac{1}{3} \pi \cdot 3,5^2 \cdot (x + 9,0) - \frac{1}{3} \pi \cdot 2,5^2 \cdot x \quad x = 22,5 \text{ ja } x + 9,0 = 31,5 \\ &= \frac{1}{3} \pi \cdot 3,5^2 \cdot 31,5 - \frac{1}{3} \pi \cdot 2,5^2 \cdot 22,5 \\ &= 256,82... \approx 260 \text{ (cm}^3\text{)} \end{aligned}$$

Juomalasin tilavuus on

$$V_{\text{juomalasi}} = 260 \text{ cm}^3 = 0,26 \text{ dm}^3 = 0,26 \text{ L} = 2,6 \text{ dl}.$$

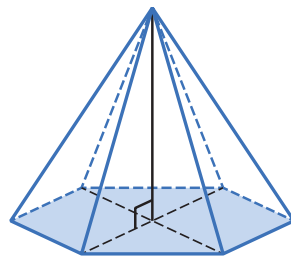
VASTAUS

2,6 dl

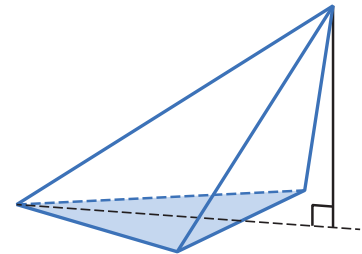
Pyramidi

Kartiota, jonka pohjana on monikulmio, kutsutaan *pyramidiksi*.

Pyramidi on säännöllinen, mikäli se on suora ja sen pohjana on säännöllinen monikulmio. Tällöin pyramidin vaippa muodostuu yhtenevistä tasakylkisistä kolmioista.



säännöllinen kuusisivuinen pyramidi

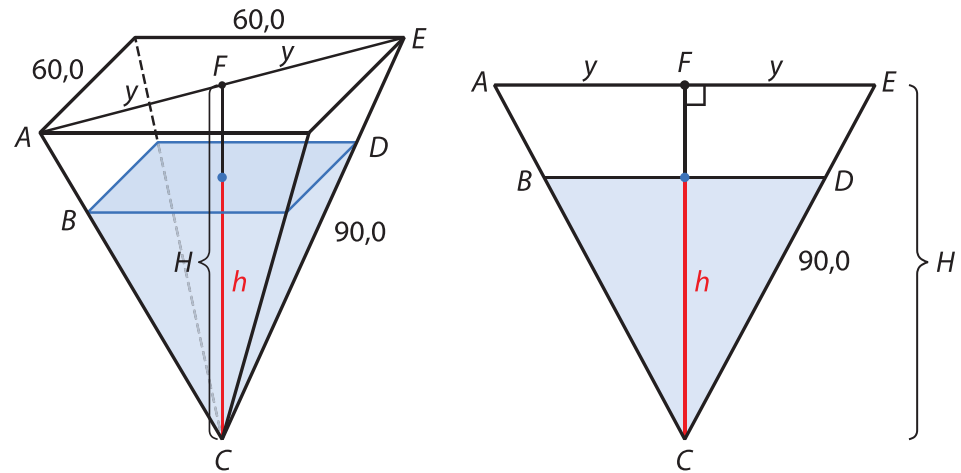


vino kolmisivuinen pyramidi

Neljästä samanlaisesta tasakylkisestä kolmiosta valmistetaan kärjellään seisovan säännöllisen pyramidin muotoinen säiliö. Kolmioiden kyljet ovat pituudeltaan 90,0 cm ja kannat ovat 60,0 cm. Säiliö täytetään tilavuudeltaan puolilleen vettä. Kuinka korkealle vesi nousee?

RATKAISU

Merkitään säiliön korkeutta kirjaimella H , kysyttyä veden korkeutta kirjaimella h sekä säiliön pohjan lävistäjää $2y$:llä. Piirretään säiliöstä poikkileikkauskuva pohjan lävistäjän suuntaisesti.



Suorassa oleva säiliö ja sen vedellä täytetty osa ovat yhdenmuotoiset. Poikkileikkauskuvan merkinnöillä $\triangle ACE \sim \triangle BCD$ kk-lauseen perusteella, koska

- $\sphericalangle C$ on yhteinen
- $\sphericalangle CAE = \sphericalangle CBD$ (samankohtaiset kulmat ja $AE \parallel BD$).

Lasketaan alkuperäisen säiliön korkeus H ja selvitetään sen jälkeen yhdenmuotoisuuden perusteella kysytty veden korkeus h .

Säiliön pohja on neliö, joten Pythagoraan lauseen avulla voidaan ratkaista pohjan lävistäjän pituus $2y$ ja edelleen sen puolikas y .

$$(2y)^2 = 60^2 + 60^2$$

$$4y^2 = 2 \cdot 60^2 \quad | : 4$$

$$y^2 = \frac{60^2}{2}$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{60^2}{2}} = \pm 30\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

Yhtälön voi ratkaista myös laskimella.

Lävistäjän puolikkaan pituus on positiivinen, joten $y = 30\sqrt{2}$ cm.

Muodostetaan Pythagoraan lauseen avulla kolmiosta CEF yhtälö.

$$H^2 + y^2 = 90^2$$

$$H^2 + \frac{60^2}{2} = 90^2$$

$$H^2 = 90^2 - \frac{60^2}{2} = 6300$$

$$H = \pm \sqrt{6300}$$

Sijoitetaan $y^2 = \frac{60^2}{2}$.

Yhtälön voi ratkaista myös laskimella.

Säiliön korkeus on positiivinen, joten $H = \sqrt{6300}$ cm.

Merkitään säiliöön kaadetun veden määrää kirjaimella V . Vettä on puolet säiliön tilavuudesta, joten koko säiliön tilavuus on $2V$. Muodostetaan yhtälö.

$$\frac{\cancel{V}}{2\cancel{V}} = \left(\frac{h}{H}\right)^3$$

$$\frac{1}{2} = \left(\frac{h}{\sqrt{6300}}\right)^3$$

$$\left(\frac{h}{\sqrt{6300}}\right)^3 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{h}{\sqrt{6300}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \quad | \cdot \sqrt{6300}$$

$$h = \frac{\sqrt{6300}}{\sqrt[3]{2}} = 62,99... \approx 63,0 \text{ (cm)}$$

Yhdenmuotoisten kappaleiden tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio.

Yhtälön voi ratkaista myös laskimella.

Vesi nousee 63,0 cm:n korkeudelle.

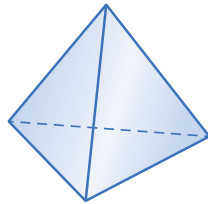
VASTAUS

63,0 cm

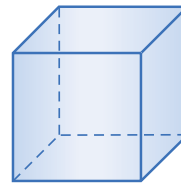
Säännölliset monitahokkaat

Monitahokas on kupera, jos sen jokainen avaruuslävistäjä kulkee monitahokkaan sisällä.

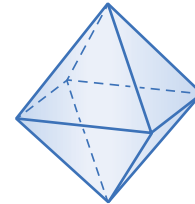
Monitahokas on säännöllinen, jos se on kupera, sen kaikki tahkot ovat yhdenmuotoisia monikulmioita ja sen jokaisesta kärjestä lähtee yhtä monta särmää. Säännöllisiä monitahokkaita kutsutaan Platonin kappaleiksi. Yksinkertaisin Platonin kappaleista on säännöllinen 4-tahokas eli tetraedri, jonka pinta muodostuu neljästä yhtenevästä tasasivuisesta kolmiosta. Antiikin kreikkalaiset osoittivat, että Platonin kappaleita on vain viisi.



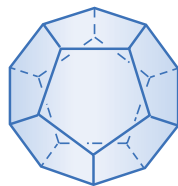
säännöllinen
tetraedri
(4-tahokas)



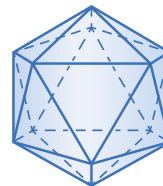
säännöllinen
heksaedri
(kuutio)



säännöllinen
oktaedri
(8-tahokas)

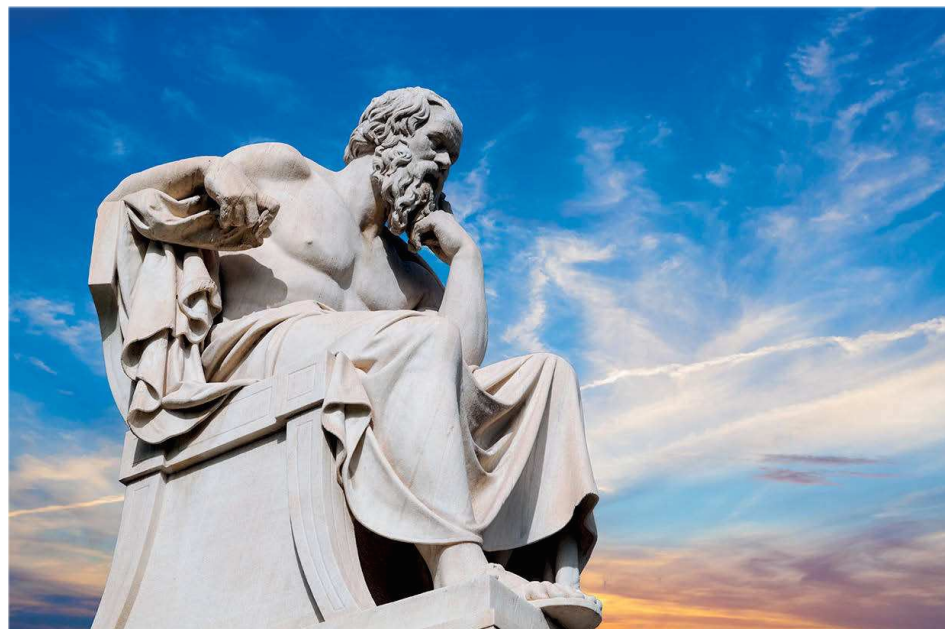


säännöllinen
dodekaedri
(12-tahokas)



säännöllinen
ikosaedri
(20-tahokas)

Platon (427–347 eaa.) oli kreikkalainen filosofi, jota pidetään yhtenä antiikin merkittävimmistä filosofiista.

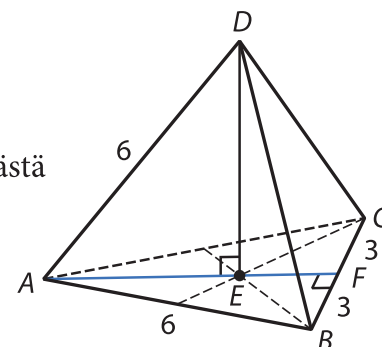


ESIMERKKI 4

Laske säännöllisen tetraedrin tilavuus, kun tetraedrin särmän pituus on 6.

RATKAISU

Säännöllinen tetraedri on suora kolmi-sivuinen pyramidi, joka muodostuu neljästä yhtenevästä tasasivuisesta kolmiosta.



Mediaani eli keskijana on jana, joka yhdistää kolmion kärjen sen vastaisen sivun keskipisteeseen.

Säännöllisen tetraedrin korkeusjanan toinen pää on pohjan painopisteessä E . Jana AF on pohjan mediaani, joten piste F on janan BC keskipiste. Painopiste eli mediaanien leikkauspiste jakaa mediaanit suhteessa $2 : 1$ kärjestä lukien, joten $|AE| = \frac{2}{3}|AF|$. Pohjakolmion korkeus $|AF|$ saadaan Pythagoraan lauseen avulla kolmiosta ABF .

$$|AF| = \sqrt{|AB|^2 - |BF|^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

$$|AE| = \frac{2}{3}|AF| = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

Tetraedrin korkeus $|ED|$ saadaan Pythagoraan lauseen avulla suorakulmaisesta kolmiosta AED .

$$\begin{aligned} |ED| &= \sqrt{|AD|^2 - |AE|^2} \\ &= \sqrt{6^2 - (2\sqrt{3})^2} \\ &= \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \end{aligned}$$

$$|AD| = 6 \text{ ja } |AE| = 2\sqrt{3}$$

Tasasivuisessa kolmiossa kaikki sivut ovat yhtä pitkät ja kaikki kulmat 60° .

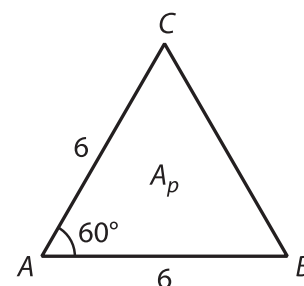
Lasketaan tetraedrin tilavuus.

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} A_p \cdot h \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \sin 60^\circ \cdot 2\sqrt{6} \\ &= 18\sqrt{2} \end{aligned}$$

Tetraedrin tilavuus on $18\sqrt{2}$.

VASTAUS

$$18\sqrt{2}$$



Harjoitustehtäviä

Sarja I

303. Piirrä geometriaohjelmalla seuraavat kappaleet.

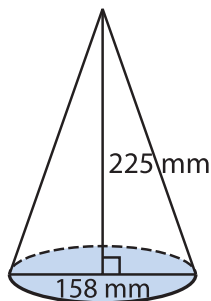


- a) Suora ympyräkartio, jonka pohjan säde on 1,5 cm ja korkeus 4 cm.
- b) Säännöllinen nelisivuinen pyramidi, jonka pohjasärmän pituus on 5 cm ja korkeus 8 cm.
- c) Säännöllinen kolmisivuinen pyramidi, jonka pohjasärmän pituus on 3 cm ja korkeus 6 cm.

304. Suora ympyräkartio leikataan tasolla, joka kulkee huipun ja pohjan halkaisijan kautta. Saatua leikkauskuvio on tasasivuinen kolmio, jonka sivun pituus on 10,5 cm. Laske kartion vaipan pinta-ala.



305. Suoran ympyräkartion pohjan halkaisija on 158 mm ja korkeus 225 mm. Laske kartion tilavuus litroina.



306. Suoran ympyräkartion pohjan säde on 8,25 cm ja tilavuus 5,45 litraa. Laske
a) kartion korkeus b) vaipan pinta-ala.

307. Vesiämpäri on muodoltaan katkaistu ympyräkartio, jonka yläreunan sisähalkaisija on 27,5 cm, alareunan sisähalkaisija 20,0 cm ja korkeus 24,7 cm. Laske ämpärin tilavuus litroina.



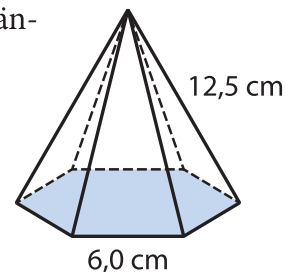
308. Samasta materiaalista valmistetaan umpinainen pallo, kuutio, suora ympyräkartio, säännöllinen nelisivuinen pyramidi ja suora ympyrälieriö. Kukin niistä voidaan juuri ja juuri pakata samanlaiseen kuution muotoiseen pakkauslaatikkoon. Aseta kappaleet painon mukaiseen suuruusjärjestykseen pienimmästä alkaen. Perustele.

309. Sadevesimittarina käytettiin kärjellään seisovaa ympyräkartiota, jonka korkeus oli 15 cm ja pohjan säde 20 cm. Sateen jälkeen mittarin vedenpinta oli 7 cm:n korkeudella. Kuinka monta millimetriä oli sademäärä? [yo pitkä k1994]
Tarkennus: Sademäärällä tarkoitetaan maahan sataneen vesikerroksen paksuutta.

310. Laske kartion tilavuus, kun sen vaippa levitettynä tasoon on puoliympyrä, jonka halkaisija on 20.

311. Säännöllisen nelisivuisen pyramidin pohjasärmän pituus on 2,85 metriä ja sivusärmän pituus on 5,15 metriä. Laske pyramidin tilavuus.

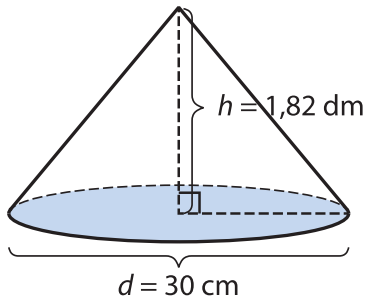
312. Lasista valmistetun säännöllisen kuusisivuisen pyramidin pohjasärmän pituus on 6,0 cm ja sivusärmän pituus 12,5 cm. Pyramidi täytetään koristehiekalla korkeuden puoliväliin. Mikä on tarvittavan hiekan tilavuus?



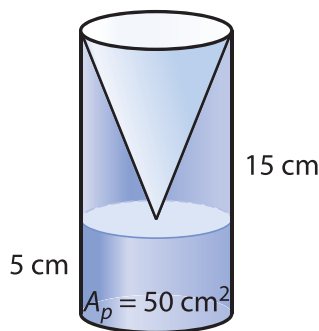
313. Laske säännöllisen tetraedrin särmän pituus, kun tetraedrin tilavuus on 1,20 litraa. Anna vastaus senttimetreinä.



314. Suoran ympyräkartion pohjan halkaisija on 30 cm ja korkeus 1,82 dm. Laske kartion tilavuus.



315. Kuvan mukaisen lasista valmistetun maljakon korkeus on 15 cm ja pohjan pinta-ala 50 cm^2 . Laske lasisen maljakon massa, kun lasin tiheys on 2250 kg/m^3 .



316. Suoran ympyräkartion pohjan ja sivujan välinen kulma on 60° astetta. Laske kartion tarkka tilavuus, kun sivujan pituus on $\sqrt{6}$.
317. Kärjellään seisovan ympyräkartion muotoisen juomalasin sisäosan korkeus 10,0 cm ja yläosan halkaisija 7,0 cm. Yhdeksään lasiin kaadetaan kaikkiin yhtä paljon tyrnimehua. Kuinka korkealle mehun pinta laseissa nousee, kun mehua on kaikkiaan 7,5 desilitraa?

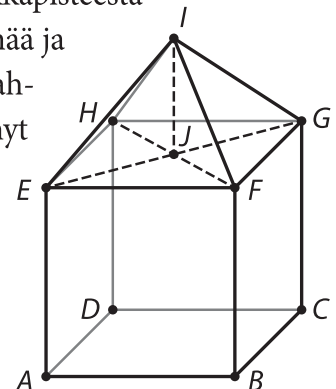
318. Jäätaiteilijalta pyydettiin taideteosta, joka on säännöllinen nelisivuinen pyramidi. Taiteilija ei saanut taideteosta valmiiksi ensimmäisen päivän aikana, vaan häneltä jäi pyramidin huippu tekemättä. Laske kuinka korkea pyramidi on valmistuksessaan, kun keskeneräisen katkaistun pyramidin pohja on neliö, jonka sivun pituus on 5,0 m ja yläosa on neliö, jonka sivun pituus 1,0 m. Keskeneräisen rakennelman korkeus on 3,0 m.

319. Suoran ympyräkartion korkeus on 5,0 cm, ja sen pohjan säde on 2,0 cm. Kartio katkaistaan niin, että yläreunan säde on 1,0 cm. Laske katkaistun kartion
a) tilavuus b) vaipan pinta-ala.
[yo pitkä k2012 mukailtuna]

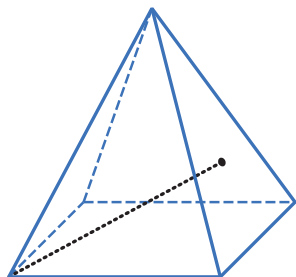
320. Suoran ympyräkartion korkeus on 12 metriä ja pohjan halkaisija 8 metriä. Kartioon asetetaan mahdollisimman suuri kuutio. Laske kuution tilavuus.

321. Huoneen katto muodostuu neliöpohjaisesta pyramidista. Muuten huone on kuution muotoinen. Kuution särmän pituus on a ja huoneen seinän $ABFE$ ja katon kolmion EFI välinen kulma on 150° sisäpuolelta mitattuna

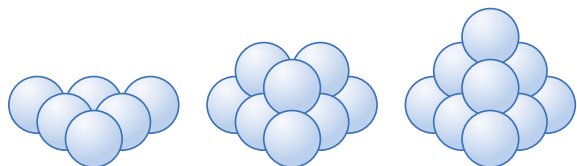
- a) Kuinka korkea huone on korkeimmasta kohdasta?
b) Laske huoneen tilavuus
c) Kuinka paljon sähköjohtoa tarvitaan, kun lattian nurkkapistestä A vedetään seinää ja kattoa pitkin mahdollisimman lyhyt sähköjohto katon keskipisteeseen I .



322. Puupalikka on säännöllisen nelisivuisen pyramidin muotoinen. Puupalikkaan porataan halkaisijaltaan pieni reikä sivutahkon keskipisteestä pohjan alanurkkaan. Laske reiän pituus sekä reiän ja pohjan välinen kulma, kun pyramidin sivusärmän pituus on 25 cm ja pohjasärmän pituus 14 cm.



323. Kymmenestä samankokoisesta pallosta tehdään kolmisivuinen pyramidi niin, että ensimmäisessä kerroksessa on 6 palloa, toisessa on 3 palloa ja viimeisessä on yksi pallo. Laske pallon tarkka säde ja likiarvo sentin kymmenesosan tarkkuudella, kun pallopyramidin korkeus on 10 cm.



324. Kun säännöllisen oktaedrin tahkojen keskipisteet yhdistetään toisiinsa, sen sisään muodostuu toinen Platonin kappale. Tutki, mikä tämä kappale on, ja määritä sen särmän pituus, kun oktaedrin särmän pituus on a .
325. Metaanimolekyyli CH_4 voidaan ajatella säännölliseksi tetraedriksi, jossa vetyatomit H ovat kärjissä ja hiiliatomi C keskipisteessä, yhtä kaukana kärjistä. Määritä metaanimolekyylin sidoskulma, ts. hiiliatomista kahteen vetyatomiin vedettyjen janojen välinen kulma. [yo pitkä k1996]

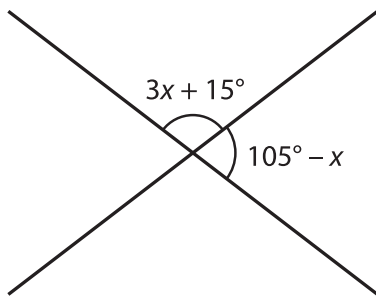
Kertaus

1 TASOGEOMETRIAN PERUSTEITA

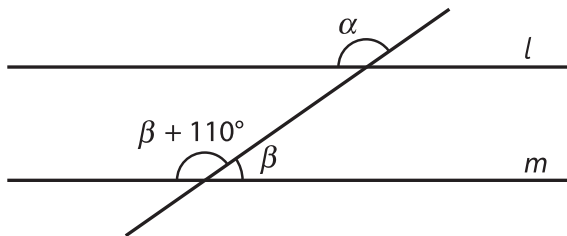
1. Kulma α on 35° pienempi kuin kulma β . Laske kulman α suuruus, kun α ja β ovat toistensa

- a) komplementtikulmia
- b) suplementtikulmia
- c) eksplementtikulmia.

2. Määritä suorien välinen kulma.

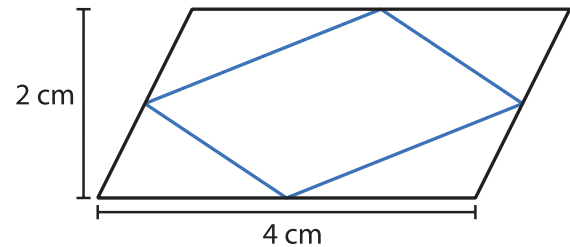


3. Suorat l ja m ovat yhdensuuntaiset. Määritä kulmat α ja β .



4. Piste P jakaa janan AB suhteessa $1 : 5$. Piste Q taas jakaa janan AB suhteessa $7 : 2$. Laske janan PQ pituus, kun janan AB pituus on 18 .

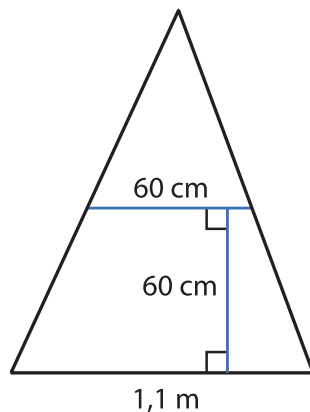
5. Suunnikkaan sisälle piirretään pienempi suunnikas, jonka kärjet ovat alkuperäisen suunnikkaan sivujen keskipisteissä. Laske pienemmän suunnikkaan pinta-ala käyttämällä kuvioon merkittyjä pituuksia. [yo lyhyt s2015]



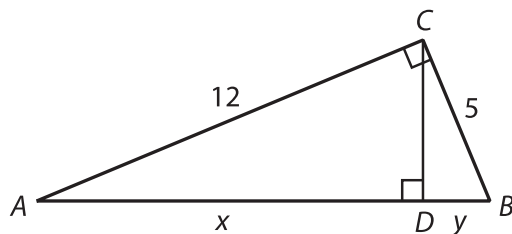
6. Tasasivuisen kolmion piiri on yhtä suuri kuin suunnikkaan piiri. Suunnikkaan toinen sivu on 30% pidempi kuin toinen sivu. Kuinka monta prosenttia kolmion sivu on pidempi kuin suunnikkaan lyhyempi sivu?
7. Neliön muotoiselle tontille rakennetaan suorakaiteen muotoinen talo, jonka pitempi sivu on puolet tontin sivusta ja lyhyempi kolmasosa tontin sivusta. Piha-aluetta jää tällöin 400 m^2 . Laske tontin pinta-ala. [yo pitkä s1995]
8. Monikulmion kulmien summa on 75% suurempi kuin kymmenkulmion kulmien summa. Kuinka monta kulmaa monikulmiossa on?
9. Osoita, että suunnikkaan vierekkäisten kulmien summa on 180° .

10. Kaikki taulutelevisiot, joiden kuvasuhde (kuvaruudun leveyden suhde korkeuteen) on $16 : 9$, ovat keskenään yhdenmuotoiset. Jos kuvaruudun koko (lävistäjän pituus) on 32 tuumaa, niin sen leveys on 71 cm. Kuinka leveä on 55 tuuman kuvaruutu?

11. Laske kuvan suuren kolmion korkeus.



12. Laske kuvan kolmiosta suhde $x : y$. Hypotenuusan AB pituus on 13 .



13. Kun jana jaetaan kahteen osaan kultaisen leikkauksen suhteessa, on lyhemmän ja pidemmän osan välinen mittakaava sama kuin pidemmän osan ja koko janan välinen mittakaava. Määritä kultaisen leikkauksen suhde eli edellä mainitun mittakaavan arvo.

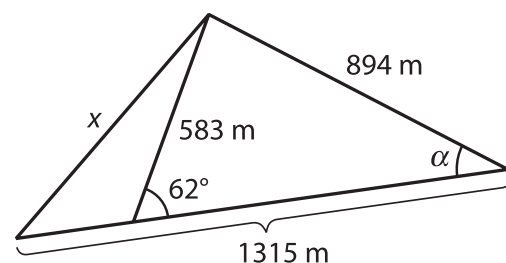
14. Suorakulmaisen särmiön muotoisen veistoksen leveys on $2,00$ m, pituus $1,00$ m ja korkeus $3,00$ m. Veistoksesta tehdään pienoismalli, jonka tilavuus on sadasosa alkuperäisen veistoksen tilavuudesta. Mitkä ovat pienoismallin mitat? [yo lyhyt s1998]

15. Lentokoneesta tehdään pienoismalli mittakaavassa $1 : 75$. Kuinka suuri on pienoismallin siiven pinta-ala, kun lentokoneen siiven pinta-ala on 190 m^2 ?

16. Osoita, että yhdenmuotoisten kolmioiden pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö.

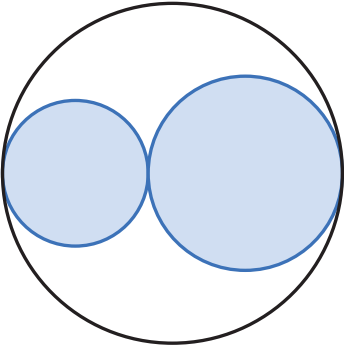
17. Suorakulmion, jonka sivujen pituudet ovat 18 cm ja 30 cm a) sivujen pituuksia b) pinta-alaa pienennettiin 15 prosenttia niin, että yhdenmuotoisuus säilyy. Määritä uuden suorakulmion sivujen pituudet.

18. Suorakulmaisen kolmion hypotenuusan pituus on 2,3 m ja toinen kateeteista on 1,8 m.
a) Laske toisen kateetin pituus.
b) Määritä kolmion pienin kulma.
19. Tasakylkisen kolmion kanta on pituudeltaan 6,8 cm sekä kyljet 4,9 cm. Määritä kolmion kulmat asteen tarkkuudella.
20. Sirkusteltassa on kaksi pystysuoraa tukimastoa, joiden korkeudet ovat 8,0 m ja 5,2 m. Mastot ovat 3,4 m etäisyydellä toisistaan. Molemmat tolpat on tuettu huipusta lähtevällä vaijerilla, jonka alapää on kiinnitetty toisen tolpan tyveen. Missä kulmassa vaijerit leikkaavat toisensa?
21. Puu kasvaa pohjoiseen tasaisesti viettävällä rinteellä, jonka kaltevuuskulma on 17° . Kun aurinko paistaa suoraan etelästä, puusta lankeaa 29 m pitkä varjo alarinteeseen. Määritä puun korkeus, kun aurinko on keskipäivällä 41° korkeudella.
22. **a)** Suorakulmaisen kolmion kateettien ja hypotenuusan pituudet $a < b < c$ muodostavat geometrisen jonon. Määritä jonon suhdeluku q .
b) Suorakulmaisen kolmion kateettien ja hypotenuusan pituudet $a < b < c$ muodostavat aritmeettisen jonon. Määritä suhde $a : b : c$. [yo pitkä s2015]
23. Kolmion kaksi sivua ovat 8 ja 5 sekä näiden välinen kulma 60° . Määritä kolmion pinta-alan **a)** tarkka arvo **b)** kaksidesimaalinen likiarvo.
24. Kolmion kaksi kulmaa ovat 27° ja 39° sekä näiden välisen sivun pituus 3,14 m. Määritä **a)** kolmion muut kulmat ja sivut **b)** kolmion pinta-ala.
25. Puuseppä suunnittelee kolmion muotoista pöytälevyä, jonka kaksi sivua ovat 94 cm ja 68 cm. Pöytälevyn pinta-alan pitäisi olla vähintään $0,40 \text{ m}^2$. Kerro puuseppälle, mikä näiden sivujen välisen kulman pitää olla.
26. Kolmion lyhimmän sivun pituus on 3,0 cm ja pienin kulma on $28,0^\circ$. Kolmiossa on myös sivu, jonka pituus on 5,0 cm. Määritä kolmion suurin kulma ja pisin sivu kymmenyksen tarkkuudella.
27. Kolmion sivujen pituudet ovat 23, 34 ja 45. Määritä kolmion suurin kulma asteen kymmenyksen tarkkuudella.
28. Veneilijä mittaa sumuisessa säässä merikortilta matkan kohteeseensa ja saa tulokseksi 3,8 km. Hän ajaa tuon matkan kompassisuuntaan, joka poikkeaa erannon ja eksymän takia halutusta suunnasta $6,7^\circ$. Kuinka kauas veneilijä päätyy haluamastaan määränpäästä?
29. Määritä oheisesta kuviosta sivu x sekä kulma α .

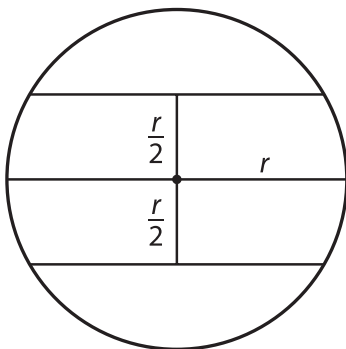


30. Tutkahavainnon mukaan kaksi lentokonetta ovat 4590 m ja 5920 m etäisyydellä tutkasta. Määritä lentokoneiden välinen etäisyys, kun suuntien välinen kulma on 28° .
31. Lökkikalliolta näkyy 1,76 km päässä oleva punainen väylämerkki. Jos kääntää katsetaan oikealle, näkee majakan. Kartasta mitattu etäisyys Lökkikalliolta majakalle on 2,81 km ja majakalta punaiselle väylämerkille 2,14 km. Kuinka suuressa kulmassa Lökkikallion ja majakan väli näkyy punaiselta väylämerkiltä katsottuna? Anna vastaus asteen tarkkuudella.
32. Kahden kirkon välillä on korkea vuori. Molemmat kirkot näkyvät paikkaan, josta on 7 km toiselle ja 4 km toiselle kirkolle. Tähtäyssuunnat mainitusta paikasta kirkoihin muodostavat keskenänsä $62^\circ 21' 20''$ suuruisen kulman. Kuinka etäällä kirkot ovat toisistaan? [yo 1874]
33. Kolmion sivujen pituudet ovat 21, 27 ja 36. Kuinka pitkiin osiin kolmion pienimmän kulman puolittaja jakaa vastaisen sivun?
34. Tasakylkisen kolmion kylkien pituus on 24 ja kannan pituus 32. Määritä kolmion painopisteen etäisyys **a)** huippukulman **b)** kantakulman kärjestä.
35. Tasasivuisen kolmion ympäri piirretyn ympyrän säteen pituus on 8. Määritä kolmion sivun pituus.
36. Kolmio on tasakylkinen ja suorakulmainen. Laske tämän kolmion ympäri ja sisään piirrettyjen ympyröiden säteiden pituussuhteen.

4 YMPYRÄ

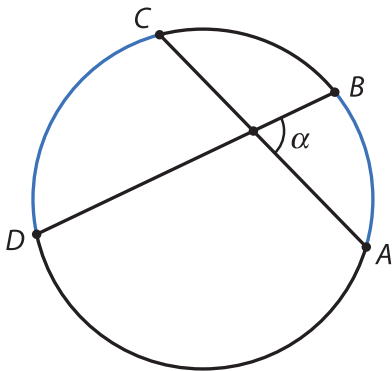
37. Normaali pizzan pinta-ala on puolet perhepizzan pinta-alasta. Perhepizzan halkaisija on 35 cm. Laske normaali pizzan halkaisija.
38. Pienempien ympyröiden halkaisijat ovat 3 ja 4. Kuinka monta prosenttia pikkuympyrät peittävät isomman ympyrän pinta-alasta?
- 
39. Ympyrä kulkee neliön jokaisen kärkipisteen kautta. Kuinka monta prosenttia ympyrän piiri on neliön piiriä pidempi?
40. Tasakylkisen kolmion kylkien pituus on 8,0 cm ja kannan pituus 12 cm. Kolmion ympäri piirretään ympyrä, joka kulkee kolmion jokaisen kärjen kautta. Laske ympyrän kehän pituus.
41. Tasasivuisen kolmion kanta halkaisijana piirretään puoliympyrä, joka leikkaa kolmion sivuja.
- a)** Piirrä kuvio.
- b)** Kuinka monta prosenttia puoliympyrän pinta-alasta on kolmion ulkopuolella?

42. Ympyrän muotoinen pizza jaetaan kuuteen osaan kuvan mukaisesti. Kumpi pala on suurempi: reunalta leikattu segmentti vai keskeltä leikattu pala? Kuinka monta prosenttia suurempi?



43. Arkeologi löysi ruukunsirpaleen, joka on poikkileikkaukseltaan pala ympyrän kaarta. Kaaren päiden välinen etäisyys on 26,0 cm. Kun palan asettaa pöydälle, keski-kohta jää 7,4 cm pöydän pinnan yläpuolelle. Laske alkuperäisen ruukun halkaisija.

44. Osoita, että kulman α asteluku on kaarten AB ja CD astelukujen keskiarvo.

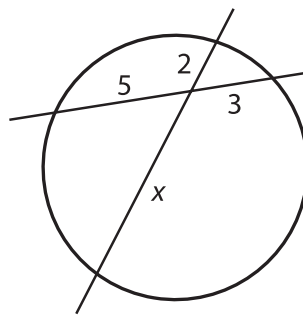


45. Ympyrä kulkee neliön $ABCD$ kärjen A sekä sivujen AB ja AD keskipisteiden kautta.

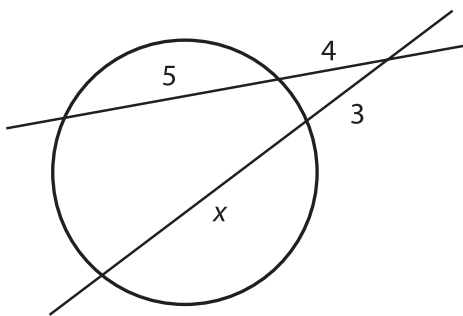
- a) Piirrä kuvio.
b) Osoita, että ympyrä kulkee neliön keskipisteen kautta.
c) Laske ympyrän säde, kun neliön sivun pituus on a .

46. Ratkaise x .

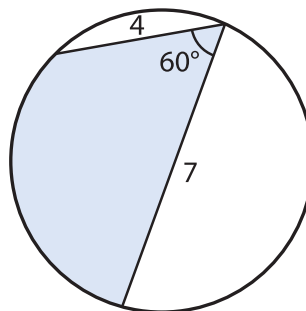
a)



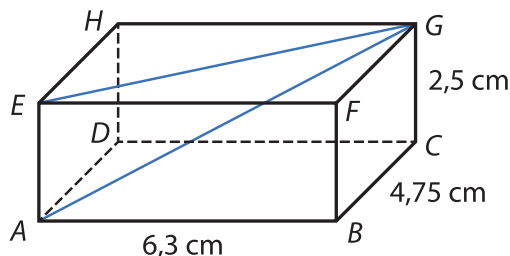
b)



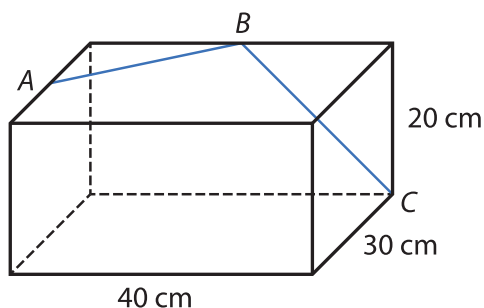
47. Laske varjostetun alueen pinta-ala.



48. Laske suorakulmaisen särmiön
 a) pohjan lävistäjän EG pituus
 b) avaruuslävistäjän AG pituus
 c) lävistäjien EG ja AG välisen kulman suuruus asteen tarkkuudella.



49. Kuution muotoisen laatikon ylänurkasta työnnetään läpi tikku. Tikku läpäisee pohjatahkon sen keskipisteessä. Laske asteen kymmenyksen tarkkuudella, kuinka suuressa kulmassa tikku lävistää pohjan.
50. A4-kokoinen ($210 \text{ mm} \times 297 \text{ mm}$) pahvinpalanen on taiteltu lyhyemmän sivun suuntaisesti niin, että taitosten välinen kulma on 90° . Laske pahville piirretyn lävistäjän puolikkaiden välinen kulma kolmen numeron tarkkuudella.
51. Kuvan suorakulmaisessa särmiössä pisteet A ja B ovat särmien keskipisteet ja C on särmiön kärki. Laske kahden numeron tarkkuudella
 a) janan AB pituus
 b) janan BC pituus
 c) janan AC pituus
 d) suorien AB ja BC välinen kulma.

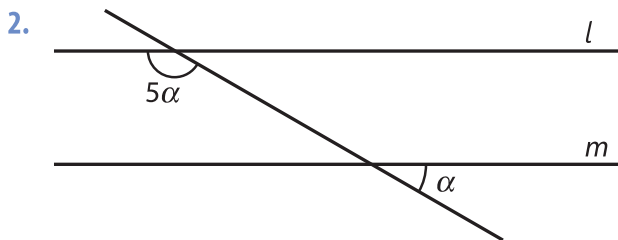


52. Pallon tilavuus on 7,45 litraa. Laske pallon pinta-ala. Anna vastaus neliösenttimetrin tarkkuudella.
53. Pallon säteen pituus pienenee 25 %. Kuinka monta prosenttia pallon a) pinta-ala b) tilavuus tällöin pienenee?
54. Ilmassa leijuva pallonmuotoinen saippuakupla laskeutuu pöydälle ja litistyy puolipallon muotoiseksi tilavuuden säilyessä muuttumattomana. Kuinka monta prosenttia kuplan säde suurenee?
55. Laihia ja Kaavi ovat likimain 63. leveysasteella. Niiden leveyspiiriä pitkin mitattu etäisyys on 330 kilometriä. Kuinka paljon aikaisemmin aurinko nousee Kaavilla kuin Laihialla? Maapallon säde on 6370 km. [yo lyhyt k1997]
56. Maapallon säde on 6371 km, ja sen pohjoisen napapiirin leveysaste on $66,5^\circ$. Pohjoiselta napapiiriltä valitaan pisteet A ja B , joiden pituusasteiden erotus on 90 astetta.
 a) Määritä pisteiden A ja B välisen viiva-suoran tunnelin pituus.
 b) Määritä pisteiden A ja B välisen lyhyemmän napapiirin kaaren pituus. [yo pitkä k2016]
57. Suorakulmaisen särmiön muotoisen luokahuoneen pituus on 10,25 m, leveys 6,5 m ja korkeus 4,5 m. Kuinka monta litraa ilmaa huoneeseen mahtuu?
58. TulitikkurAsian sisämitat ovat pituus 4,1 cm, leveys 2,8 cm ja korkeus 1,2 cm. Mahtuuko 4,9 cm pituinen parsinneula rAsian sisään?

59. Kupariputken pituus on 10,0 m, sisähalkaisija on 22,0 mm ja ulkohalkaisija 26,0 mm. Laske putken massa, kun kuparin tiheys on 8960 kg/m^3 .
60. Kun lieriön muotoiseen astiaan upotettiin kahdeksan saman kokoista metallipalloa, veden pinta nousi 11,0 mm. Laske metallipallon halkaisija millimetrin kymmenyksen tarkkuudella. Astian sisähalkaisija on 44,0 mm.
61. Vinon ympyrälieriön muotoinen tanko on valmistettu messingistä. Lieriön sivujan pituus 13,0 cm. Sivujan ja pohjan välinen kulma on 30° . Pohjaympyrän halkaisija on 6,0 cm. Laske tangon massa, kun messingin tiheys on $8,4 \text{ kg/dm}^3$.
62. Ympyrälieriön muotoinen putki, jonka pituus on 50 cm ja halkaisija ulkoa mitattuna 10 cm sekä sisältä mitattuna 9,9 cm, peitetään sekä ulkoa että sisältä 0,1 mm:n maalikerroksella. Kuinka monta prosenttia enemmän maalia kuluu ulkopuolen maalamiseen? [yo pitkä s1992]
63. Laske suoran ympyräkartioiden tilavuus desilitroina, kun sivujan pituus on 30,0 cm ja pohjan halkaisija on 22,5 cm.
64. Kheopsin pyramidi on alkujaan ollut säännöllinen nelisivuinen pyramidi, jonka pohjan ala on 5,3 hehtaaria. Pohjan ja sivutahkon välinen kulma on $51^\circ 52'$. Laske pyramidin alkuperäinen korkeus.
65. Säännöllisen kuusisivuisen pyramidin pohjasärmän pituus on 10,0 cm ja sivusärmien pituus 30,0 cm. Laske pyramidin vaipan pinta-ala.
66. Laske säännöllisen oktaedrin tilavuus, kun särmän pituus $\sqrt{2}$.
67. Jalallisen viinilasin sisätila on kärjellään seisova suora ympyräkartio, jonka tilavuus on 1,75 dl. Kuinka paljon lasissa on nestettä nestepinnan ulottuessa puoleenväliin lasin sisätilan korkeudesta? [yo pitkä s2002]
68. Kun säännöllisen tetraedrin tahkojen keskipisteet yhdistetään toisiinsa, sen sisään muodostuu toinen Platonin kappale. Tutki, mikä tämä kappale on, ja määritä sen särmän pituus, kun tetraedrin särmän pituus on a .

Valitse oikeat vaihtoehdot. Oikeita vastauksia on 1–3 kpl.

1. Piste P sijaitsee janalla AB ja jakaa janan suhteessa $2 : 5$. Kun janan AB pituus on 21 cm, niin janan AP pituus on
- 2 cm
 - 3 cm
 - 6 cm



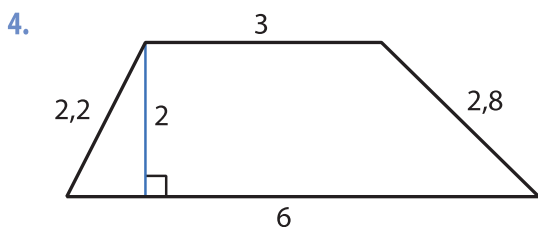
Suorat l ja m ovat yhdensuuntaiset. Kulman α suuruus on

- 30°
- 45°
- mahdoton ratkaista kuvan tiedoilla.



Kuvio on suunnikas. Kulman α suuruus on

- 66°
- 84°
- 58°



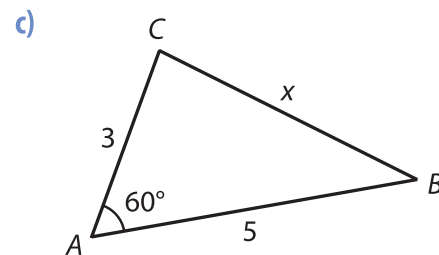
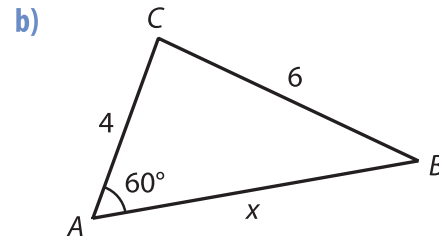
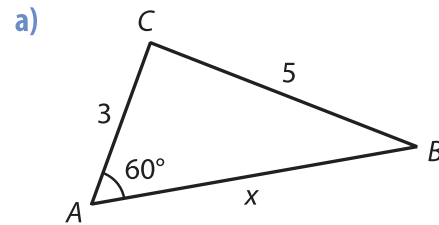
Kuvan puolisuunnikkaan pinta-ala on

- 5
- 9
- 15

5. Aurinkoisella säällä puun varjon pituus tasaisella maalla oli 55 m. Samaan aikaan pystysuoran 3,5 m korkean valotolpan varjon pituus oli 12 m. Puun korkeus on
- 16 m
 - 189 m
 - 42 m
6. Kun 18 kilometriä pitkä retkeilyreitin pituus kartalla on 1,2 m, on kartan mittakaava
- 1 : 15
 - 1 : 150
 - 1 : 15 000
7. Kun ilmapallon halkaisija pienenee 15 prosenttia, niin pallon tilavuus pienenee noin
- 61 %
 - 45 %
 - 39 %
8. Koripallon tilavuus on 8010 cm^3 ja pinta-ala 1940 cm^2 . Mikä on lentopallon tilavuus, kun sen pinta-ala on 26,2 % koripallon pinta-alaa pienempi.
- 2099 cm^3
 - 5080 cm^3
 - 5910 cm^3
9. Maailman pienimmän, piistä valmistetun Aalto-maljakon tilavuus on noin 0,10 fl. Yhdenmuotoisen, normaalikokoisen Aalto-maljakon tilavuus on noin 1,9 litraa. Mikä on normaalin maljakon korkeus, kun pienen maljakon korkeus on 600,0 mm?
- 83 cm
 - 160 mm
 - 114 mm

10. Suorakulmaisen kolmion kateettien pituudet ovat 3,0 cm ja 4,0 cm. Hypotenuusan pituus on
 a) 25 cm
 b) 50 mm
 c) 0,5 dm
11. Suorakulmaisen kolmion kaksi sivua ovat pituudeltaan 6 ja 8. Kolmannen sivun pituus on
 a) 10 b) $\sqrt{28}$ c) 28
12. Olkoon α suorakulmaisen kolmion eräs kulma. Mikäli $\tan \alpha = \frac{3}{4}$, niin
 a) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$
 b) $\cos \alpha = \frac{4}{5}$
 c) α on terävä
13. Kolmiota kutsutaan vinokulmaiseksi, mikäli
 a) sen kulmien summa on alle 180°
 b) siinä on tylppä kulma
 c) siinä ei ole suoraa kulmaa
14. Kolmion kaksi sivua ovat 9 ja 12 sekä näiden sivujen välinen kulma on 27° . Kolmion pinta-alan tarkka arvo on
 a) $54 \cdot \sin 27^\circ$
 b) $108 \cdot \sin 27^\circ$
 c) $54 \cdot \cos 63^\circ$
15. Kolmion sivut ovat 2, 2 ja 3. Kolmion suurin kulma on
 a) $48,6^\circ$
 b) $90,0^\circ$
 c) $97,2^\circ$

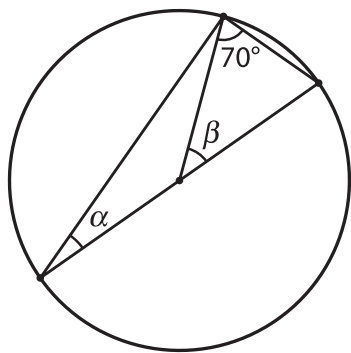
16. Kolmiolle ABC pätee $x^2 - 3x - 16 = 0$. Kolmio ABC on



17. Tasakylkisen kolmion kannan pituus on 8 ja kylkien pituus 16. Kantakulman puolittaja jakaa kyljen kahteen osaan. Näistä osista pidempi on
 a) $5\frac{1}{3}$
 b) $10\frac{2}{3}$
 c) 8
18. Kolmion mediaanin pituus on 18,0 cm. Muut mediaanit jakavat sen osiin, joiden pituudet ovat
 a) 10 ja 8
 b) 9 ja 9
 c) 12 ja 6

19. Ympyrän säde on 10. Ympyrän pinta-ala on
 a) suurempi kuin neliön, jonka sivun pituus on 17
 b) pienempi kuin neliön, jonka sivun pituus on 18
 c) neljäsosa sen ympyrän pinta-alasta, jonka säde on 20.
20. Neliön sivun pituus on 12. Neliön ympäri piirretyn ympyrän säde on
 a) 6
 b) $6\sqrt{2}$
 c) $\frac{12}{\sqrt{2}}$.
21. Ympyrän pinta-ala on 16π ja siihen piirretyn sektorin ala on 12π .
 a) Sektorin keskuskulma on 270° .
 b) Ympyrän säde on 8.
 c) Sektorin kaaren pituus on 6π .
22. Ympyrän säde on 6. Ympyrään on piirretty segmentti, jonka kaaren asteluku on 90° . Segmentin pinta-ala on
 a) $18\pi - 9$
 b) $9\pi - 18$
 c) $18 - 9\pi$.

23.

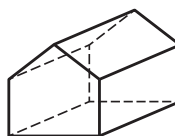


- a) Kulma α on puolet kulmasta β .
 b) Kulman β suuruus on 40° .
 c) Kulmien α ja β astelukujen summa on 90.

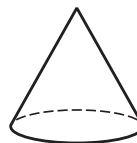
24. Ympyrän ulkopuolisesta pisteestä on piirretty ympyrälle kaksi tangenttia. Tangenttien leikkauspisteen etäisyys ympyrän keskipisteeseen on kaksi kertaa säteen pituus.
 a) Tangenttien sivuamispisteeseen piirrettyjen säteiden välinen kulma on 60° .
 b) Tangenttien välinen kulma on 60° .
 c) Tangentit ja sivuamispisteisiin piirretyt säteet muodostavat neljäkkään.
25. Ristikkäisillä avaruussuorilla
 a) ei ole yhtään
 b) on yksi
 c) on kaksi yhteistä pistettä.
26. Kuution kahden vierekkäisen tahkon samasta kärjestä lähtevien lävistäjien välinen kulma on
 a) 45°
 b) 60°
 c) 90°
27. Pallosegmentin rajaavat
 a) kalotti ja ympyräkartion vaippa
 b) kalotti ja ympyrä
 c) kalotti ja pallosektori.
28. Paikkakunnan sijainti $14^\circ 39' S$, $49^\circ 39' E$ tarkoittaa, että paikkakunta on
 a) pohjoisella pallonpuoliskolla
 b) eteläisellä pallonpuoliskolla
 c) itään nollapituuspiiristä.

29. Mitkä seuraavista kappaleista ovat lieriöitä?

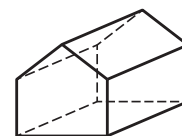
a)



b)

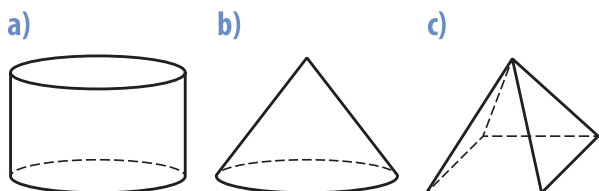


c)



30. Suorakulmainen särmiö leikataan tasolla pohjaa vastaan kohtisuorasti niin, että taso kulkee pohjan lävistäjän kautta. Syntyvä poikkileikkauskuvio on aina
- suorakulmio
 - neliö
 - suunnikas.

31. Mitkä seuraavista kappaleista ovat kartioita?



32. Mitkä seuraavista kappaleista ovat Platonin kappaleita.

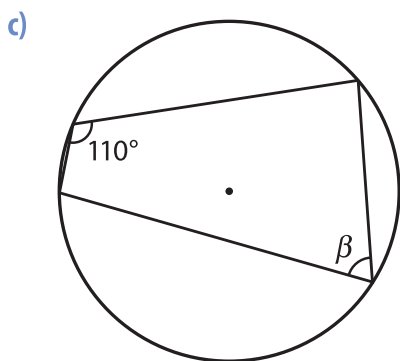
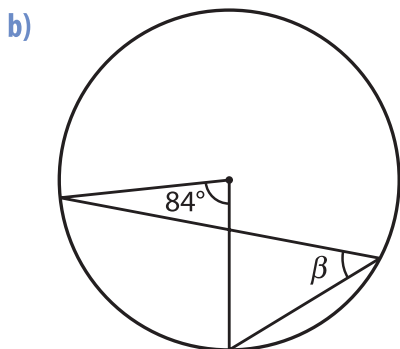
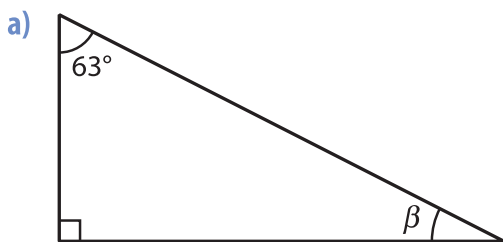
- Suorakulmainen särmiö, jossa kaikki särmät ovat yhtä pitkiä.
- Kappale, joka muodostuu kahdesta samankokoisesta vastakkain olevasta nelitahokkaasta.
- Kuutio.

33. Suorakulmainen kolmio pyörittää täyden kierroksen pidemmän kateetin ympäri. Syntyvä avaruuskappale on

- suora lieriö
- suora pyramidi
- suora ympyräkartio.

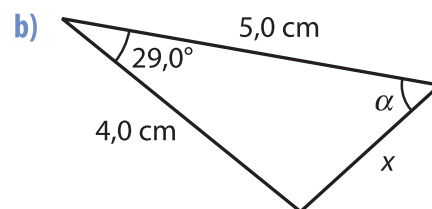
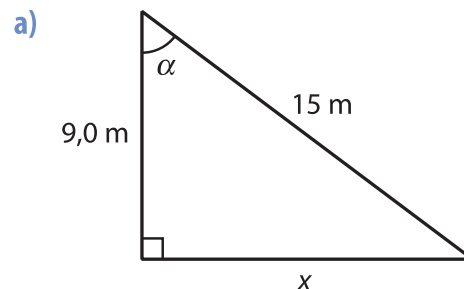
TEHTÄVÄSARJA

1. Määritä oheisista kuvioista kulma β .



2. Maantiekartan mittakaava on 1 : 400 000. Kuusamon Valtavaaran ja Jyrävän välimatka kartalla on 33 mm. Kuinka pitkä tämä välimatka on a) maastossa b) peruskartalla, jonka mittakaava on 1 : 20 000?

3. Määritä sivu x ja kulma α .



4. a) Kolmion yhden mediaanin pituus on 36. Kuinka pitkiin osiin muut mediaanit jakavat sen?
b) Kolmion sivujen pituudet ovat 24, 16 ja 30. Kuinka pitkiin osiin suurimman kulman puolittaja jakaa vastaisen sivun?

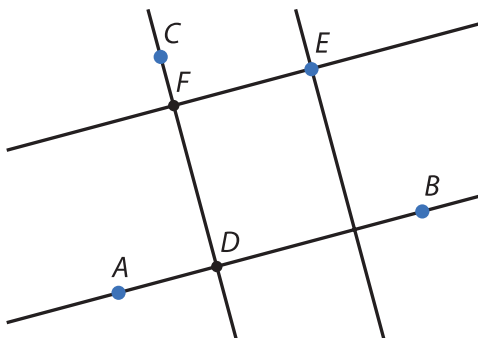
5. Tasamaalla olevan lipputangon varjon pituus on 20,0 metriä. Lipputangon vieressä olevan 1,10 m korkean aitatolpan varjon pituus on 0,88 m. Määritä lipputangon korkeus.
6. Koppelomäen huipulta näkyy 1,76 km päässä oleva Pyykallio. Jos kääntyy 56° , näkyy Riekkovuori. Kartasta mitattu etäisyys Pyykallion ja Riekkovuoren välillä on 2,1 km. Kuinka suuressa kulmassa Koppelomäen ja Pyykallion väli näkyy Riekkovuorelta katsottuna?
7. Koplan kolme kelmiä päätti naamioda Kroisokselta pihistetyt kultaharkot keilapalloksi ja karata maasta keilailumaa-joukkueen mukana lentokoneella kullasta valmistettu pallo ainoana matkatavaranaan. Kuinka paljon lentokentän tavaravaaka näytti palloa punnittaessa, kun pallon halkaisija oli 26,0 cm? Kullan tiheys on $19,32 \text{ kg/dm}^3$.
8. Merirosvoaluksen mastossa 46,0 metrin korkeudessa keikkuva papukaija näkee horisontissa uivan keksilaatikon.
 - a) Kuinka kaukana laatikko on papukaijasta?
 - b) Kuinka pitkä matka laivalla on laatikon luokse?
 - c) Kuinka paljon a- ja b-kohtien etäisyydet eroavat toisistaan? Maapallon säde on 6370 km.
9. Keskellä nurmikenttää seisoo tyhjä lato, jonka leveys on 3,0 metriä ja pituus 4,0 metriä. Lamma sidotaan 4,0 metriä pitkällä köydellä ladon
 - a) ulkonurkkaan
 - b) sisänurkkaan. Kuinka monen neliömetrin alueella lamma ylettyy liikkumaan?
10. Pihalla on kärjellään seisova suora ympyräkartio, jonka korkeus on 152 mm. Yön aikana satoi 14 mm vettä. Kuinka korkealle vesi nousi ympyräkartiassa, kun kartio oli tyhjä ennen sateen alkua? Sademäärällä tarkoitetaan maahan sataneen vesikerroksen paksuutta.

Vastaukset

1.1 Peruskäsitteitä

1. a) tosi b) epätosi c) tosi d) tosi e) tosi
f) epätosi

2. a)–e)



f) Kuvan perusteella $AB \parallel EF$

3. a) $|AP| = 14$ b) $|AQ| = 16$
4. a) $|AC| = 17 \text{ cm}$ b) $|AC| = 7 \text{ cm}$
5. a) $\angle CBA = \alpha$ b) $\angle ADC = \delta$
c) $\angle ACB = \beta$ d) $\angle DCA = \gamma$
6. a) leveyspiiri $62^\circ 54,6'$, pituuspiiri $27^\circ 39,3'$
b) leveyspiiri $62^\circ 54' 36''$, pituuspiiri $27^\circ 39' 18''$

7. a)

Terävä kulma	Tylppä kulma	Kovera kulma	Kupera kulma
25° , 65° , 85°	95° , 155° , 177°	25° , 65° , 85° , 90° , 95° , 155° , 177°	183° , 210° , 350°

- b) 25° ja 65°
c) 25° ja 155° sekä 85° ja 95°
8. a) kaakkoon b) 315° c) 230°
9. a) 18° b) 36° c) 72°
10. a) $\alpha = 44^\circ$ b) $\beta = 136^\circ$ c) 44°
11. a) on b) ei
12. a) $\alpha = 26^\circ$, $\beta = 146^\circ$
b) $\alpha = 34^\circ$, $\beta = 68^\circ$
13. a) 4 : 1 b) 11 : 4 tai 11 : 18

14. a) $60,435^\circ$ b) $22,229^\circ$

15. a) 60° b) 75° c) $67,5^\circ$ d) $92,5^\circ$

16. a) $\alpha = 55^\circ$, $\beta = 35^\circ$ b) $\alpha = 100^\circ$, $\beta = 80^\circ$
c) $\alpha = 190^\circ$, $\beta = 170^\circ$

17. $\alpha = 110^\circ$ ja $\beta = 70^\circ$, suorien välinen kulma 70°

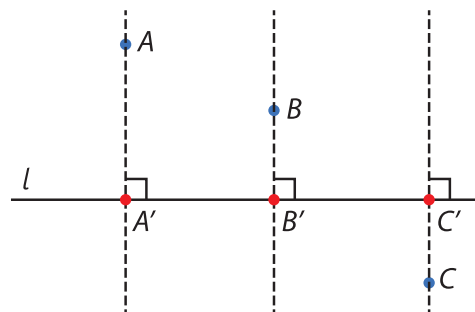
18. $\alpha = 155^\circ$

19. a) $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$ b) eivät ole

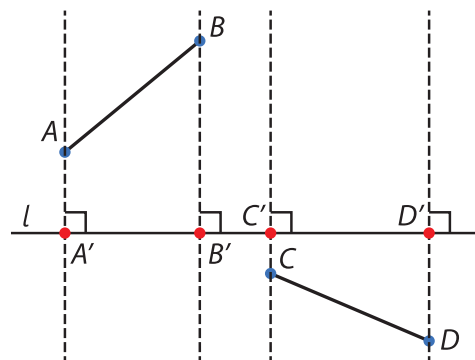
20. Merkitse vieruskulmia kirjaimilla α ja β .
Osoita, että $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90^\circ$.

21. Määritä esimerkiksi vasemmasta yläkulmasta kulman α kanssa samankohtaiset kulmat ja sen jälkeen oikeasta yläkulmasta edellä saatujen kulmien kanssa samankohtaiset kulmat.

22. Pisteiden A kohtisuora projektiio on piste A' , pisteen B kohtisuora projektiio B' ja pisteen C kohtisuora projektiio C' .



23. Janan AB kohtisuora projektiio on jana $A'B'$ ja janan CD kohtisuora projektiio on jana $C'D'$.



24. 09.32.44

Vihje: Merkitse tuntiviisarin etenemää kulmaa kirjaimella x . Kuinka suuri on minuuttiviisarin kiertämä kulma tällöin? Muodosta yhtälö täyden kulman avulla.

1.2 Monikulmioita

25. Kupera	A, C, D, E, F
Kovera	B
Säännöllinen	D, E
Suunnikas	E, F
Tasakylkinen kolmio	C, D
Tasasivuinen kolmio	D

26. a) 20° b) 120° c) 70°

27. a) 45,6 m b) 450 m c) 1,25 a d) 25 000 m²
e) 8,54 m² f) 0,25 dm³ g) 0,149 l

28. a) $A = 11$ b) $A = 13$

29. Pinta-ala 28 cm², piiri 24 cm

osa	pinta-ala
A	$\frac{1}{4}$
B	$\frac{1}{4}$
C	$\frac{1}{16}$
D	$\frac{1}{8}$
E	$\frac{1}{16}$
F	$\frac{1}{8}$
G	$\frac{1}{8}$

31. Sivujen pituudet ovat 185 m ja 190 m.

32. a) $\alpha = 130^\circ$ ja $\beta = 50^\circ$ b) $\alpha = 135^\circ$ ja $\beta = 45^\circ$

33. 135°

34. $\alpha = 30^\circ$ ja $\beta = 75^\circ$

35. a) Kolmio ABD on tasakylkinen, joten huippukulma $\sphericalangle A = 180^\circ - 2\beta$. Tällöin vieruskulma $\alpha = 2\beta$.

b) Kolmio BDC on tasakylkinen, joten kantakulma $\sphericalangle CDA = \frac{180^\circ - \alpha}{2}$. Tällöin $\sphericalangle CDB = \frac{180^\circ - \alpha}{2} + \beta = \frac{180^\circ - 2\beta}{2} + \beta = 90^\circ$.

Vihje: Käytä hyödyksi tasakylkisiä kolmioita sekä kolmion kulmien summaa.

36. a) 50° , 50 ja 80° b) 30° , 60° , 90°

37. 30 m²

38. 12,4 cm

39. a) pienenee 33 % b) kasvaa 100 %

40. a) Merkitse kolmion kantaa kirjaimella a ja korkeutta kirjaimella h . Muodosta kolmioiden pinta-alat ja laske ne yhteen.

b) Menettele samoin kuin a-kohdassa.

41. Lävistäjä jakaa neljäkkään kahteen tasakylkiseen kolmioon. Perustele kolmioiden kantakulmien yhtä suuruus. Molemmat lävistäjät jakavat neljäkkään neljään kolmioon, joissa on kahdet yhtä suuret kulmat. Täten kolmannetkin kulmat ovat yhtä suuret. Käytä hyväksi lävistäjien leikkauspisteeseen muodostuvaa täysikulmaa.

42. 80°

43. $\alpha = 36^\circ$

44. a) 2 b) 5

c) 9, n -kulmiossa lävistäjiä on $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$

45. Nimeä viisikulmion kulmat ja muodosta niiden summa. Sakaroihin muodostuvissa kolmiossa on näiden kulmien vieruskulmia. Muodosta kulmien A, B, C, D ja E lausekkeet hyödyntäen kolmion kulmien summaa.

46. 9,6 cm²

Vihje: Merkitse toisen lävistäjän osia kirjaimilla a ja b , sekä lävistäjää vastaan olevia korkeuksia h_1 ja h_2 . Muodosta kolmioiden avulla suhde $a : b$ kahdella eri tavalla ja muodosta yhtälö.

2.1 Mittakaava

47. 42 cm

48. a) 1 : 68 b) 22 cm

49. $x = 62,5$ cm, $y = 1 : 250\,000$, $z = 350$ m

50. 590 m, 2,0 m/s (7,0 km/h)

51. a) 2 b) 2 c) 3 d) 3

52. 32 m

53. a) $x = 10$ b) $y = 9,6$ ($= 9\frac{3}{5}$) c) 5 : 3 (tai 3 : 5)

54. a) $x = 9$ b) $x = 6$

55. 10 m

56. $|EC| = 5\frac{1}{4}$

57. a) 39 m b) 36 m

58. 14 m

59. 2,3 km

60. a) kk, kaikissa suora kulma ja sama terävä kulma $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DAC = \sphericalangle DCB$

b) $|CD| = 4\frac{4}{5}$ c) 16 : 9

61. 5 : 2

62. $5 : 4$ (tai $4 : 5$)
 63. a) 1,6 m b) 5,9 m
 64. $a = 3,5$
 65. $44\frac{4}{9}$
 66. Pinta-ala on 12.
 67. Pinta-ala on 17,5.
 68. $x = 32$ cm, $y = 23$ cm
 69. Ei voi. Mikko ei näe 3 m:n päässä aidan takana alle 1,16 metrin korkuisia kohteita.
 70. $1 : 4$ (tai $4 : 1$)
 71. 8,1 cm ja 27,9 cm tai 18,0 cm ja 18,0 cm

2.2 Pinta-alojen ja tilavuuksien suhde

72. $4,8 \text{ mm}^2$
 73. 220 cm^2
 74. 69 cm^2
 75. 44 %
 76. a) 178 % b) 363 %
 77. 34 cm^3 ja 15 cm
 78. 2,4 m
 79. 29 %
 80. 2,9 dl
 81. 56 %
 82. a) 124 % b) 71 %
 83. 16 cm, 17 cm ja 24 cm
 84. $7 : 9$
 85. 80 %
 86. $10\frac{2}{3}$
 87. 165 g
 88. a) mittakaava $1 : \sqrt{2}$, pinta-alojen suhde $1 : 2$
 b) 11. neliö
 89. a) mittakaava $1 : 2$, pinta-alojen suhde $1 : 4$
 b) 11. kolmio
 90. a) 4,8 km b) noin $1 : 35\,400$
 91. a) $|CD| = 15$ b) $|EF| = 15(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \approx 4,8$
 92. 72 cm
 93. 2,1-kertainen, 31 % vähemmän

3.1 Suorakulmainen kolmio

94. Kateetin pituus on 12.
 95. a) 11 cm b) 13 m

96. a) $3\sqrt{3}$ b) $9\sqrt{3}$
 97. tikkaat yltävät 5,2 – 6,2 m korkeuteen joten vastaus on kyllä
 98. kylki 11 cm, huippukulma 67°
 99. a) on suorakulmainen b) $36,9^\circ$
 100. $\alpha = 66^\circ$, $\beta = 34^\circ$
 101. a) 4,1 m b) 40° c) 40°
 102. 13,5 m
 103. a) Alojen suhde on $\frac{5}{8}$. b) 16. neliö
 104. Ei ole turvassa, latva ylettyy 16,6 m päähän tyvestä.
 105. 25,5 %
 106. 150 m
 107. $1,9^\circ$
 108. 7,8 m
 109. a) 36 m b) 20 m
 110. $\sqrt{33}$ tai $\sqrt{65}$
 111. 32 cm
 112. a) pinta-alojen suhde $\frac{3}{4}$, mittakaava $\frac{\sqrt{3}}{2}$
 b) 50. kuusikulmio
 113. 1570 m
 114. a) $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$
 b) $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$

3.2 Sinilause

115. $99,8 \text{ cm}^2$
 116. $45,84 \text{ m}^2$
 117. $40,2^\circ$ tai $139,8^\circ$
 118. Sivun pituus on 11,8.
 119. 6,8 cm ja 7,1 cm
 120. $x = 356$ m
 121. 297 cm^2
 122. 99 m
 123. kulmat 32° ja 93° sekä sivu 7,1 cm
 124. 1030 m
 125. $45,6^\circ$ tai $134,4^\circ$
 126. 504 cm^2
 127. 2550 m
 128. 18,1 m
 129. 59 m

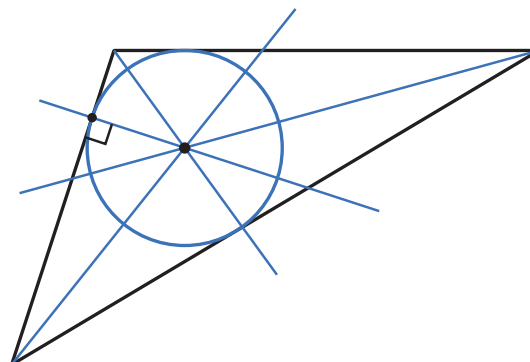
130. kulmat $43,8^\circ$ ja $116,2^\circ$ sekä sivu 10,5 m tai kulmat $136,2^\circ$ ja $23,8^\circ$ sekä sivu 4,7 m
131. 31°
132. kolmas sivu 20 cm ja kulmat 48° sekä 107°
133. 7,2 km
134. $1370 \text{ m} = 1,37 \text{ km}$

3.3 Kosinilause

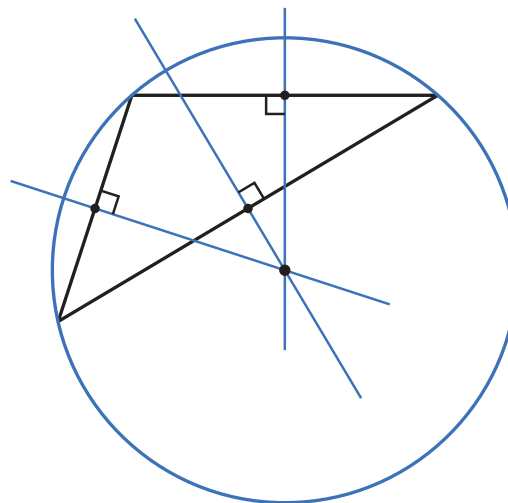
135. $\alpha = 52,6^\circ$
136. $95,1^\circ$
137. $34,4^\circ$
138. $x = 20 \text{ m}$
139. 2,6 mpk
140. 94 m
141. 11,7 cm tai 17,5 cm
142. $x = 6,4 \text{ m}$
143. 9,4 m
144. virhe on $9,8^\circ$
145. $158\,000 \text{ m}^2 = 15,8 \text{ ha}$
146. $\alpha = 20,5^\circ$
147. 6,2 m tai 20,3 m
148. 4,0 km
149. a) $23,6^\circ$ b) ei ole suorakulmainen
150. a) $37,8^\circ$ b) on suorakulmainen
151. pidempi lävistäjä 10,1 m
152. 5,0 km tai 10,9 km
153. 26,5 m
154. a) 26° b) 4,3 km
155. Piirrä kolmio niin, että kulma γ on kannan päätepisteessä. Jaa kolmio korkeusjanan avulla suorakulmaisiksi kolmioiksi ja käytä Pythagoraan lausetta.

3.4 Kolmioon liittyviä lauseita

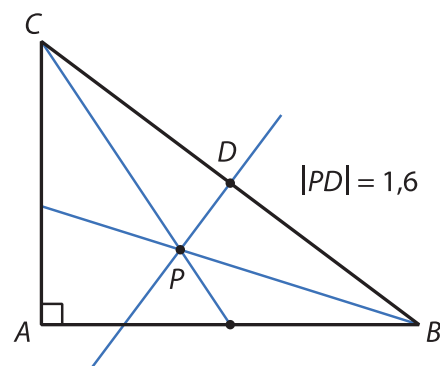
156. $3\frac{3}{7}$ ja $2\frac{4}{7}$
157. $8\frac{1}{6}$ ja $5\frac{5}{6}$
158. $2\sqrt{19}$
159. Etäisyys on $\frac{2\sqrt{73}}{3}$.
160. a) Säde on 2,1.



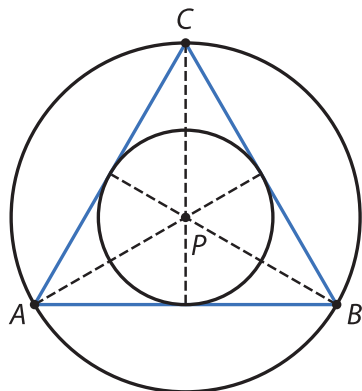
- b) Säde on 6,8.



161. Etäisyys on 1,6.

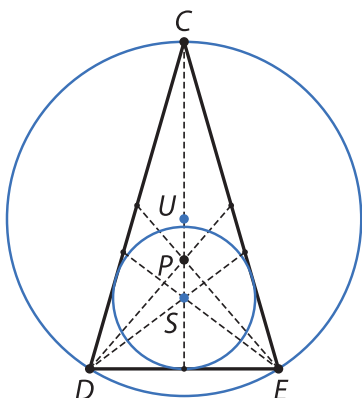


162. a) Tasasivuisen kolmion painopiste sekä sisään ja ympäri piirrettyjen ympyröiden keskipisteet yhtyvät (piste P).



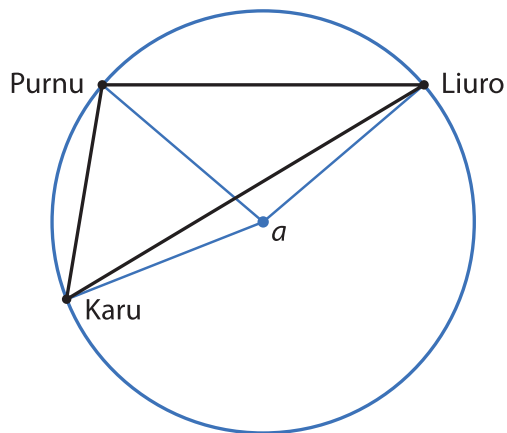
- b) Painopisteen P paikka säilyy, sisäänpiirretyn ympyränkeskipiste S laskee, ympäri piirretyn ympyrän keskipiste U nousee.

Vihje: tutki yhdenmuotoisia suorakulmaisia kolmioita, joiden yhteisenä terävänä kulmana on puolikas alkuperäisen kolmion huippukulmasta.

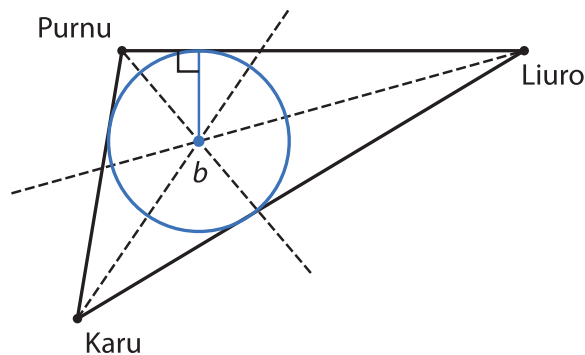


163. $R = 11,0$ cm

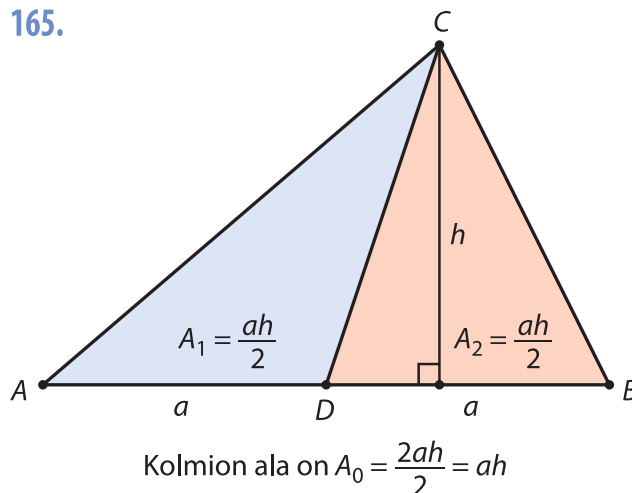
164. a) Vesitorni sijaitsee keskinormaalien leikkauspisteessä. Piirtäminen onnistuu esimerkiksi ilmoittamalla ympyrän kolmeksi pisteeksi kolmion kärkipisteet ja etsimällä ympyrän keskipiste.



- b) Vesitorni sijaitsee kulmanpuolittajien leikkauspisteessä.



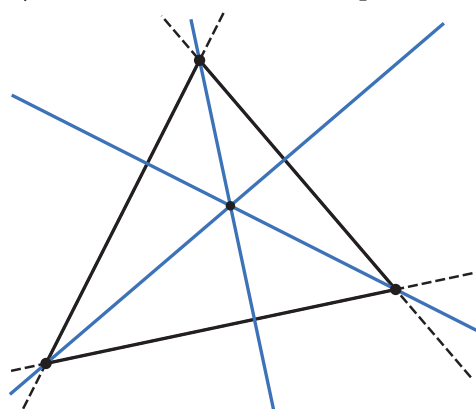
165.



166. Säde on 12,5.

167. Hypotenuusan pituus on 14.

168. Siniset suorat kulkevat kolmion korkeusjanoja pitkin. Mustat katkoviivat ovat kolmion sivujen jatkeita, joita tarvitaan, mikäli korkeusjana ei osu kolmion sisään. Kolmion muotoa voi muuttaa piirto-ohjelmassa kärkipisteitä liikuttamalla, jolloin huomaa, että korkeusjanojen kautta kulkevat suorat leikkaavat aina samassa pisteessä, joka voi sijaita kolmion sisällä tai ulkopuolella.



169. Säteen pituus on 4,1.

170. a) $2\sqrt{3}$ b) $\sqrt{3}$ c) $2\sqrt{3}$

171. $\frac{4\sqrt{21}}{7}$

Vihje: tutki yhdenmuotoisia suorakulmaisia kolmioita, joiden yhteisenä terävänä kulmana on puolikas alkuperäisen kolmion huippukulmasta.

172. $\frac{\sqrt{15}}{5}a$

173. **Vihje:** Piirrä mallikuva, jossa näkyvät kolmion sivujen keskinormaalit ja merkitse kuvaan ympyrän säteet. Tutki pientä ja isoa kolmiota. Hyödynnä kolmioiden yhdenmuotoisuutta.

174. Etäisyys on $\frac{8}{5}$.

Vihje: Piirrä mallikuva, jossa näkyvät kolmion sivujen keskinormaalit ja merkitse kuvaan ympyrän säteet. Tutki pientä ja isoa kolmiota. Hyödynnä kolmioiden yhdenmuotoisuutta.

175. Tutki syntyneiden osakolmioiden pinta-aloja TAI täydennä kuviota niin, että voit todistaa väitteen hyödyntäen yhdenmuotoisia kolmioita TAI sovelta sinilausetta osakolmioihin.

4.1 Ympyrään liittyviä peruskäsitteitä

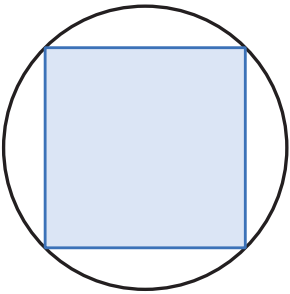
176. 96 pyörähdystä

177. $p \approx 16$ cm, $A \approx 20$ cm²

178. 150 km

179. 15 cm

180. 0,58 ha

181. a)  b) $\frac{25}{2}\pi$

182. $p = 16\pi$, $A = 28\pi$

183. 21 %

184. $4\sqrt{5}$

185. $\frac{1023\pi}{2}$

186. 7,1 minuutissa

Vihje: Laske ensin Maan kiertoradan pituus.

187. 21,8 km

188. 55 km²

189. 79 %

190. $p = 10\pi$, $A = 6\pi$

191. 44 %

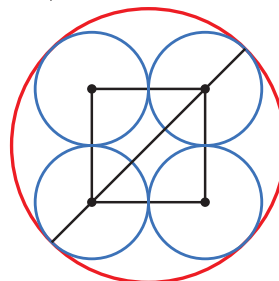
192. a) $3,13935 \approx 3,14$ b) $3,14103 \approx 3,14$

193. a) Neliön piiri on 1,9 % suurempi.

b) Ympyrän ala on 22,7 % suurempi.

194. $\frac{R}{1+\sqrt{2}}$

Vihje:



195. a) Peräkkäisten kerrosten pituuksien erotus on vakio $0,02\pi$ cm b) 97 m

196. 0,059 mm

197. 41 %

4.2 Ympyrän osia

198. a) 72° b) 2π c) 5π

199. $p \approx 41$ cm, $A \approx 100$ cm²

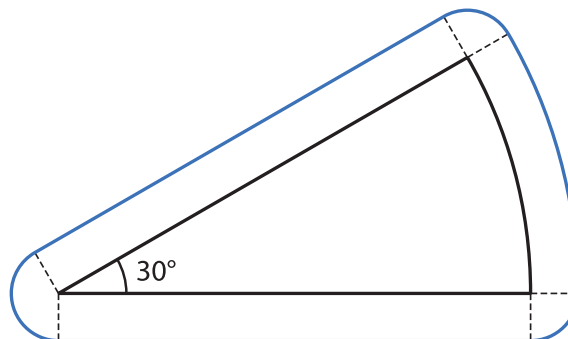
200. 51°

201. 60 cm²

202. 160 cm²

203. $p \approx 18$ cm, $A \approx 12$ cm²

204. 233,407... m ≈ 233 m



205. Viipaleiden pinta-alat ovat 120 cm², 370 cm² ja 120 cm².

206. 4,5 cm

207. 183 cm

208. 9,3 %

209. 245° . **Vihje:** Muodosta yhtälö.

210. 264,98 km ≈ 265 km

211. 1,2 %

212. säde 6,1 cm, kaaren asteluku 159°

213. 20,7 cm

214. Kirjoita sektorin pinta-alan lauseke hyödyntämällä kaaren pituuden kaavaa $b = \frac{\alpha}{360} \cdot 2\pi r$.

215. $26,6 \text{ cm}^2$

216. $34,6 \%$.

Vihje: Yhdistä kukan terälehtien kärkipisteet.

217. $39\,300 \text{ km}$

4.3 Ympyrään liittyviä kulmia

218. $9,7 \text{ cm}$

219. $1 : 2$

220. 46 cm

221. 49 m

222. $361\,800 \text{ km}$

223. $217,58\dots \text{ km} \approx 218 \text{ km}$

224. a) 108° b) $57,5^\circ$ c) 214°

225. 22 cm^2

226. $12,1 \text{ cm}$

227. $\alpha = 81^\circ$, $\beta = 112^\circ$

228. ei voi (etäisyyttä pitää olla vähintään $6,2 \text{ metriä}$)

229. 5 ja 15

230. 290 m

231. 70° ja 140°

232. a) 45° b) 30°

233. a) 90° b) 98 m

Vihje: Piirrä ympyrä, joka kulkee saaren päätepisteiden ja tarkkailijan sijaintipisteen kautta.

234. $295\,000 \text{ km}$

235. a) voidaan b) ei voida

c) kulmat ovat suplementtikulmia

236. Piste O on P -keskisen ympyrän kehäkulman kärkipiste.

237. 6π

238. $\frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$

239. Jana CD on kummassakin kuviossa ympyrän keskipisteen kautta piirretty kehäkulman kylki. Molemmissa tapauksissa kuvioon mudostuu kaksi kehäkulmaa, joiden kylkinä on CD . Näihin sovelletaan sivulla 118 todistettua tulosta.

5.1 Kulma avaruudessa

240. –

241. a) $6,4 \text{ m}$ b) $7,1 \text{ m}$ c) $25,1^\circ$

242. a) 55 cm

b) 60 cm (Avaruuslävistäjän pituus on $60,8 \text{ cm}$.)

243. $35,3^\circ$

244. a) 34° b) 37° c) 58°

245. $81,9^\circ$.

Vihje: Käytä kosinilauseetta.

246. 55°

247. 33°

248. 72°

249. a) $18,4^\circ$ b) $18,9^\circ$

250. a) $11,2 \text{ cm}$ b) $22,9 \text{ cm}$ c) $60,8^\circ$

251. Käytä Pythagoraan lausetta kaksi kertaa. Laske ensin pohjan lävistäjän pituuden neliö ja sen jälkeen avaruuslävistäjän pituus.

252. 41°

253. $64,6^\circ$

254. $85,2^\circ$

Vihje: Tasojen välinen kulma on välillä $[0^\circ, 90^\circ]$.

255. 78°

256. $60,5^\circ$

257. a) 55° b) 35°

258. 47°

259. $\sphericalangle(AG, AC) = 35,3^\circ$, $\sphericalangle(AG, BD) = 90^\circ$

5.2 Pallo

260. a) 1500 cm^2 b) 5600 cm^3

261. a) $18,0 \text{ cm}$ b) 26 cm

262. a) $23,0 \text{ m}$ b) 6360 m^3

263. Ontto (umpinaisen massa 111 kg)

264. a) $4,8 \%$ b) $9,8 \%$

265. a) 1780 km b) 7110 km

266. $31\,500 \text{ km}$

267. $3,8 \%$

268. 220 cm^3 , 46 g

269. a) 60% b) 65%

270. 656 litraa

271. $9,6 \text{ kg}$

272. a) 141 km b) 15 m

273. 106 km

274. napa-alueet 8,3 %, trooppinen alue 39,9°

275. 42,4 %

276. 540 cm³

277. a) 2770 km b) 2740 km

Vihje: Pallopinnalla lyhin reitti kahden pisteen välillä kulkee pitkin isoympyrää.

278. 120 cm³

279. a) $q = \frac{1}{\sqrt{3}}$ b) $q = \frac{1}{3}$ c) $q = \frac{1}{3\sqrt{3}}$

280. 972 kg/m³

5.3 Lieriö

281. b ja c

282. Käytä geometriaohjelman 3D-toimintoa. Piirrä ensin kappaleen pohja ja määritä sen jälkeen korkaus.

283. a) 0,181 L b) 28 000 L

284. 850 cm³, 510 cm²

285. 17 cm

286. 12 m²

Vihje: Jaa pääty viiteen yhtenevään tasakylkiseen kolmioon.

287. 18 m²

288. $\frac{1}{3}$

289. 49 %

290. 25 dm³

291. 140 cm²

292. 46 ml

293. 1500 cm³ tai 1800 cm³

294. 0,07 mm

295. 3,8 L

296. 56,19 €

Vihje: Jaa pääty viiteen yhtenevään tasakylkiseen kolmioon.

297. 1,5 dl

298. $54\sqrt{3}$

299. 336 cm²

Vihje: Laske pohjan pinta-ala tilavuuden avulla.

300. naru 15 m, lipputanko 13 m

301. $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 2-\sqrt{3}$

302. 6,1 %

5.4 Kartio

303. Käytä geometriaohjelman 3D-toimintoa. Valitse sopiva työkalu halutun kappaleen piirtämiseen.

304. 173 cm²

305. 1,47 L

306. a) 76,5 cm b) 1990 cm²

307. 11,0 L

308. suora ympyräkartio, säännöllinen nelisivuinen pyramidi, pallo, suora ympyrälieriö, kuutio

309. 5 mm

310. $\frac{125\sqrt{3}}{3}\pi$

311. 12,8 m³

312. 300 cm³ eli 0,30 L

313. 21,7 cm

314. 4,3 L

315. 1,3 kg

316. $\frac{3\sqrt{2}\pi}{4}$

317. 8,7 cm korkeuteen

318. 3,8 m

319. a) 18 cm³ b) 25 cm³

320. 57 m³

321. a) $(1+\frac{\sqrt{3}}{2})a$ b) $(1+\frac{\sqrt{3}}{6})a^3$ c) $\frac{\sqrt{17}}{2}a$

322. pituus 17 cm, kulma 39°

Vihje: Kolmion keskipiste on yhtä kaukana kolmion kärjistä. Muodosta suorakulmainen kolmio, jonka hypotenuusana on porattu reikä ja toinen kateetti pyramidin pohjalla. Laske kateettien pituudet annettujen tietojen avulla.

323. $\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2\sqrt{2}} \text{ cm} = \frac{15}{3+2\sqrt{6}} \text{ cm} \approx 1,9 \text{ cm}$

324. Kuutio, jonka särmän pituus $\frac{\sqrt{2}}{3}a$.

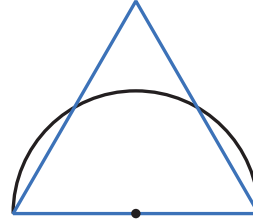
Vihje: Oktaedrin sisään muodostuu kuutio, jonka särmä on sillä leikkauspinnalla, joka alkaa oktaedrin kärjestä ja kulkee kahden vierekkäisen tahkon keskijanja pitkin. Tunnista yhdenmuotoiset kolmiot ja ratkaise kuution särmän pituus.

325. 109,5°.

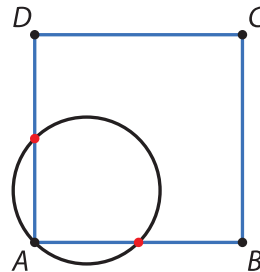
Kertaus

1. a) $27,5^\circ$ b) $72,5^\circ$ c) $162,5^\circ$
2. 75°
3. $\alpha = 145^\circ$ ja $\beta = 35^\circ$
4. $|PQ| = 11$
5. 4 cm^2
6. 53%
7. 480 m^2
8. 16 kulmaa
9. Jatka suunnikkaan sivuja. Käytä hyväksi saman-kohtaisia kulmia. Osoita, että suunnikkaassa kulman α viereinen kulma on $180^\circ - \alpha$. TAI Hyödynnä suunnikkaan määritelmää ja tietoa nelikulmion kulmien summasta.
10. 122 cm
11. 1,3 m
12. 144:25
13. $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618$
14. 21,5 cm, 43,1 cm, 64,6 cm
15. 340 cm^2
16. Merkitse kolmion kantojen pituuksia a_1 ja a_2 ja korkeuksia h_1 ja h_2 . Muodosta lausekkeet pinta-aloille ja tutki pinta-alojen suhdetta.
17. a) 15 cm ja 26 cm b) 17 cm ja 28 cm
18. a) 1,4 m b) 38°
19. $46^\circ, 46^\circ$ ja 88°
20. 56°
21. 16 m
22. a) $\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ b) $3:4:5$
23. a) $10\sqrt{3}$ b) 17,32
24. a) 114° , 1,56 m ja 2,16 m b) $1,54 \text{ m}^2$
25. Kolmio ei ole mahdollinen.
26. Pisin sivu 6,3 cm ja suurin kulma $100,5^\circ$
27. $102,6^\circ$
28. 440 m
29. $\alpha = 35,2^\circ$, $x = 779 \text{ m}$
30. 2850 m
31. 92°
32. 6 km
33. 9 ja 12
34. a) $\frac{16\sqrt{5}}{3}$ b) $\frac{8\sqrt{41}}{3}$

35. $8\sqrt{3}$
36. $\sqrt{2} + 1$
37. 25 cm
38. 51 %
39. 11%
40. 38 cm
41. a)



b) 11,5 %

42. Reunalta leikattu pala on 28 % suurempi
43. 30 cm
44. Täydennä kuvioon keskipiste ja sopivat janat, jotta voit hyödyntää kaarta AB vastaavan kehäkulman ja keskuskulman välistä yhteyttä sekä sopivia vieruskulmia.
45. a)  c) $\frac{a\sqrt{2}}{4}$
46. a) $x = 7\frac{1}{2}$ b) $x = 9$
47. $\frac{47}{12}\sqrt{3} + \frac{37\pi}{9} (\approx 19,7)$
48. a) 7,9 cm b) 8,3 cm c) 18°
49. $54,7^\circ$
50. $48,1^\circ$
51. a) 25 cm b) 28 cm c) 47 cm d) 56°
52. 1844 cm^2
53. a) 44 % b) 58 %
54. 26 %
55. 26 minuuttia
56. a) 3693 km b) 3990 km
57. 300 000 L
58. mahtuu
59. 13,5 kg
60. 15,9 mm
61. 1,5 kg

62. 1,2 %
63. 36,9 dl
64. 147 m
65. 887 cm^2
66. Tilavuus on $\frac{4}{3}$.
67. 0,219 dl
68. Tetraedri, jonka särmä on $\frac{1}{3}a$.
Vihje: Tetraedrin sisään muodostuu pienempi tetraedri, jonka särmä on sillä leikkauspinnalla, joka alkaa isomman tetraedrin kärjestä ja kulkee kahden vierekkäisen tahkon keskijanoja pitkin. Tunnista yhdenmuotoiset kolmiot ja ratkaise pienemmän tetraedrin särmän pituus.

Monivalintatehtävät

1. c
2. a
3. a
4. b
5. a
6. c
7. c
8. b
9. b
10. b, c
11. a, b
12. a, b, c
13. c
14. a, c
15. c
16. a
17. b

18. c
19. a, b, c
20. b, c
21. a, c
22. b
23. a, b
24. b
25. a
26. b
27. b
28. b, c
29. a, c
30. a, c
31. b, c
32. a, c
33. c

Tehtäväsarja

1. a) 27° b) 42° c) 70°
2. a) 13 km b) 66 cm
3. a) 12 m, 53° b) 2,5 cm, 52°
4. a) 12 ja 24 b) 12 ja 18
5. 25,0 m
6. 44°
7. 178 kg
8. a) 24,2 km b) 24,2 km c) noin 10 cm
9. a) 38 m^2 b) 11 m^2
10. 99 mm

Pituuden, pinta-alan ja tilavuuden yksiköitä

Pituus, suhdeluku 10

kilometri	hehtometri	dekametri	metri	desimetri	senttimetri	millimetri
km	hm	dam	m	dm	cm	mm
			7	3		

Esimerkiksi $7,3 \text{ m} = 73 \text{ dm} = 730 \text{ cm} = 7300 \text{ mm}$
 $7,3 \text{ m} = 0,73 \text{ dam} = 0,073 \text{ hm} = 0,0073 \text{ km}$

Pinta-ala, suhdeluku $10^2 = 100$

neliökilometri	hehtaari	aari	neliömetri	neliö-desimetri	neliö-senttimetri	neliö-millimetri
km ²	ha	a	m ²	dm ²	cm ²	mm ²
			2	5		

Esimerkiksi $2,5 \text{ m}^2 = 250 \text{ dm}^2 = 25\,000 \text{ cm}^2 = 2\,500\,000 \text{ mm}^2$
 $2,5 \text{ m}^2 = 0,025 \text{ a} = 0,000\,25 \text{ ha} = 0,000\,0025 \text{ km}^2$

Tilavuus, suhdeluku $10^3 = 1000$

kuutio-kilometri	kuutio-hehtometri	kuutio-dekametri	kuutiometri	kuutio-desimetri	kuutio-senttimetri	kuutio-millimetri
km ³	hm ³	dam ³	m ³	dm ³	cm ³	mm ³
				1	9	

Esimerkiksi $1,9 \text{ dm}^3 = 1900 \text{ cm}^3 = 1\,900\,000 \text{ mm}^3$
 $1,9 \text{ dm}^3 = 0,0019 \text{ m}^3 = 1,9 \cdot 10^{-6} \text{ dam}^3 = 1,9 \cdot 10^{-9} \text{ hm}^3 = 1,9 \cdot 10^{-12} \text{ km}^3$

Vetomitat, suhdeluku 10

m ³			dm ³			cm ³		
					litra	desilitra	senttilitra	millilitra
					L tai l	dl	cl	ml
							6	4

Esimerkiksi $1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3 = 0,001 \text{ m}^3$ $1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ L}$
 $6,4 \text{ cl} = 0,064 \text{ l} = 0,064 \text{ dm}^3$ $6,4 \text{ cl} = 64 \text{ ml} = 64 \text{ cm}^3$

Etuliitteet

G	giga	1 000 000 000	10^9	Maaailman aurinkovoimaloiden yhteenlaskettu teho vuonna 2015 oli 170 GW eli 1 700 000 000 000 W.
M	mega	1 000 000	10^6	Imatrankosken vesivoimalan teho on 185 MW eli 185 000 000 W.
k	kilo	1 000	10^3	Inarista on matkaa Ivaloon 40 km eli 40 000 m.
h	hehto	100	10^2	Vehnän hehtolitrainon pitää olla vähintään 78,0 kg.
da	deka	10	10^1	
	perusmitta	1	10^0	
d	desi	$\frac{1}{10} = 0,1$	10^{-1}	Suomalaiset juovat keskimäärin 3,5 dl eli 0,35 l maitoa päivässä.
c	sentti	$\frac{1}{100} = 0,01$	10^{-2}	Ravintola-annos valkoviiniä on 12 cl eli 0,12 l.
m	milli	$\frac{1}{1000} = 0,001$	10^{-3}	Yhden euron kolikon halkaisija on n. 23 mm eli 0,023 m.
μ	mikro	$\frac{1}{1\,000\,000} = 0,000\,001$	10^{-6}	B12-vitamiinin suositeltu päivittäinen saanti on 2 μg eli 0,000 002 g päivässä.
n	nano	$\frac{1}{1\,000\,000\,000} = 0,000\,000\,001$	10^{-9}	Vetyatomin halkaisija on n. 0,1 nm eli 0,000 000 000 1 m

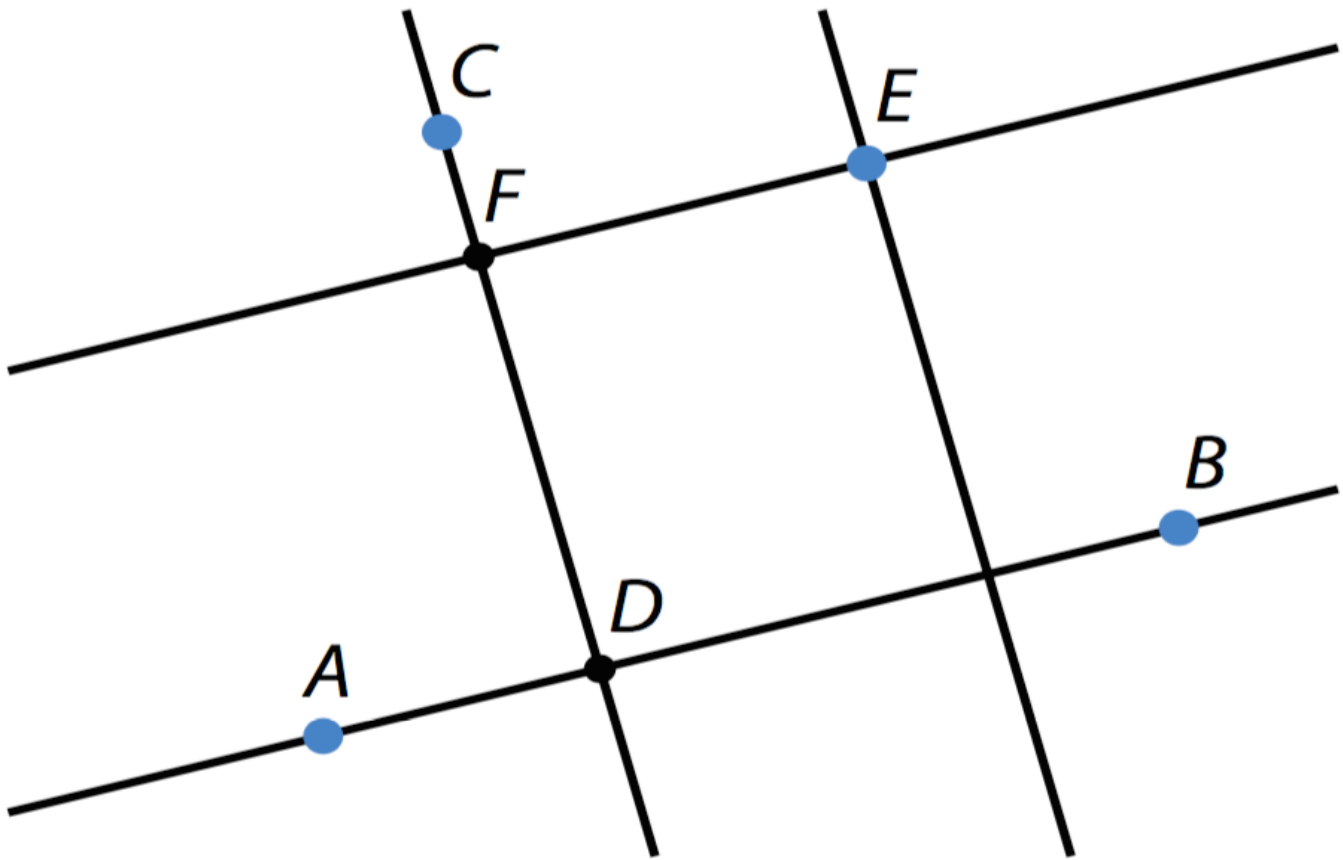
1

- a) Arkistokatu ja Maaherrankatu ovat yhdensuuntaiset. Väite siis pitää paikkansa.
- b) Pirttiniemenkatu ja Tenholankatu eivät ole yhdensuuntaisia. Väite ei siis pidä paikkaansa.
- c) Olkkolankatu ja Tenholankatu eivät ole yhdensuuntaisia. Väite siis pitää paikkansa.
- d) Olkkolankatu ja Arkistokatu ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Väite siis pitää paikkansa.
- e) Olkkolankatu ja Kansankatu ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Väite siis pitää paikkansa.
- f) Tehnolankatu ja Maaherrankatu eivät ole kohtisuorassa toisiaan vastaan. Väite ei siis pidä paikkaansa.

Vastaus:

- a) Pitää paikkansa.
- b) Ei pidä paikkaansa.
- c) Pitää paikkansa.
- d) Pitää paikkansa.
- e) Pitää paikkansa.
- f) Ei pidä paikkaansa.

2

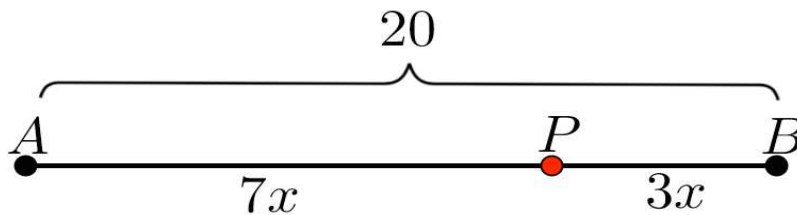


- e) Kuvan perusteella suora EF on yhdensuuntainen suoran AB kanssa.

3

- a) Janan jakosuhte on $7 : 3$. Kun yhden osan pituutta merkitään kirjaimella x , niin jakosuhteen perusteella

$$|AP| = 7x \text{ ja } |PB| = 3x.$$



Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan yhden osan pituus x .

$$7x + 3x = 20$$

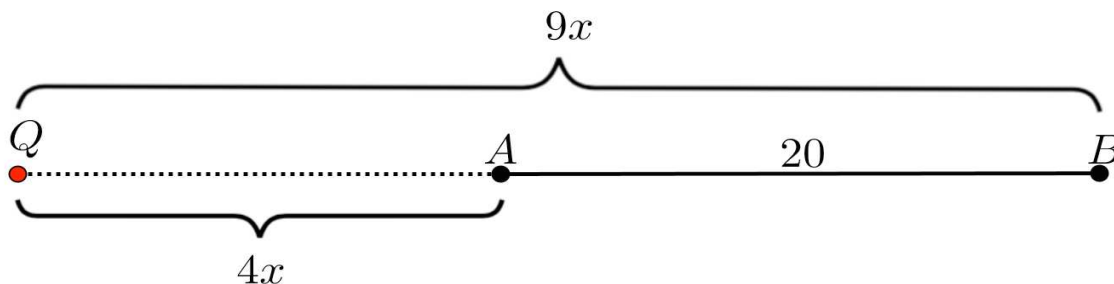
$$10x = 20 \quad | :2$$

$$x = 2$$

Lasketaan janan AP pituus: $|AP| = 7x = 7 \cdot 2 = 14$.

b) Janan jakosuhde on $4 : 9$, joten $|AQ| : |QB| = 4 : 9$. Piste Q on siis lähempänä pistettä A kuin pistettä B eli piste Q on pisteen A puoleisella janan jatkeella. Jakosuhteen perusteella

$$|AQ| = 4x \quad \text{ja} \quad |QB| = 9x.$$



Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan muuttuja x .

$$9x - 4x = 20$$

$$5x = 20 \quad | :5$$

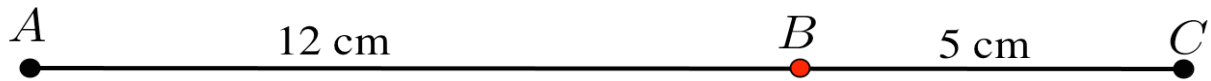
$$x = 2$$

Lasketaan janan AQ pituus: $|AQ| = 4x = 4 \cdot 2 = 8$.

Vastaus: a) $|AP| = 14$ b) $|AQ| = 8$

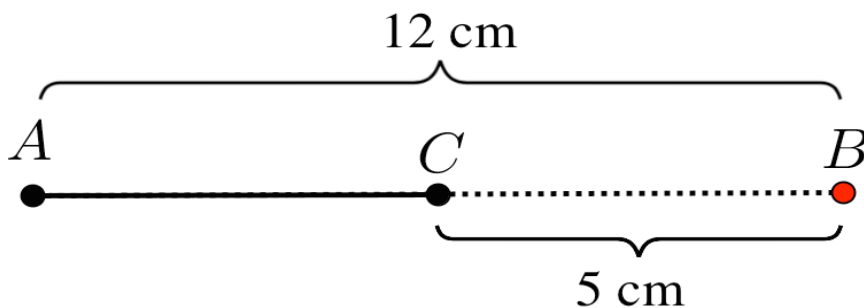
4

a) Piirretään mallikuva.



Lasketaan janan AC pituus: $|AC| = 12 + 5 = 17$ (cm).

b) Koska jana AB on pidempi, kuin jana BC , niin piste B on lähempänä pistettä C kuin pistettä A . Piste B on siis pisteen C puoleisella janan jatkeella.

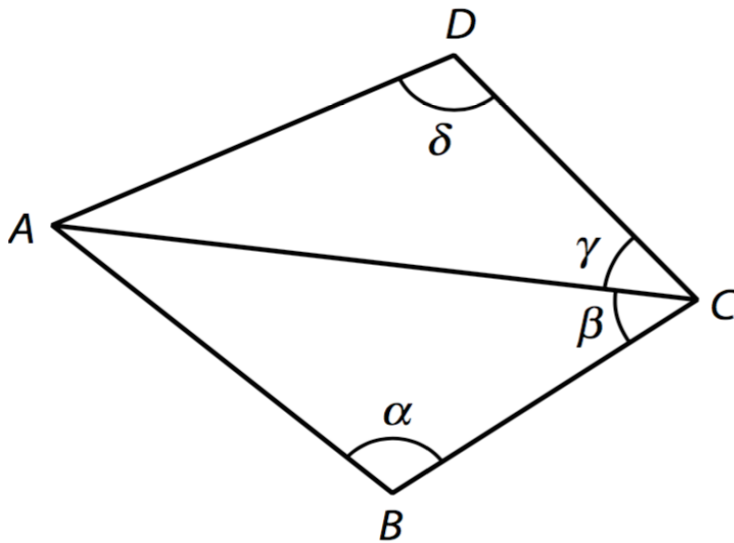


Lasketaan janan AC pituus: $|AC| = 12 - 5 = 7$ (cm).

Vastaus: a) $|AC| = 17$ cm

b) $|AC| = 7$ cm

5



- a) Kärjessä B on kulma α , joten $\sphericalangle CBA = \alpha$.
- b) Kärjessä D on kulma δ , joten $\sphericalangle ADC = \delta$.
- c) Kärjessä C on kaksi kulmaa. Näistä kulmista β on se kulma, jonka kyljillä on pisteet A ja B . Siis $\sphericalangle ACB = \beta$.
- d) Kärjessä C olevista kulmista γ on se kulma, jonka kyljillä on pisteet A ja D . Siis $\sphericalangle DCA = \gamma$.

Vastaus:

a) $\sphericalangle CBA = \alpha$	b) $\sphericalangle ADC = \delta$
c) $\sphericalangle ACB = \beta$	d) $\sphericalangle DCA = \gamma$

6

a) Leveyspiiri:

$$62,910^{\circ} = 62^{\circ} + 0,910 \cdot 60'$$

$$= 62^{\circ} + 54,6'$$

$$= 62^{\circ} 54,6'$$

Pituuspiiri:

$$27,655^{\circ} = 27^{\circ} + 0,655 \cdot 60'$$

$$= 27^{\circ} + 39,3'$$

$$= 27^{\circ} 39,3'$$

b) Leveyspiiri:

$$\begin{aligned}62,910^{\circ} &= 62^{\circ} 54,6' \\&= 62^{\circ} 54' + 0,6 \cdot 60'' \\&= 62^{\circ} 54' + 36'' \\&= 62^{\circ} 54' 36''\end{aligned}$$

Pituuspiiri:

$$\begin{aligned}27,655^{\circ} &= 27^{\circ} 39,3' \\&= 27^{\circ} 39' + 0,3 \cdot 60'' \\&= 27^{\circ} 39' + 18'' \\&= 27^{\circ} 39' 18''\end{aligned}$$

Vastaus: a) leveyspiiri: $62^{\circ} 54,6'$, pituuspiiri: $27^{\circ} 39,3'$
 b) leveyspiiri: $62^{\circ} 54' 36''$, pituuspiiri: $27^{\circ} 39' 18''$

7

a)

Terävä kulma	Tylppä kulma	Kovera kulma	Kupera kulma
25°	95°	25°	183°
65°	155°	65°	210°
85°	177°	85°	350°
		90°	
		95°	
		155°	
		177°	

b) Komplementtikulmien summa on 90°, joten komplementtikulmia ovat 25° ja 65°.

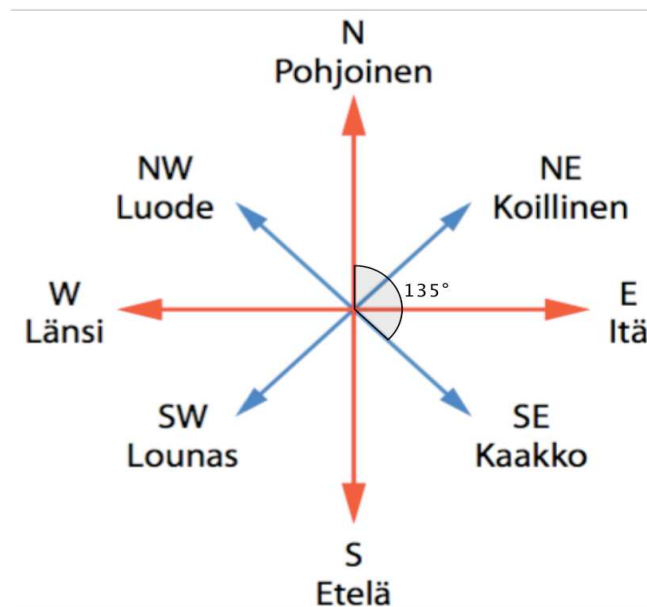
c) Suplementtikulmien summa on 180°, joten suplementtikulmia ovat

25° ja 155°,

85° ja 95°.

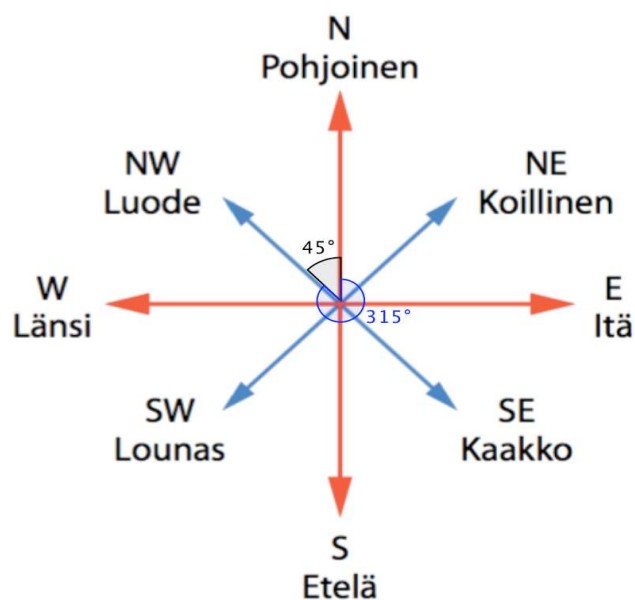
8

a) Kierretään 135° pohjoisesta myötäpäivään.



Eemeli kulkee kaakkoon.

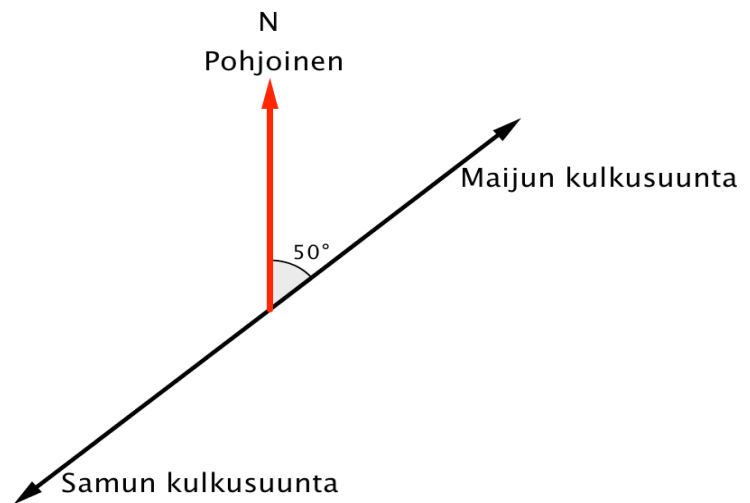
b) Luoteen ja pohjoisen välinen kulma on 45° . Kompassisuunta luoteeseen on siis $360^\circ - 45^\circ = 315^\circ$.



c)

Maijun kulkee
kompassisuuntaan 50° .

Samu kävelee
vastakkaiseen suuntaan.



Samun kävelee siis kompassisuuntaan $50^\circ + 180^\circ = 230^\circ$.

Vastaus: a) kaakkoon b) 315° c) 230°

9

Kulman β suuruus on nelinkertainen kulmaan α verrattuna, joten $\beta = 4\alpha$.

a) Kulmat α ja β ovat komplementtikulmia eli niiden summa on 90° . Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan α .

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

$$\alpha + 4\alpha = 90^\circ$$

$$5\alpha = 90^\circ \quad | :5$$

$$\alpha = 18^\circ$$

b) Kulmat α ja β ovat suplementtikulmia eli niiden summa on 180° . Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan α .

$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

$$\alpha + 4\alpha = 180^\circ$$

$$5\alpha = 180^\circ \quad | :5$$

$$\alpha = 36^\circ$$

c) Kulmat α ja β ovat eksplementtikulmia eli niiden summa on 360° . Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan α .

$$\alpha + \beta = 360^\circ$$

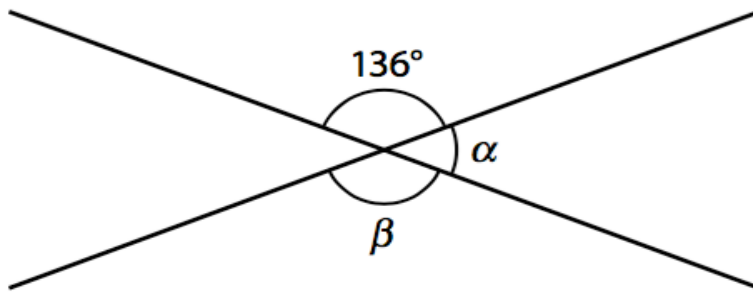
$$\alpha + 4\alpha = 360^\circ$$

$$5\alpha = 360^\circ \quad | :5$$

$$\alpha = 72^\circ$$

Vastaus: a) 18° b) 36° c) 72°

10



a) Kulma α on 136 asteen kulman vieruskulma.

Lasketaan kulman α suuruus: $\alpha = 180^\circ - 136^\circ = 44^\circ$

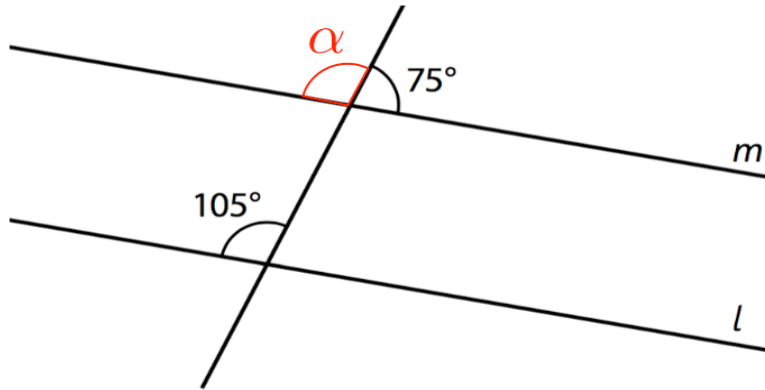
b) Kulma β on 136 asteen kulman ristikulma eli $\beta = 136^\circ$.

c) Suorien leikkauspisteeseen muodostuvat kulmat ovat 34° ja 136° . Suorien välinen kulma on on muodostuvista kulmista pienin, joten suorien välinen kulma on 34° .

Vastaus: a) $\alpha = 44^\circ$ b) $\beta = 136^\circ$ c) 44°

11

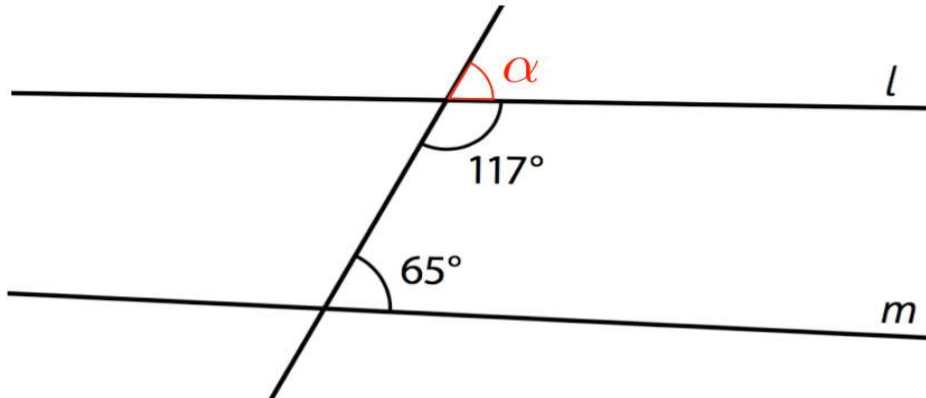
- a) Kuvaan merkitty kulma α ja 105° :n kulma ovat samankohtaisia kulmia. Selvitetään, ovatko samankohtaiset kulmat yhtä suuria.



Kulma α on 75° :n kulman vieruskulma, joten $\alpha = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$.

Koska samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuret, niin suorat l ja m ovat yhdensuuntaiset.

- b) Kuvaan merkitty kulma α ja 65° :n kulma ovat samankohtaisia kulmia. Selvitetään, ovatko samankohtaiset kulmat yhtä suuria.



Kulma α on 117° :n kulman vieruskulma, joten $\alpha = 180^\circ - 117^\circ = 63^\circ \neq 65^\circ$.

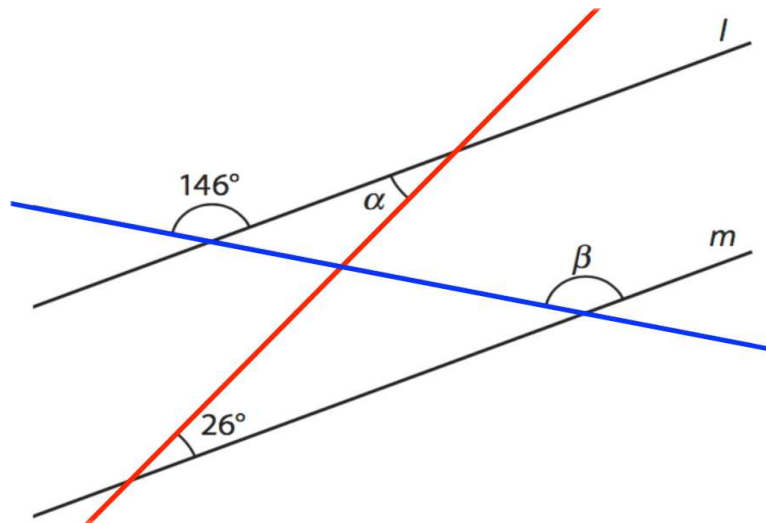
Koska samankohtaiset kulmat eivät ole yhtä suuria, niin suorat l ja m eivät ole yhdensuuntaiset.

Vastaus: a) ovat b) eivät ole

12

Koska suorat l ja m ovat yhdensuuntaiset, niin samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuret.

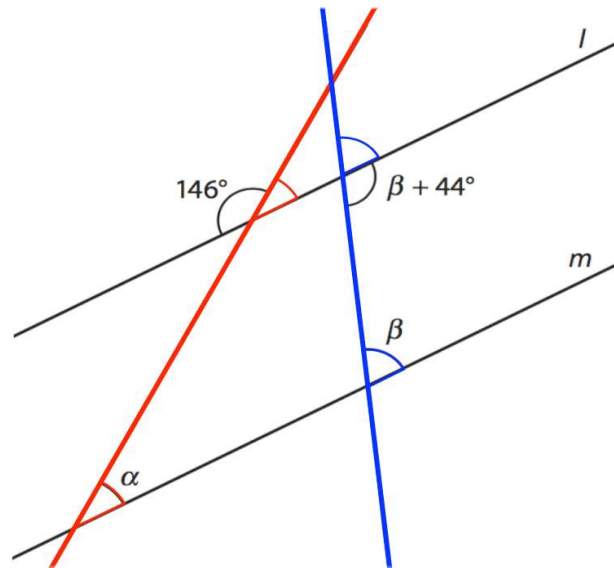
a)



Punainen leikkaava suora on kulman α ja 26° :n kulman vasen kylki, joten ne ovat samankohtaisia kulmia. Täten $\alpha = 26^\circ$.

Sininen leikkaava suora on kulman β ja 146° :n kulman vasen kylki, joten ne ovat samankohtaisia kulmia. Täten $\beta = 146^\circ$.

b)



Punainen leikkaava suora on kulman α vasen kylki ja 146° :n kulman oikea kylki, joten kulman α kanssa samankohtainen kulma on 146° :n kulman vieruskulma.

Täten $\alpha = 180^\circ - 146^\circ = 34^\circ$.

Sininen leikkaava suora on kulman β vasen kylki ja kulman $\beta + 44^\circ$ oikea kylki, joten kulman β kanssa samankohtainen kulma on kulman $\beta + 44^\circ$ vieruskulma.

Lasketaan kulman β suuruus.

$$\beta = 180^\circ - (\beta + 44^\circ)$$

$$\beta = 180 - \beta - 44^\circ \quad | + \beta$$

$$2\beta = 136^\circ \quad | :2$$

$$\beta = 68^\circ$$

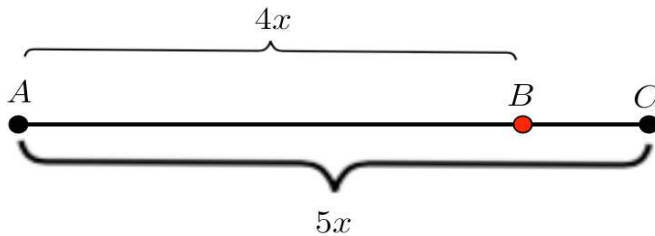
Vastaus: a) $\alpha = 26^\circ$ ja $\beta = 146^\circ$ b) $\alpha = 34^\circ$ ja $\beta = 68^\circ$

13

a) Koska $|AB| = \frac{4}{5}|AC|$, niin $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{4}{5}$.

Olkoon $|AB| = 4x$. Tällöin $|AC| = 5x$.

Piirretään mallikuva



Janan BC pituus on siis $5x - 4x = x$.

Piste B siis jakaa janan AC suhteessa

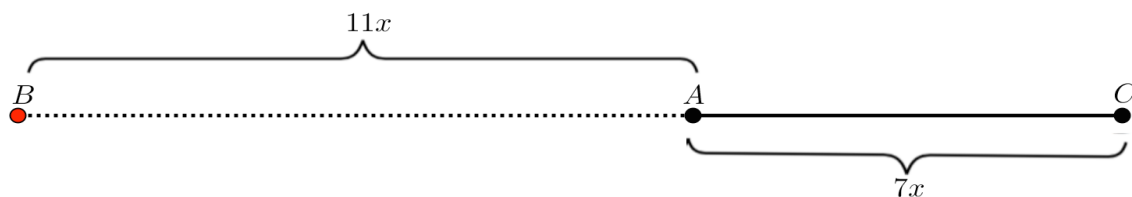
$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{4\cancel{x}}{\cancel{x}} = \frac{4}{1} = 4:1.$$

b) Koska $|AB| = \frac{11}{7}|AC|$, niin $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{11}{7}$.

Olkoon $|AB| = 11x$. Tällöin $|AC| = 7x$.

Nyt piste B sijaitsee janan AC jatkeella

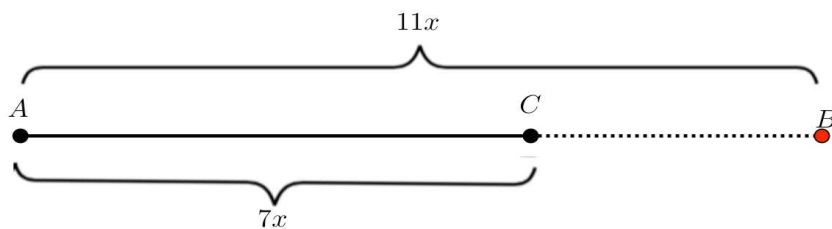
1) Oletetaan ensin, että piste B on pisteen A puoleisella janan jatkeella.



Piste B jakaa janan AC suhteessa

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{11\cancel{x}}{18\cancel{x}} = \frac{11}{18} = 11:18.$$

2) Oletetaan seuraavaksi, että piste B on pisteen C puoleisella janan jatkeella.



Janan BC pituus on $11x - 7x = 4x$.

Piste B jakaa janan AC suhteessa

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{11\cancel{x}}{4\cancel{x}} = \frac{11}{4} = 11:4.$$

Vastaus a) $4 : 1$ b) $11 : 18$ tai $11 : 4$

14

a)

$$\begin{aligned} 60^{\circ}26'07'' &= 60^{\circ} + \frac{26}{60} + \frac{7}{3600} \\ &= 60,435277\dots^{\circ} \approx 60,435^{\circ} \end{aligned}$$

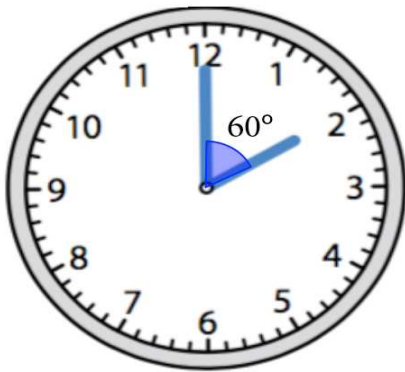
b)

$$\begin{aligned} 22^{\circ}13'43'' &= 22^{\circ} + \frac{13}{60} + \frac{43}{3600} \\ &= 22,228611\dots^{\circ} \approx 22,229^{\circ} \end{aligned}$$

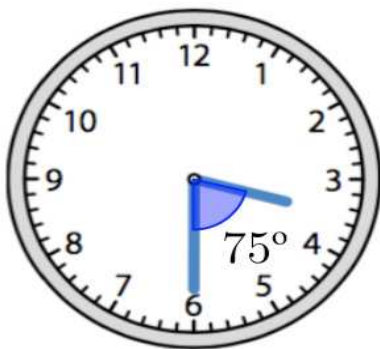
Vastaus a) $60,435^{\circ}$ b) $22,229^{\circ}$

15

- a) Täysi kierros on 360° , joten tuntiviisari kiertää yhdessä tunnissa $\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$. Viisareiden välinen kulma on siis $30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$.

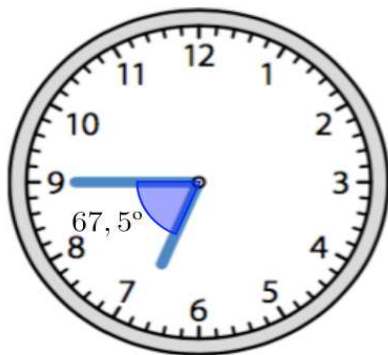


- b) Puolesta tunnissa tuntiviisarin kiertymä on 15° . Viisareiden välinen kulma on siis $30^\circ + 30^\circ + 15^\circ = 75^\circ$.



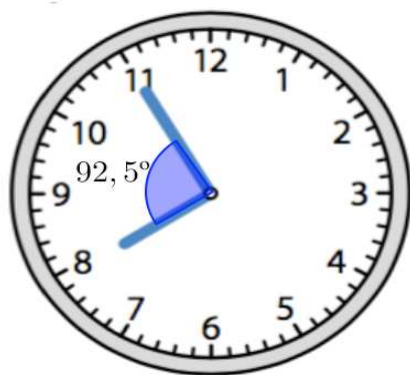
c) 15 minuuttia eli neljäsosatuntia vastaava tuntiviisarin kiertymä on $\frac{30^\circ}{4} = 7,5^\circ$.

Viisareiden välinen kulma on siis $30^\circ + 30^\circ + 7,5^\circ = 67,5^\circ$.



d) 5 minuuttia vastaava tuntiviisarin kiertymä on $\frac{30^\circ}{12} = 2,5^\circ$.

Viisareiden välinen kulma on siis $30^\circ + 30^\circ + 30^\circ + 2,5^\circ = 92,5^\circ$.



Vastaus a) 60°

b) 75°

c) $67,5^\circ$

d) $92,5^\circ$

16

Kulma $\beta = \alpha - 20^\circ$.

a) Komplementtikulmien summa on 90° . Muodostetaan yhtälö.

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

$$\alpha + \alpha - 20^\circ = 90^\circ$$

$$2\alpha = 90 + 20^\circ$$

$$2\alpha = 110^\circ \quad | :2$$

$$\alpha = 55^\circ$$

Tällöin kulma $\beta = 55^\circ - 20^\circ = 35^\circ$.

b) Suplementtikulmien summa on 180° . Muodostetaan yhtälö.

$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

$$\alpha + \alpha - 20^\circ = 180^\circ$$

$$2\alpha = 200^\circ \quad | :2$$

$$\alpha = 100^\circ$$

Tällöin kulma $\beta = 100^\circ - 20^\circ = 80^\circ$.

c) Eksplementtikulmien summa on 360° . Muodostetaan yhtälö.

$$\alpha + \beta = 360^\circ$$

$$\alpha + \alpha - 20^\circ = 360^\circ$$

$$2\alpha = 380^\circ \quad | :2$$

$$\alpha = 190^\circ$$

Tällöin kulma $\beta = 190^\circ - 20^\circ = 170^\circ$.

Vastaus a) $\alpha = 55^\circ$ ja $\beta = 35^\circ$
 b) $\alpha = 100^\circ$ ja $\beta = 80^\circ$
 c) $\alpha = 190^\circ$ ja $\beta = 170^\circ$

17

Koska kulmat α ja β ovat vieruskulmia, niin $\alpha + \beta = 180^\circ$.

Koska kulmien suhde on $\alpha : \beta = 11 : 7$, niin voidaan merkitä $\alpha = 11x$ ja $\beta = 7x$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan muuttuja x .

$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

$$11x + 7x = 180^\circ$$

$$18x = 180^\circ \quad |:18$$

$$x = 10^\circ$$

Lasketaan kulmien suuruudet.

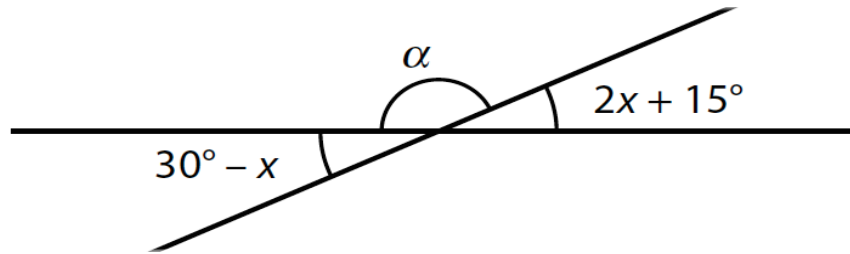
$$\alpha = 11x = 11 \cdot 10^\circ = 110^\circ$$

$$\beta = 7x = 7 \cdot 10^\circ = 70^\circ$$

Suorien välinen kulma on näistä pienempi eli 70° .

Vastaus $\alpha = 110^\circ$ ja $\beta = 70^\circ$, suorien välinen kulma 70°

18



Kulmat $30^\circ - x$ ja $2x + 15^\circ$ ovat ristikulmina yhtä suuret. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan muuttuja x .

$$30^\circ - x = 2x + 15^\circ$$

$$-x - 2x = 15^\circ - 30^\circ$$

$$-3x = -15^\circ \quad | :(-3)$$

$$x = 5^\circ$$

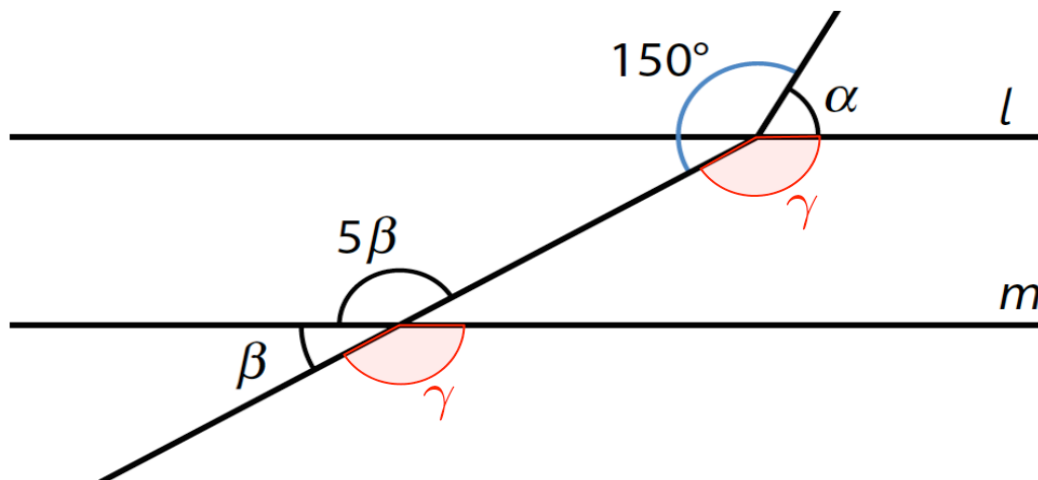
Tällöin kulma $30^\circ - x = 30^\circ - 5^\circ = 25^\circ$.

Kulma α on kyseisen kulman vieruskulma eli $\alpha = 180^\circ - 25^\circ = 155^\circ$.

Vastaus 155°

19

- a) Koska suorat l ja m ovat yhdensuuntaiset, niin kuvaan merkityt samankohtaiset kulmat γ ovat yhtä suuret.



Kulmat β ja 5β ovat vieruskulmat. Muodostetaan yhtälö.

$$\beta + 5\beta = 180^\circ$$

$$6\beta = 180^\circ \quad |:6$$

$$\beta = 30^\circ$$

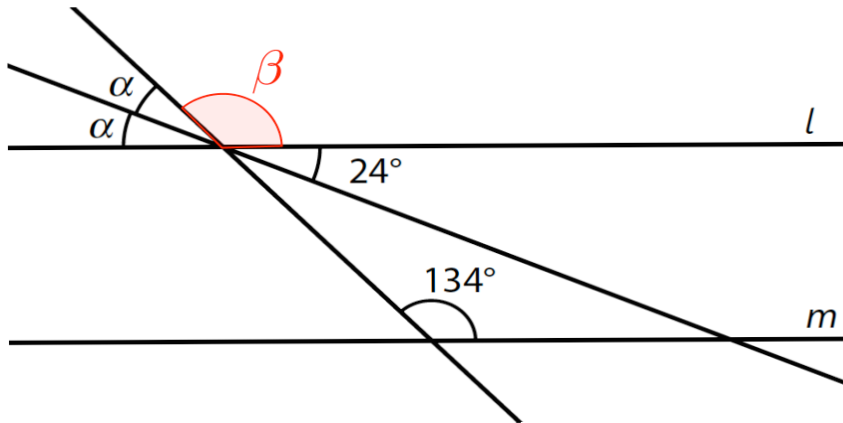
Kulmat γ ja 5β ovat ristikulmina yhtä suuret.

$$\gamma = 5\beta = 5 \cdot 30^\circ = 150^\circ$$

Kulmat α , γ ja 150° muodostavat täyden kulman. Lasketaan kulman α suuruus.

$$\alpha = 360^\circ - 150^\circ - \gamma = 360^\circ - 150^\circ - 150^\circ = 60^\circ$$

b) Selvitetään ovatko samankohtaiset kulmat β ja 134° yhtä suuret.



Kulmat α ja 24° ovat ristikulmina yhtä suuret eli $\alpha = 24^\circ$.

Muodostetaan oikokulman avulla yhtälö ja ratkaistaan kulma β .

$$\alpha + \alpha + \beta = 180^\circ$$

$$24^\circ + 24^\circ + \beta = 180^\circ$$

$$48^\circ + \beta = 180^\circ \quad | -48^\circ$$

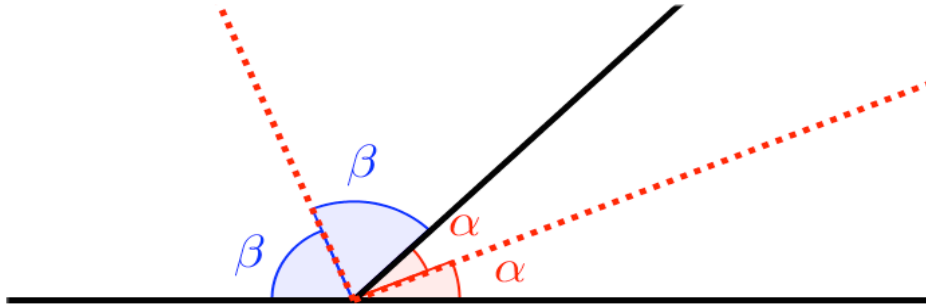
$$\beta = 132^\circ$$

Koska $\beta = 132^\circ \neq 134^\circ$, niin suora l ja m eivät olet yhdensuuntaiset.

Vastaus a) $\alpha = 60^\circ$ ja $\beta = 30^\circ$ b) eivät ole

20

Merkitään kulmien puolikkaita kirjaimilla α ja β .



Kulman ja sen vieruskulman summa on 180° . Muodostetaan yhtälö.

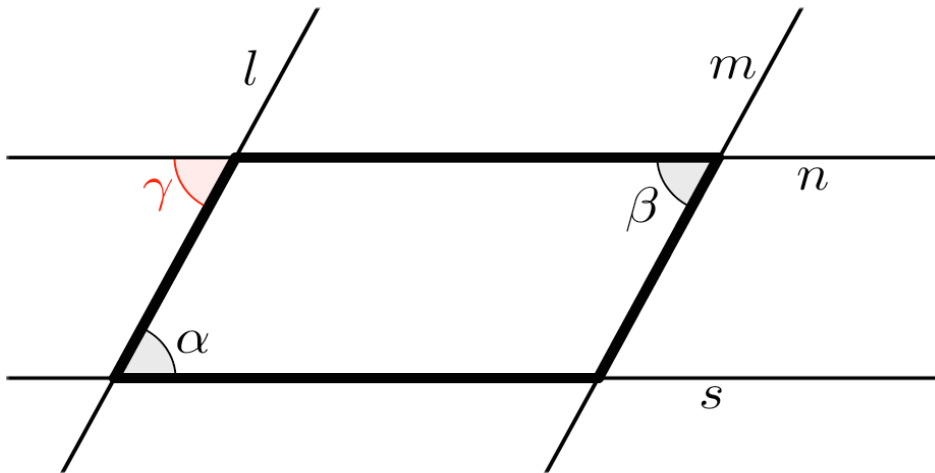
$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ$$

$$2(\alpha + \beta) = 180^\circ \quad | :2$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

On siis osoitettu, että kulman puolittajien välinen kulma $\alpha + \beta = 90^\circ$. Täten kulman puolittajat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. $\square$

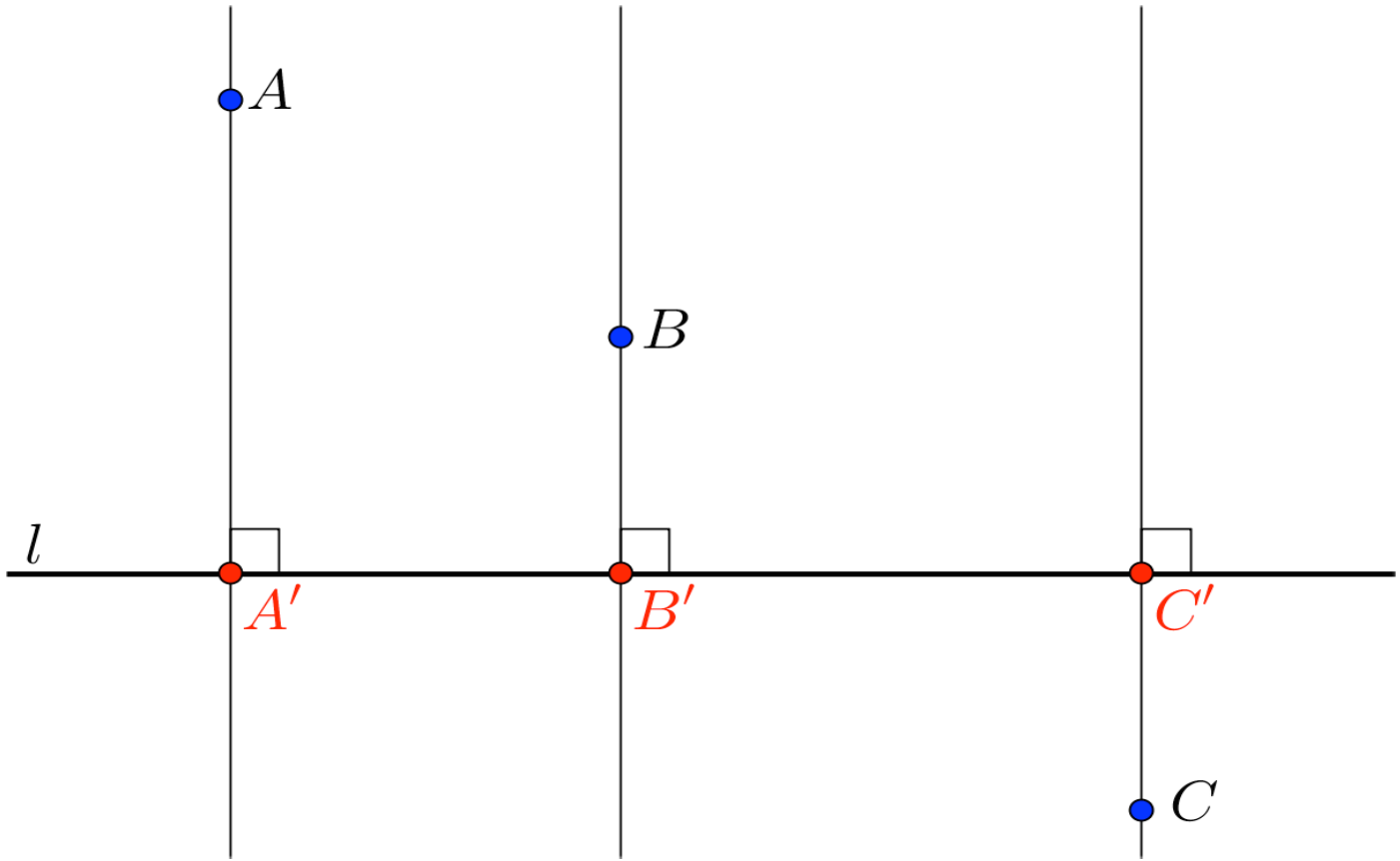
21



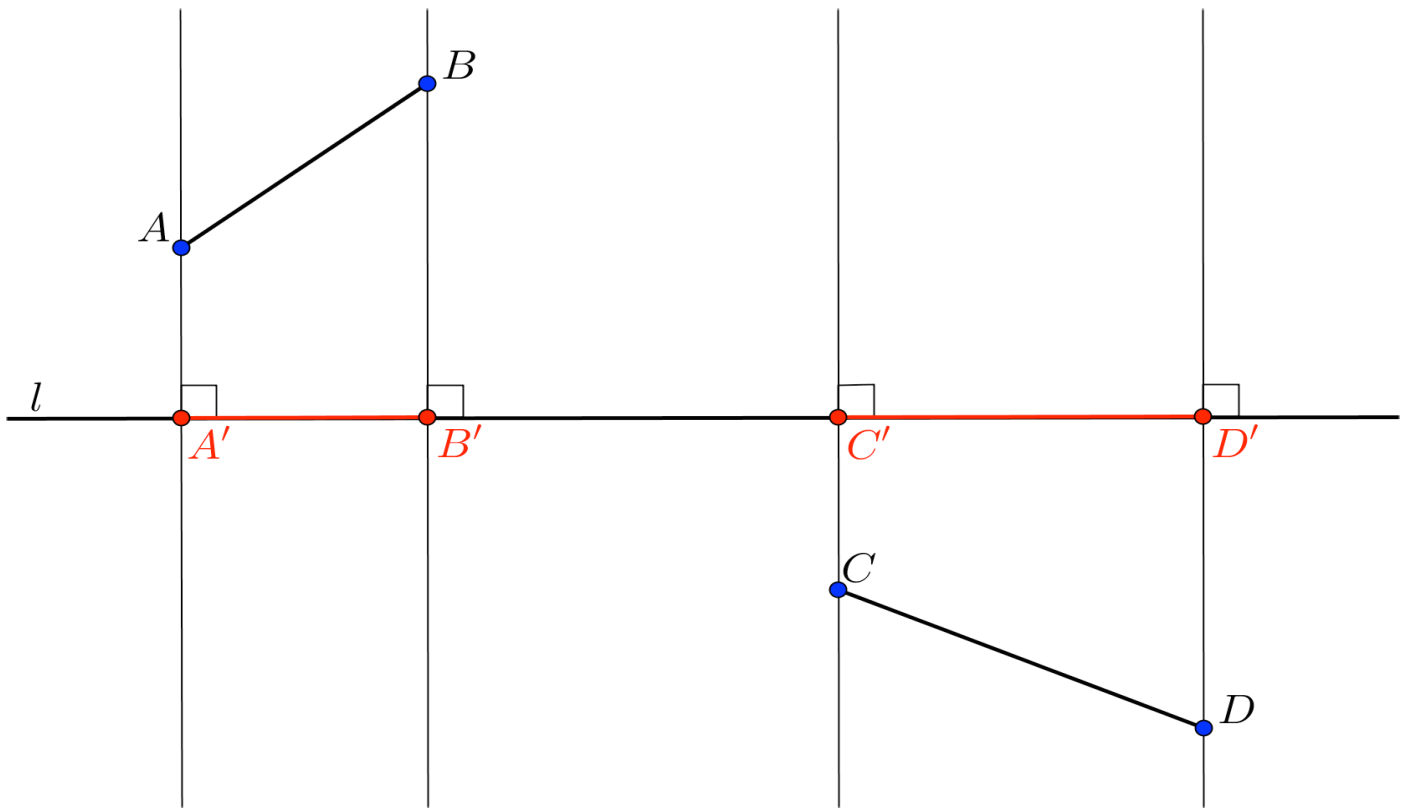
Koska suorat s ja n ovat yhdensuuntaiset, niin samankohtaiset kulmat α ja γ ovat yhtä suuret, $\alpha = \gamma$.

Koska suorat l ja m ovat yhdensuuntaiset, niin samankohtaiset kulmat β ja γ ovat yhtä suuret, $\beta = \gamma$.

On siis osoitettu, että $\alpha = \beta$. □



Piirrä suoralla l normaalit pisteiden A , B ja C kautta. Pisteiden kohtisuorat projektiot A' , B' ja C' ovat normaalien ja suoran l leikkauspisteet.

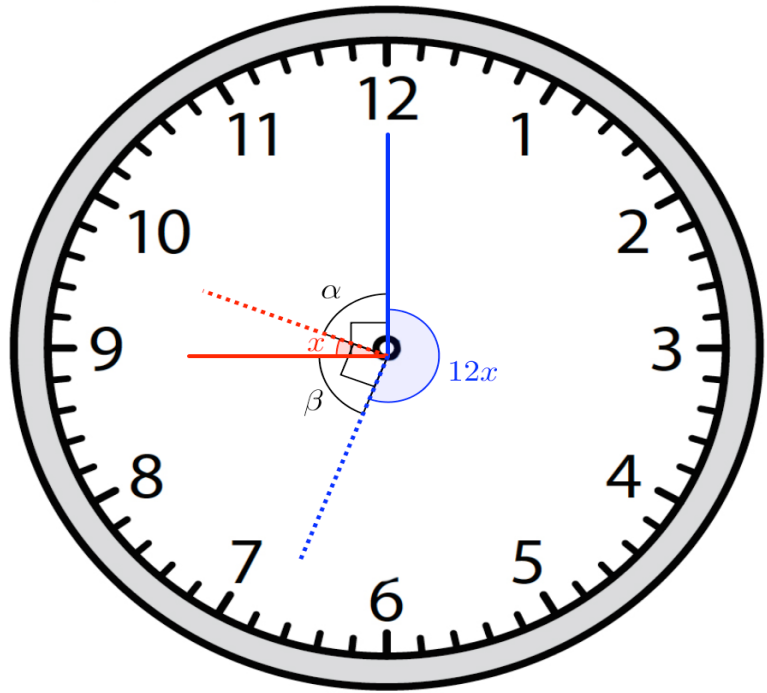


Piirrä suoralla l normaalit pisteiden A , B , C ja D kautta. Janan AB kohtisuora projektio on jana $A'B'$ ja janan CD kohtisuora projektio on $C'D'$.

24

Merkitään tuntiviisarin
kiertymää kirjaimella x .
Samassa ajassa tuntiviisarin
kiertymä on $12x$.

Kulma $\alpha = 90^\circ - x$ ja
kulma $\beta = 90^\circ - x$.



Kulmat α , β , x ja $12x$ muodostavat täyden kulman.
Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan kulma x .

$$\alpha + \beta + x + 12x = 360^\circ$$

$$90^\circ - x + 90^\circ - x + x + 12x = 360^\circ$$

$$180^\circ + 11x = 360^\circ$$

$$x = \frac{180^\circ}{11}$$

Yhdessä tunnissa ($1 \text{ h} = 3600 \text{ s}$) tuntiviisarin kiertymä on 30° .
Lasketaan saatua kiertymää x vastaava aika.

$$\frac{\frac{180^\circ}{11}}{30^\circ} \cdot 3600 \text{ s} = 1963,6363... \text{ s} \approx 1964 \text{ s} = 32 \text{ min } 44 \text{ s}$$

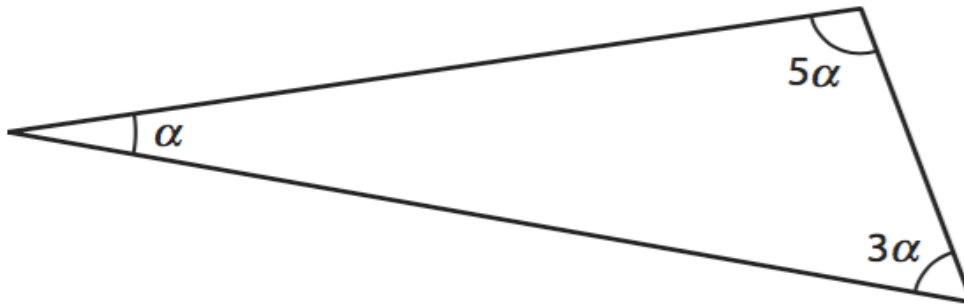
Osoittimet muodostavat kello 9.00 jälkeen suoran kulman seuraavan kerran klo 9.32:44.

Vastaus kello 9.32.44

Kupera monikulmio	A, C, D, E, F
Kovera monikulmio	B
Säännöllinen monikulmio	D, E
Suunnikas	E, F
Tasakylkinen kolmio	C, D
Tasasivuinen kolmio	D

26

a)



Kulmien summa on 180° . Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan kulma α .

$$\alpha + 3\alpha + 5\alpha = 180^\circ$$

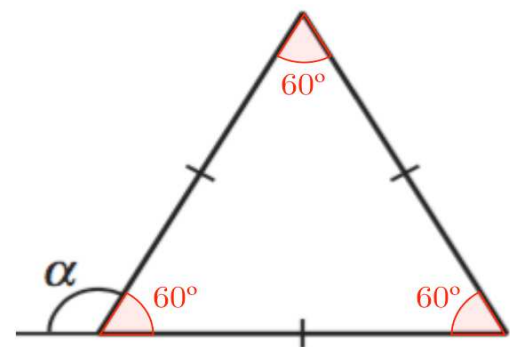
$$9\alpha = 180^\circ \quad |:9$$

$$\alpha = 20^\circ$$

b)

Koska kolmio on tasasivuinen, on sen jokainen kulma 60° . Kulma α on kolmion kulman vieruskulma.

$$\alpha = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$



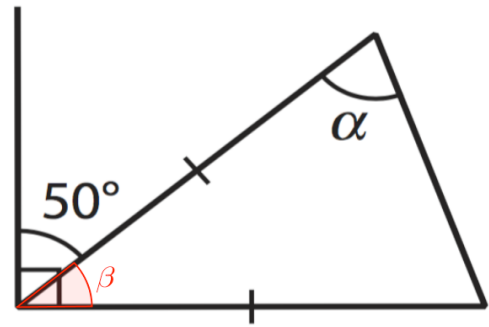
c)

Lasketaan kulman β suuruus.

$$\beta = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$$

Kolmio on tasakylkinen ja sen huippukulma on 40° . Kantakulmat ovat yhtä suuret. Lasketaan kantakulman α suuruus.

$$\alpha = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = \frac{140^\circ}{2} = 70^\circ$$



Vastaus a) $\alpha = 20^\circ$ b) $\alpha = 120^\circ$ c) $\alpha = 70^\circ$

27

a) $4560 \text{ cm} = 45,6 \text{ m}$

b) $0,45 \text{ km} = 450 \text{ m}$

c) $125 \text{ m}^2 = 1,25 \text{ a}$

d) $2,5 \text{ ha} = 25\,000 \text{ m}^2$

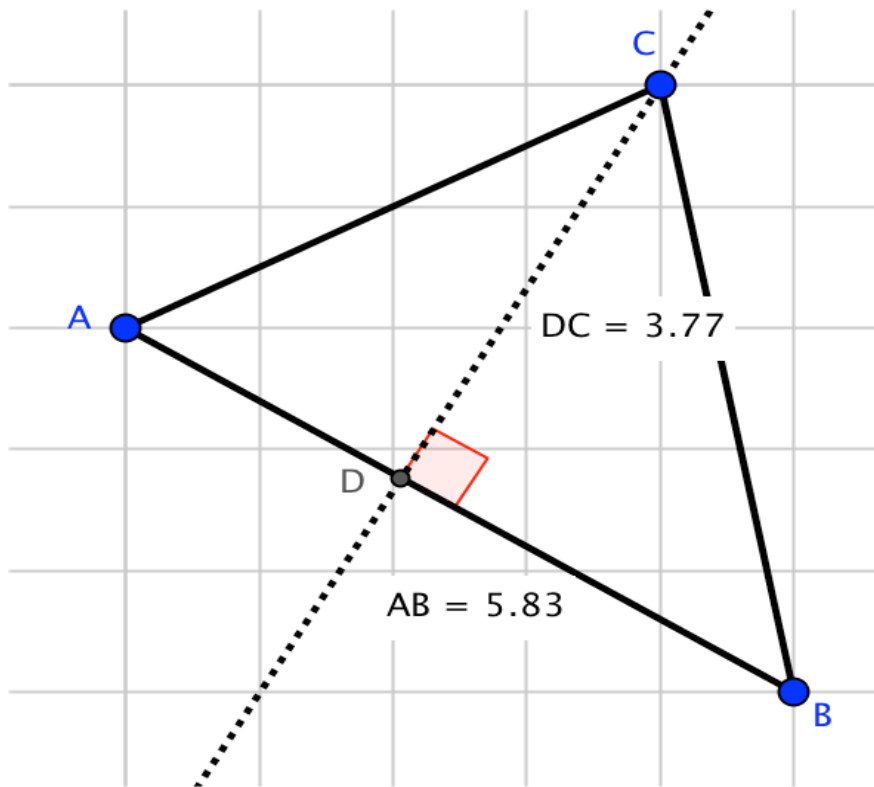
e) $8,54 \cdot 10^6 \text{ mm}^2 = 8,54 \text{ m}^2$

f) $2,5 \text{ dl} = 0,25 \text{ l} = 0,25 \text{ dm}^3$

g) $149 \text{ cm}^3 = 0,149 \text{ dm}^3 = 0,149 \text{ l}$

28

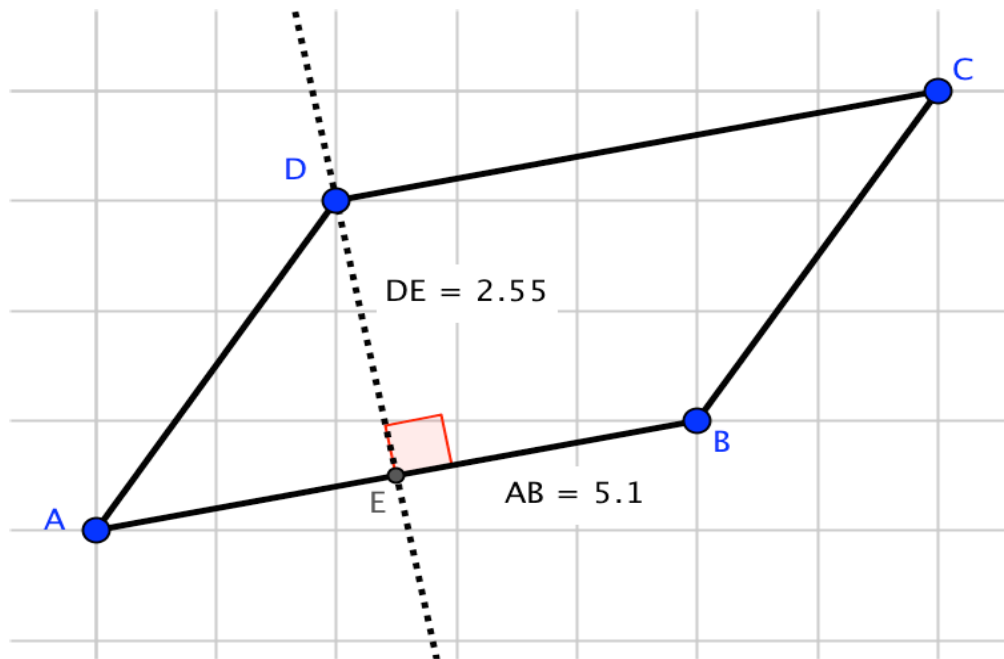
a)



Valitaan yksi sivu kannaksi, esimerkiksi sivu AB ja mitataan sen pituus. Piirretään kannalle normaali, joka kulkee kärjen C kautta. Merkitään kuvaan normaalin ja kannan leikkauspiste D . Mitataan kolmion korkeusjanan DC pituus. Lasketaan pinta-ala.

$$A = \frac{1}{2} \cdot 5,83 \cdot 3,77 = 10,989... \approx 11$$

b)



Valitaan yksi sivu kannaksi, esimerkiksi sivu AB ja mitataan sen pituus. Piirretään kannalle normaali, joka kulkee kärjen D kautta. Merkitään kuvaan normaalin ja kannan leikkauspiste E . Mitataan kolmion korkeusjanan DE pituus. Lasketaan pinta-ala.

$$A = 5,1 \cdot 2,55 = 13,005 \approx 13$$

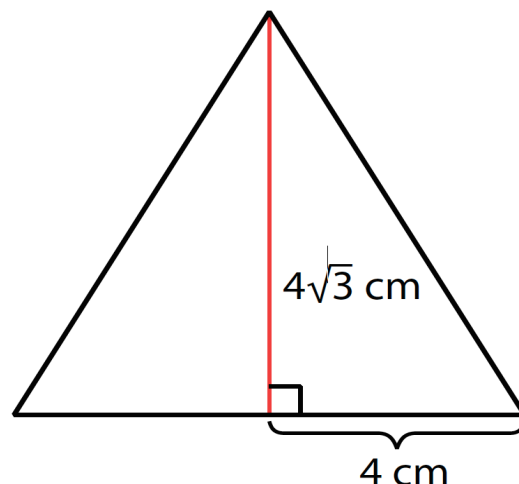
Vastaus a) 11 b) 13

29

Koska kolmio on tasasivuinen, niin korkeusjana puolittaa kolmion kannan. Kolmion kannan pituus on siis 8 cm.

Lasketaan pinta-ala.

$$A = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4\sqrt{3} = 27,7128... \approx 28 \text{ (cm}^2\text{)}$$



Koska kolmio on tasasivuinen, niin kolmion jokainen sivu on yhtä pitkä eli 8 cm.

Lasketaan piiri.

$$p = 3 \cdot 8 = 24 \text{ (cm)}$$

Vastaus pinta-ala 28 cm^2 ja piiri 24 cm

30

Yhden ruudun pinta-ala on $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$. Tällöin puolikkaan ruudun

pinta-ala on $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{32}$

Lasketaan alueiden pinta-alat.

Alueet A ja B :

Alue muodostuu kahdesta kokonaisesta ruudusta ja neljästä ruudun puolikkaasta.

$$A_A = A_B = 2 \cdot \frac{1}{16} + 4 \cdot \frac{1}{32} = \frac{1}{4}$$

Alueet C ja E :

Alue muodostuu kahdesta ruudun puolikkaasta.

$$A_C = A_E = 2 \cdot \frac{1}{32} = \frac{1}{16}$$

Alue D :

Alue muodostuu neljästä ruudun puolikkaasta.

$$A_D = 4 \cdot \frac{1}{32} = \frac{1}{8}$$

Alue F :

Alue muodostuu yhdestä kokonaisesta ruudusta ja kahdesta ruudun puolikkaasta.

$$A_F = \frac{1}{16} + 2 \cdot \frac{1}{32} = \frac{1}{8}$$

Alue G :

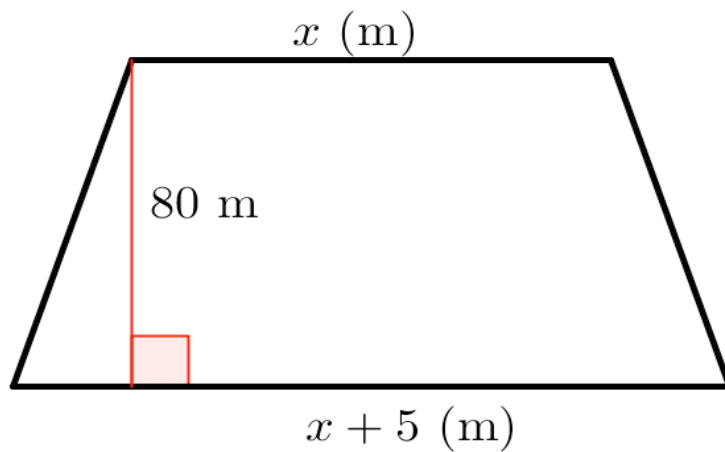
Alue muodostuu yhdestä kokonaisesta ruudusta ja kahdesta ruudun puolikkaasta.

$$A_G = \frac{1}{16} + 2 \cdot \frac{1}{32} = \frac{1}{8}$$

Vastaus $A_A = A_B = \frac{1}{4}, \quad A_C = A_E = \frac{1}{16} \quad \text{ja} \quad A_D = A_F = A_G = \frac{1}{8}$

31

Piirretään mallikuva. Merkitään lyhyemmän yhdensuuntaisen sivun pituutta metreinä kirjaimella x . Tällöin pidemmän sivun pituus on $x + 5$.



Muunnetaan pinta-alan yksikkö neliömetreiksi: $150 \text{ a} = 15\,000 \text{ m}^2$.

Muodostetaan yhtälö puolisuunnikkaan pinta-alan kaavan avulla.

$$\frac{x + x + 5}{2} \cdot 80 = 15\,000$$

$$\frac{2x + 5}{2} \cdot 80 = 15\,000$$

$$x = 185$$

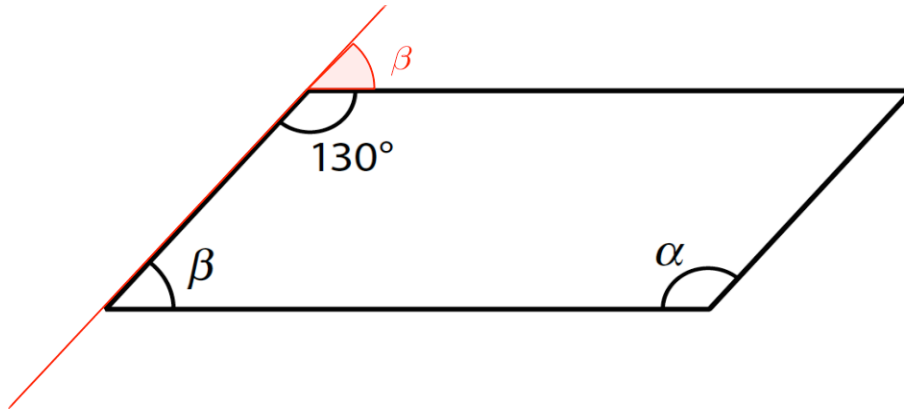
Lyhyempi sivu on siis 185 m ja pidempi sivu $185 \text{ m} + 5 \text{ m} = 190 \text{ m}$.

Vastaus 185 m ja 190 m

32

- a) Suunnikkaan vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuret, joten $\alpha = 130^\circ$.

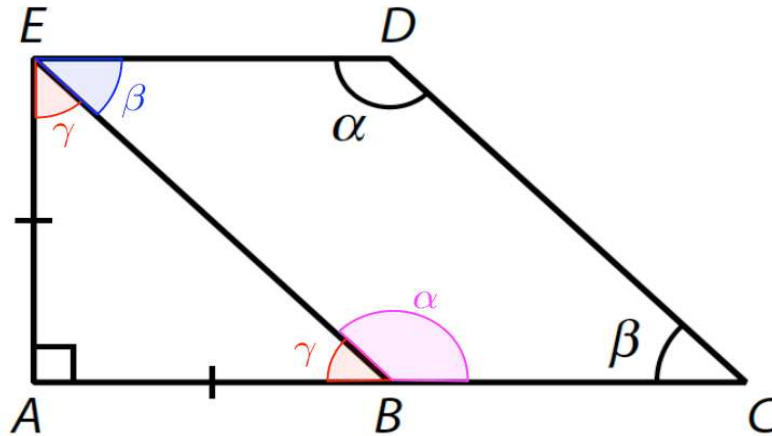
Suunnikkaan vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset, joten samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuret.



Kulmat β ja 130° ovat siis vieruskulmia. Lasketaan kulman β suuruus.

$$\beta = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$$

- b) Suunnikkaan $BCDE$ vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuret.
Tasakylkisen kolmion ABC kantakulmat E ja B ovat yhtä suuret.



Lasketaan ensin kolmion tasakylkisen kolmion ABE kantakulman suuruus kolmion kulmien summan perusteella.

$$2\gamma + 90^\circ = 180^\circ \quad | -90^\circ$$

$$2\gamma = 90^\circ \quad | :2$$

$$\gamma = 45^\circ$$

Kulma α on kulman γ vieruskulma: $\alpha = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.

Koska $ACDE$ on puolisuunnikas, niin sivut BC ja ED ovat yhdensuuntaiset. Täten samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuret eli $\sphericalangle AED = \sphericalangle CAE = 90^\circ$.

Lasketaan kulman β suuruus.

$$\beta = 90^\circ - \gamma = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$$

Vastaus a) $\alpha = 130^\circ$ ja $\beta = 50^\circ$ b) $\alpha = 135^\circ$ ja $\beta = 45^\circ$

33

Kahdeksankulmion kulmien summa on

$$(8 - 2) \cdot 180^\circ = 1080^\circ.$$

Säännöllisen kahdeksankulmion kulmat ovat yhtä suuria, joten yhden kulman suuruus on

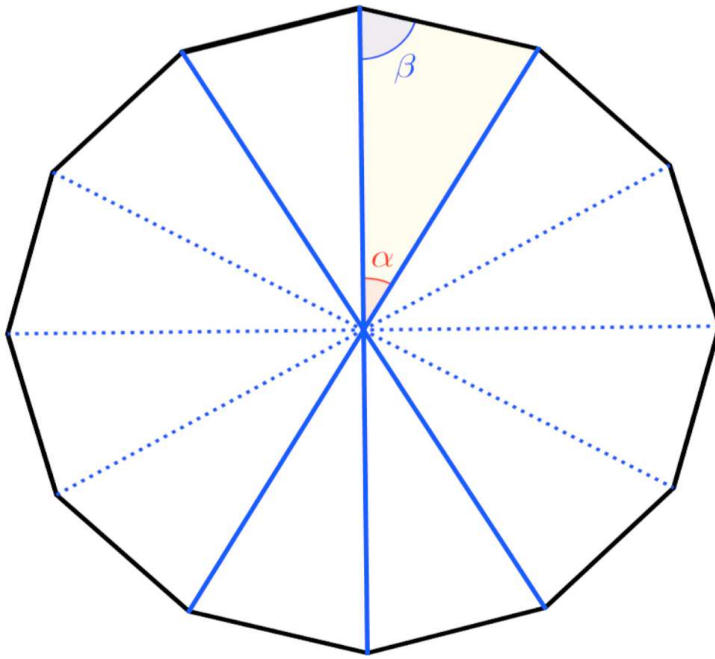
$$\frac{1080^\circ}{8} = 135^\circ.$$

Vastaus 135°

34

Koska säännöllinen monikulmio voidaan jakaa 12 yhteneväksi

kolmioksi, niin $\alpha = \frac{180^\circ}{12} = 30^\circ$.



Muodostuvat kolmiot ovat tasakylkisiä, joten kantakulmat ovat yhtä suuret. Kolmion huippukulma on α . Lasketaan kantakulman suuruus.

$$\alpha + 2\beta = 180^\circ$$

$$30^\circ + 2\beta = 180^\circ$$

$$\beta = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = \frac{150^\circ}{2} = 75^\circ$$

Vastaus $\alpha = 30^\circ$ ja $\beta = 75^\circ$

Huomautus:

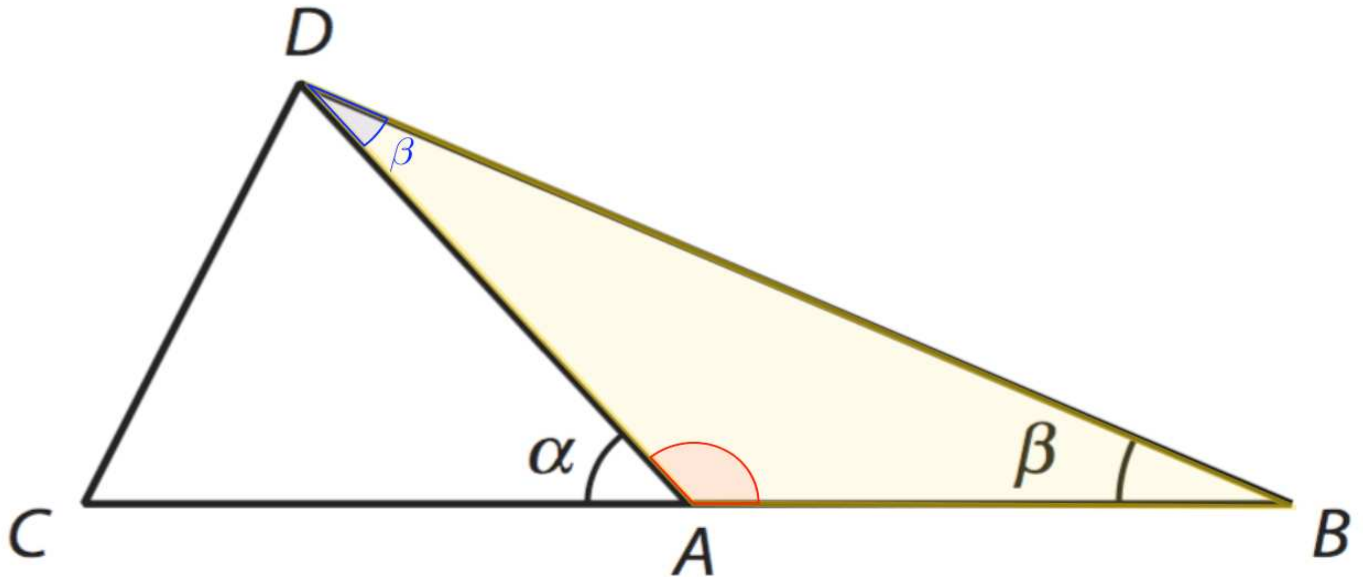
Kulman β voi ratkaista myös 12-kulmion summan avulla:

Säännöllisen 12-kulmion kulma on $\frac{(12+2) \cdot 180^\circ}{12} = 150^\circ$.

Tällöin kulma $\beta = \frac{150^\circ}{2} = 75^\circ$.

35

- a) Koska $|AD| = |AB|$, niin kolmio ABD on tasakylkinen. Siten kantakulmat ADB ja DBA ovat yhtä suuret: $\sphericalangle ADB = \beta$.



Lasketaan huippukulman BAD suuruus kolmion kulmien summan perusteella.

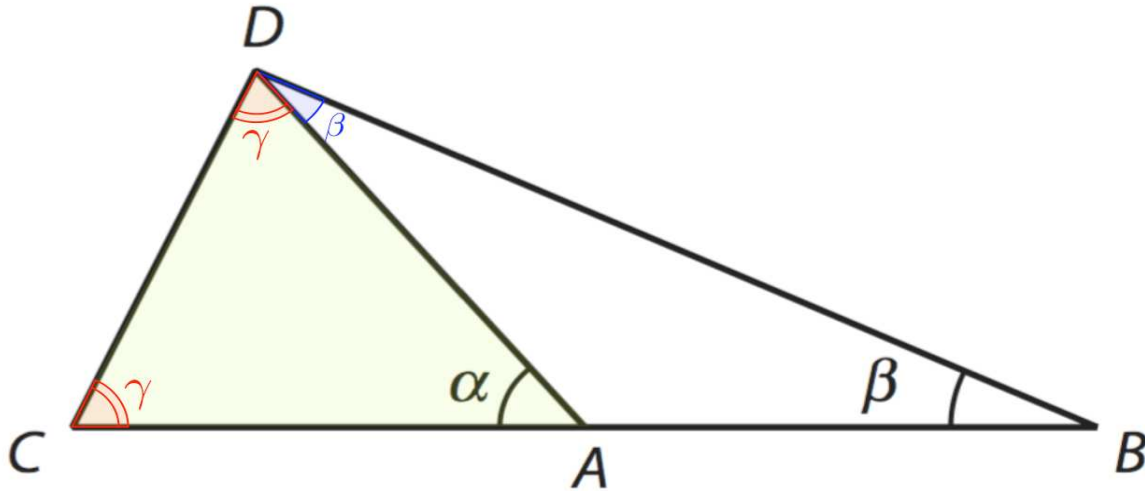
$$\sphericalangle BAD = 180^\circ - \beta - \beta = 180^\circ - 2\beta.$$

Kulma α on kulman BAD vieruskulma, joten sen suuruus on

$$\alpha = 180^\circ - (180^\circ - 2\beta) = 180^\circ - 180^\circ + 2\beta = 2\beta.$$

On siis osoitettu, että $\alpha = 2\beta$. $\square$

- b) Koska $|AC| = |AD|$, niin kolmio CAD on tasakylkinen. Siten kantakulmat ACD ja CDA ovat yhtä suuret. Merkitään kulmia kirjaimella γ .



Lasketaan kulman γ suuruus kolmion kulmien summan perusteella.

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{180^\circ - \alpha}{2} \quad | \alpha = 2\beta \\ &= \frac{180^\circ - 2\beta}{2} \\ &= 90^\circ - \beta\end{aligned}$$

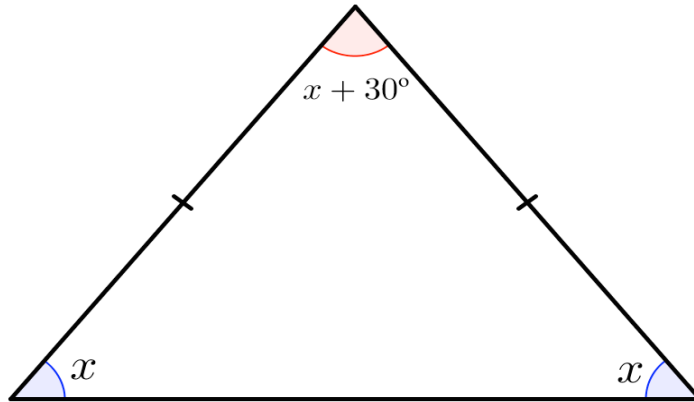
Lasketaan kulman CDB suuruus.

$$\begin{aligned}\sphericalangle CDB &= \beta + \gamma \quad | \gamma = 90^\circ - \beta \\ &= \beta + 90^\circ - \beta \\ &= 90^\circ\end{aligned}$$

On siis osoitettu, että kulma CDB on suora. $\square$

36

- a) Tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret. Merkitään kantakulman suuruutta kirjaimella x . Tällöin huippukulman suuruus on $x + 30^\circ$.



Muodostetaan yhtälö kolmion kulmien summan perusteella ja ratkaistaan x .

$$x + x + x + 30^\circ = 180^\circ$$

$$3x + 30^\circ = 180^\circ \quad | -30^\circ$$

$$3x = 150^\circ \quad | :3$$

$$x = 50^\circ$$

Kantakulmien suuruus on siis 50° ja huippukulman $50^\circ + 30^\circ = 80^\circ$.

b) Merkitään kolmion pienintä kulmaa kirjaimella x . Koska kulmien suhde on $1 : 2 : 3$, niin muut kulmat ovat $2x$ ja $3x$.

Muodostetaan yhtälö kolmion kulmien summan perusteella ja ratkaistaan x .

$$x + 2x + 3x = 180^\circ$$

$$6x = 180^\circ \quad | :6$$

$$x = 30^\circ$$

Kolmion kulmat ovat siis 30° , $2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$ ja $3 \cdot 30^\circ = 90^\circ$.

Vastaus a) 50° , 50° ja 80° b) 30° , 60° ja 90°

Huomautus:

Kulman β voi ratkaista myös 12-kulmion summan avulla:

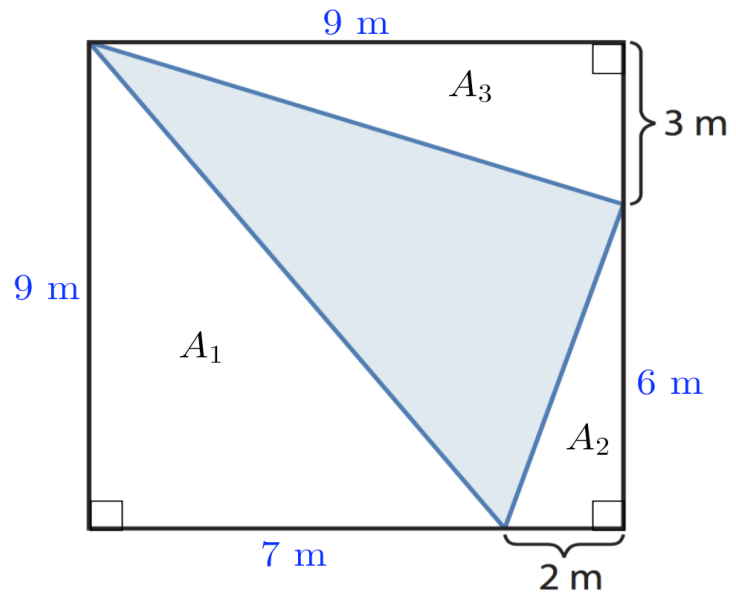
Säännöllisen 12-kulmion kulma on $\frac{(12+2) \cdot 180^\circ}{12} = 150^\circ$.

Tällöin kulma $\beta = \frac{150^\circ}{2} = 75^\circ$.

37

Neliön pinta-ala on $A_N = 9 \cdot 9 = 81 \text{ (m}^2\text{)}.$

Väritetyn alueen pinta-ala voidaan laskea vähentämällä neliön pinta-alasta valkoisten suorakulmaisen kolmioiden pinta-alat. Määritetään valkoisten kolmioiden kohtisuorien sivujen pituudet.



Lasketaan suorakulmaisten kolmioiden pinta-alat.

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 9 = 31,5 \text{ (m}^2\text{)}$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 = 6 \text{ (m}^2\text{)}$$

$$A_3 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 9 = 13,5 \text{ (m}^2\text{)}$$

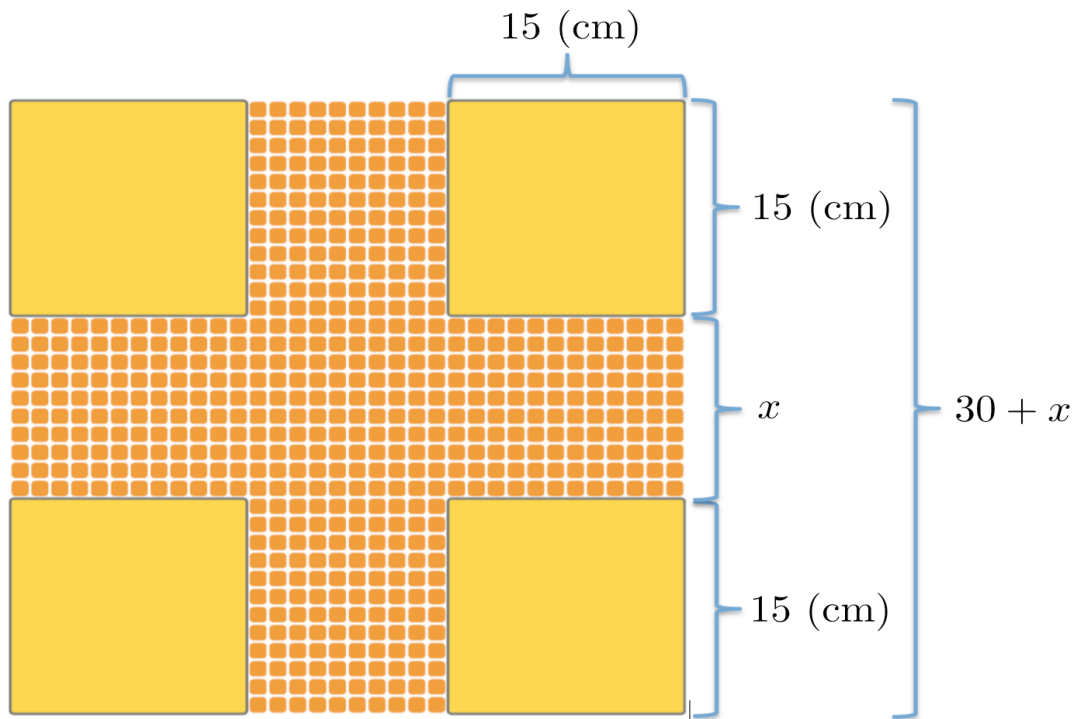
Lasketaan väritetyn alueen pinta-ala.

$$A = 81 - 31,5 - 6 - 13,5 = 30 \text{ (m}^2\text{)}$$

Vastaus 30 m^2

38

Merkitään raidan leveyttä kirjaimella x . Tällöin koko ruudukon leveys on $30 + x$.



Keltaisten laattojen yhteispinta-ala on sama kuin oranssin ristin pinta-ala. Täten keltaisten laattojen yhteispinta-ala on yhtä suuri kuin puolet koko laatoituksen pinta-alasta. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan muuttuja x .

$$4 \cdot 15^2 = \frac{(30 + x)^2}{2}$$

$$x = -72,426... \text{ (cm)} \quad \text{tai} \quad x = 12,426... \text{ (cm)}$$

Koska raidan leveys on positiivinen, niin $x \approx 12,4$ cm.

Vastaus 12,4 cm

39

Lasketaan alkuperäisen suunnikkaan pinta-ala.

$$A = 7 \cdot 4 = 28 \text{ (cm}^2\text{)}$$

a) Korkeus kasvaa 50%, joten uusi korkeus on $1,50 \cdot 4 \text{ cm} = 6 \text{ cm}$.

Merkitään uutta kannan pituutta kirjaimella x ja muodostetaan yhtälö.

$$x \cdot 6 = 28 \quad | :6$$

$$x = \frac{14}{3} \text{ (cm)}$$

Lasketaan uuden kannan pituuden suhde alkuperäiseen pituuteen.

$$\frac{\frac{14}{3} \text{ cm}}{7 \text{ cm}} = 0,666\dots$$

Kannan pituus siis pienenee $1 - 0,666\dots = 0,333\dots \approx 0,33 = 33\%$.

- b) Korkeus pienenee 50%, joten uusi korkeus on
 $0,50 \cdot 4 \text{ cm} = 2 \text{ cm}$.

Merkitään uutta kannan pituutta kirjaimella x ja muodostetaan yhtälö.

$$x \cdot 2 = 28 \quad |:2$$

$$x = 14 \text{ (cm)}$$

Lasketaan uuden kannan pituuden suhde alkuperäiseen pituuteen.

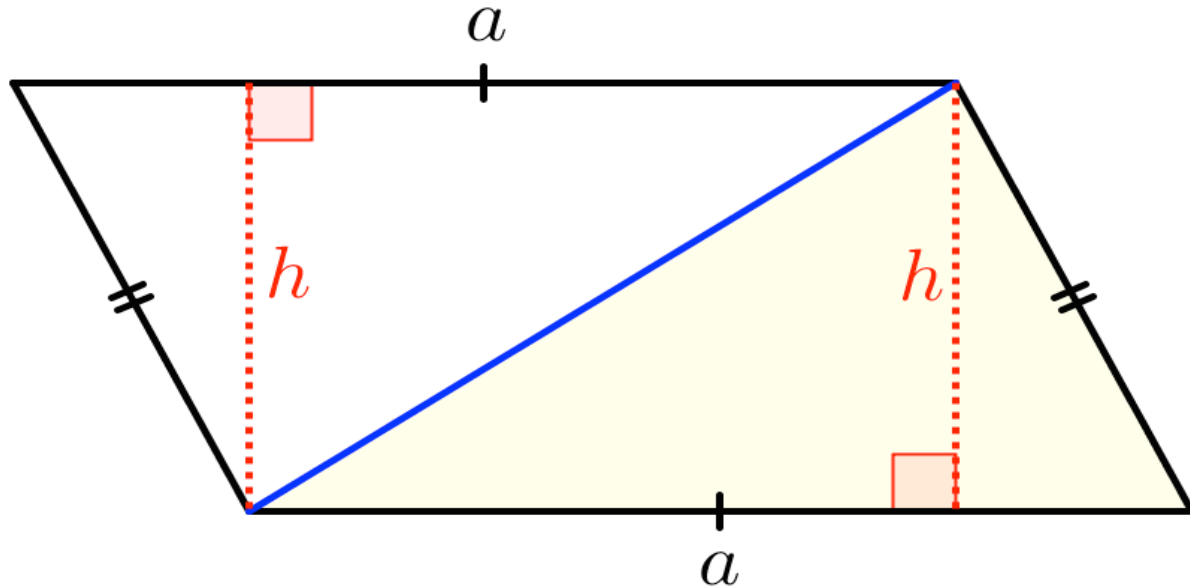
$$\frac{14 \text{ cm}}{7 \text{ cm}} = 2$$

Kannan pituus siis kasvaa $2 - 1 = 1 = 100\%$.

Vastaus a) pienenee 33% b) kasvaa 100%

40

- a) Suunnikas voidaan jakaa kahteen kolmioon. Kolmioiden pinta-alat ovat yhtä suuret, koska niillä on saman niiden kannat ovat yhtä pitkät ja niillä on sama korkeus.

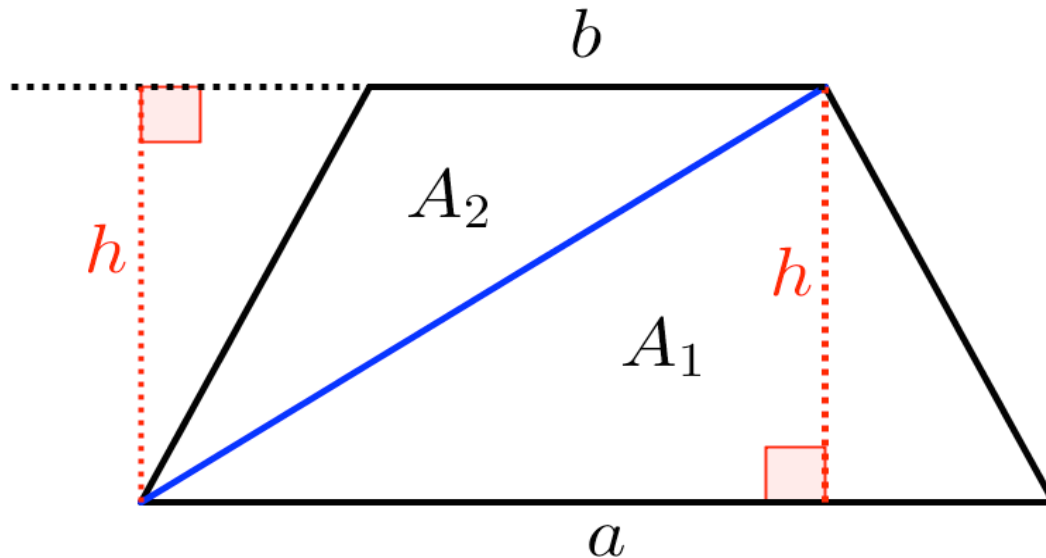


Kolmion pinta-ala $A_K = \frac{1}{2}ah$, joten suunnikkaan pinta-ala on

$$A = 2 \cdot A_K = 2 \cdot \frac{1}{2}ah = ah.$$

On siis osoitettu, että suunnikkaan pinta-ala on kannan a ja korkeuden h tulo: $A = ah$. $\square$

- b) Merkitään puolisuunnikkaan yhdensuuntaisten sivujen pituuksia kirjaimilla a ja b . Puolisuunnikas voidaan jakaa kahteen kolmioon, joilla on sama korkeus h .



Muodostetaan lausekkeet kolmioiden pinta-aloille.

$$A_1 = \frac{1}{2}ah \quad \text{ja} \quad A_2 = \frac{1}{2}bh$$

Puolisuunnikkaan pinta-alaksi saadaan

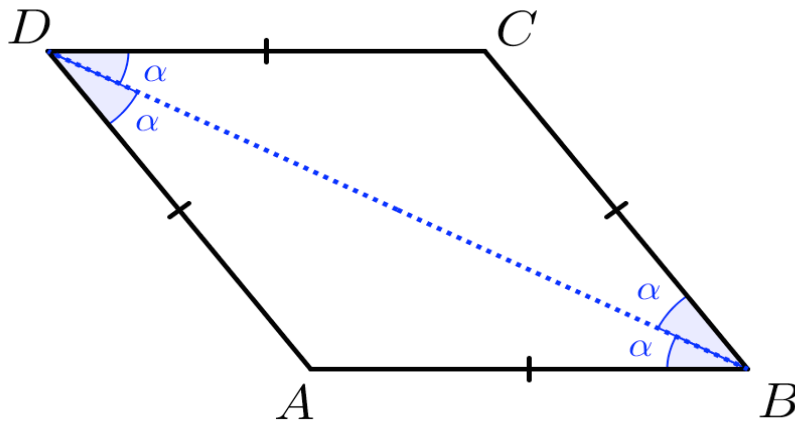
$$A = A_1 + A_2 = \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(a+b)h .$$

On siis osoitettu, että puolisuunnikkaan pinta-ala on yhdensuuntaisten sivujen pituuksien a ja b keskiarvon ja

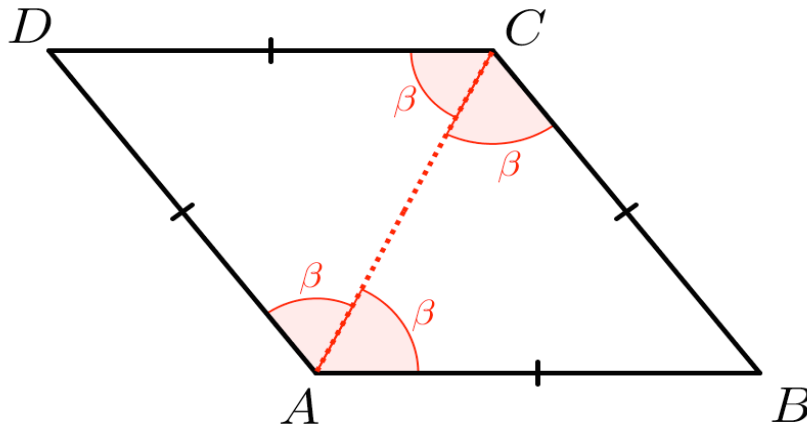
korkeuden h tulo: $A = \frac{1}{2}(a+b)h$. $\square$

41

Lävistäjä BD jakaa neljäkkään kahteen tasakylkiseen kolmioon. Koska suunnikkaan vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuret, niin kolmioiden huippukulmat A ja C ovat yhtä suuret. Täten myös kolmioiden ABD ja BCD kantakulmat ovat yhtä suuret.

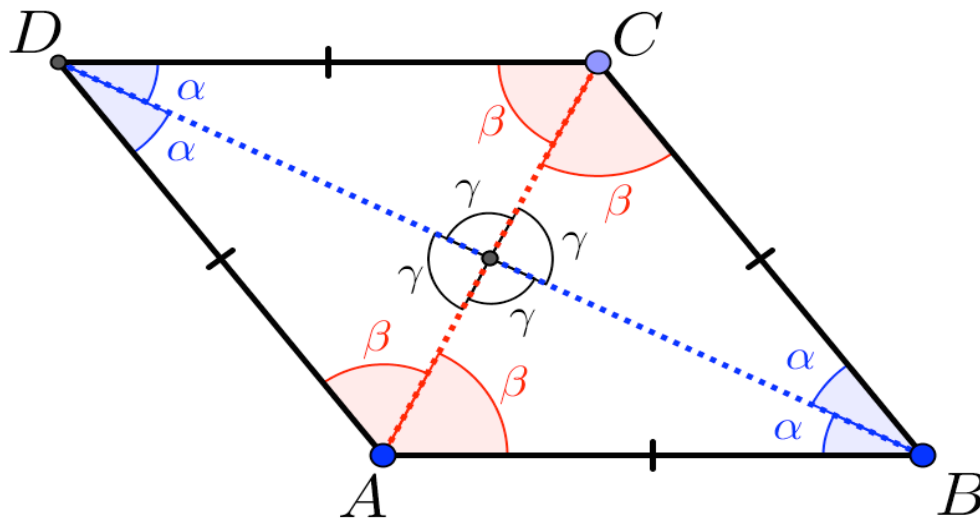


Vastaavasti lävistäjä AC jakaa neljäkkään kahteen tasakylkiseen kolmioon, joiden kantakulmat ovat yhtä suuret.



Molemmat lävistäjät jakavat neljäkkään neljään kolmioon. Jokaisessa näistä kolmiossa on kulmat α ja β . Täten kunkin kolmion kolmas kulma on yhtä suuri ($\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$). Koska kyseiset kulmat muodostavat täyden kulman, niin yhden kulman suuruus on

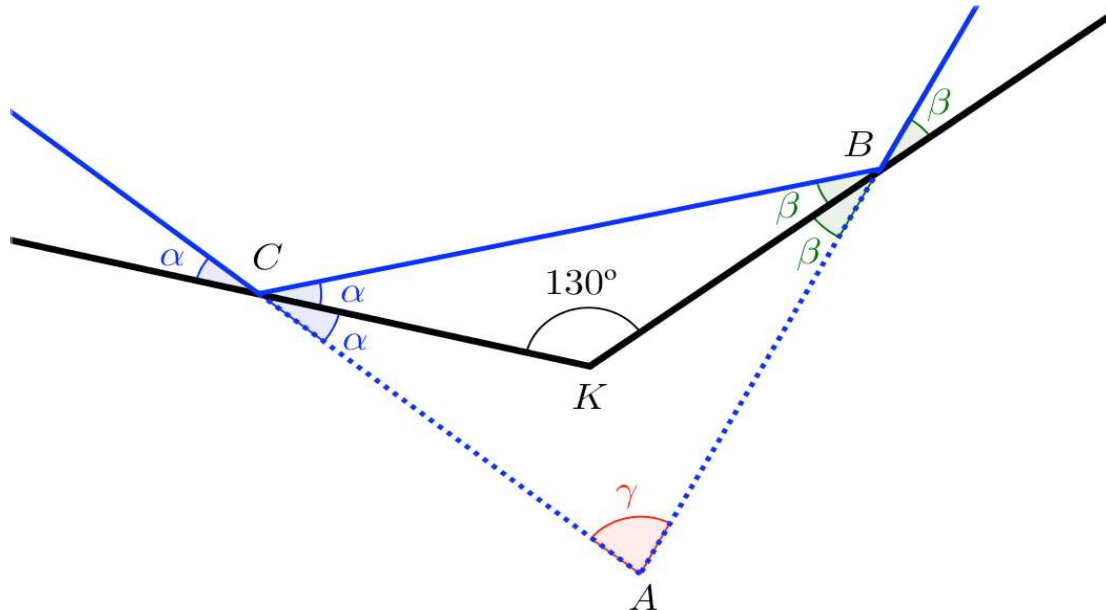
$$\gamma = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ.$$



On siis osoitettu, että neljäkkään lävistäjät ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. $\square$

42

Valonsäde heijastuu peilistä samassa kulmassa kuin missä se tulee peiliin. Piirretään mallikuva ja käytetään kuvan merkintöjä. Tulevan ja lähtevän säteen välinen kulma on γ .



Kolmion KBC kulmien summasta saadaan yhteys kulmien α ja β välille.

$$\alpha + \beta + 130^\circ = 180^\circ \quad | -130^\circ$$

$$\alpha + \beta = 50^\circ \quad | -\beta$$

$$\alpha = 50^\circ - \beta$$

Muodostetaan yhtälö kolmion ABC kulmien summan perusteella ja ratkaistaan säteiden välinen kulma γ .

$$\gamma + 2\alpha + 2\beta = 180^\circ \quad | \alpha = 50^\circ - \beta$$

$$\gamma + 2(50^\circ - \beta) + 2\beta = 180^\circ$$

$$\gamma + 100^\circ - 2\beta + 2\beta = 180^\circ$$

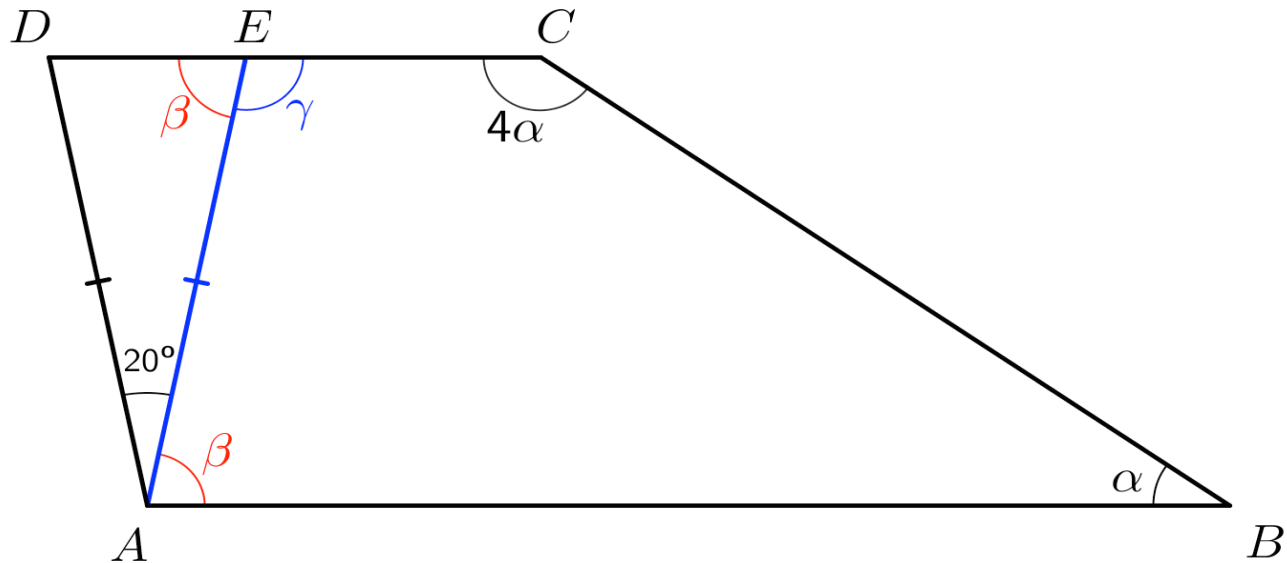
$$\gamma + 100^\circ = 180^\circ \quad | -100^\circ$$

$$\gamma = 80^\circ$$

Vastaus 80°

43

Käytetään kuvan merkintöjä.



Koska $ABCD$ on puolisuunnikas, niin $AB \parallel DC$. Täten samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuret eli $\sphericalangle BAE = \sphericalangle AED = \beta$.

Ratkaistaan kulman β suuruus tasakylkisestä kolmiosta AED . Huippukulma on 20° , joten kantakulman AED suuruus on

$$\beta = \frac{180^\circ - 20^\circ}{2} = 80^\circ.$$

Täten vieruskulman γ suuruus on

$$\gamma = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ.$$

Nelikulmion kulmien summa on 360° . Muodostetaan nelikulmion $ABCD$ kulmien summasta yhtälö ja ratkaistaan kulman α suuruus.

$$\alpha + 4\alpha + \beta + \gamma = 360^\circ \quad \left| \beta = 80^\circ, \gamma = 100^\circ \right.$$

$$5\alpha + 80^\circ + 100^\circ = 360^\circ \quad \left| -180^\circ \right.$$

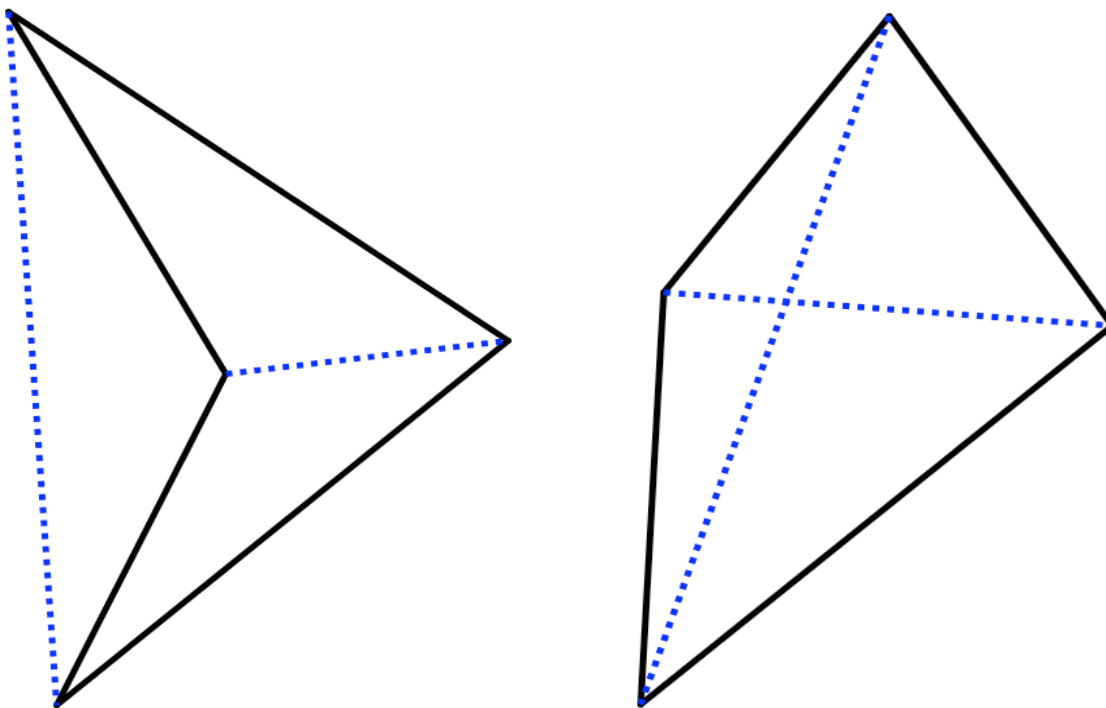
$$5\alpha = 180^\circ \quad \left| :5 \right.$$

$$\alpha = 36^\circ$$

Vastaus $\alpha = 36^\circ$

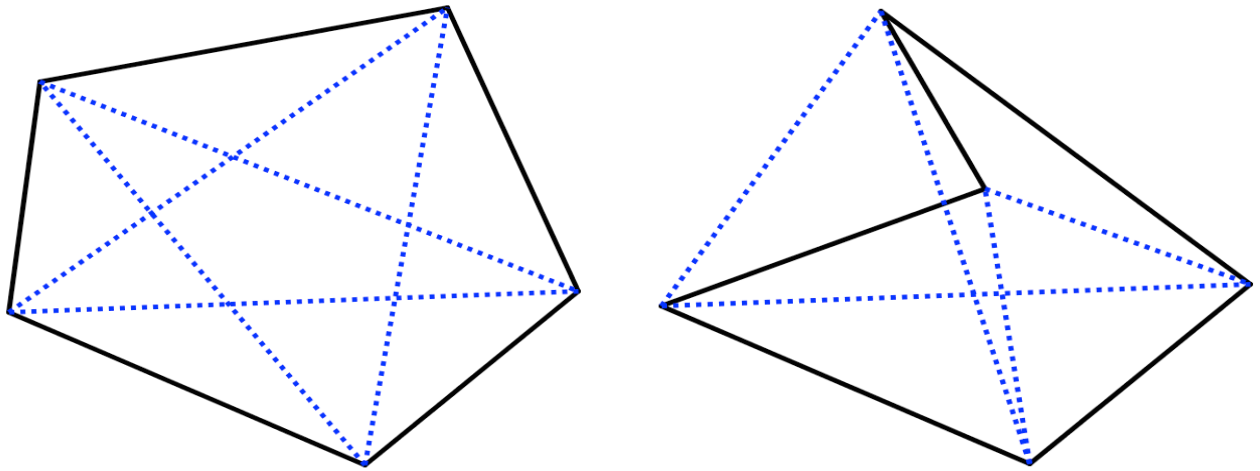
44

a) Piirretään erilaisia nelikulmioita ja niihin lävistäjät.



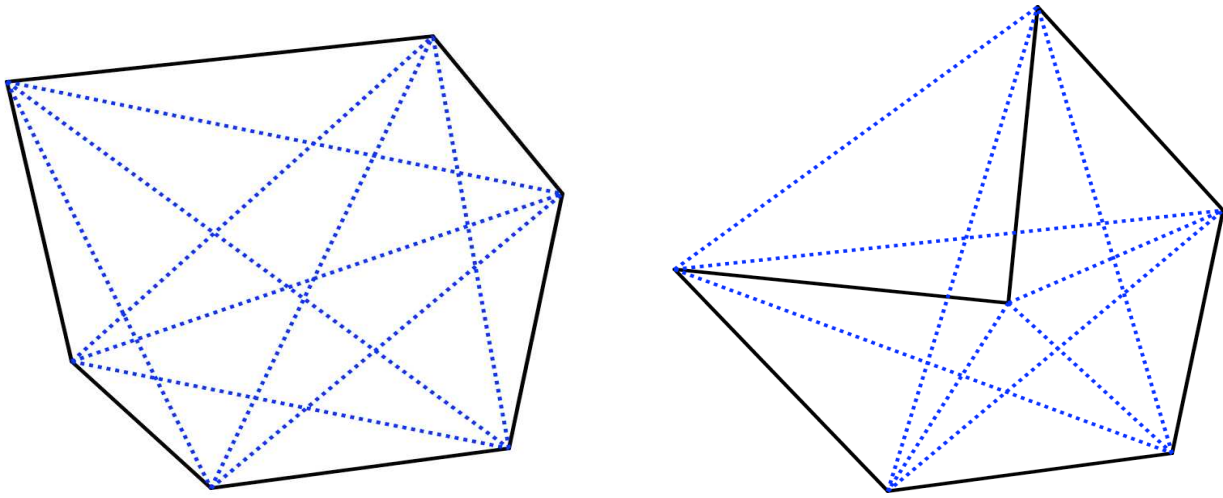
Kuvien perusteella nelikulmiossa on kaksi lävistäjää.

b) Piirretään erilaisia viisikulmioita ja niihin lävistäjät.



Kuvien perusteella viisikulmiossa on viisi lävistäjää.

c) Piirretään erilaisia kuusikulmioita ja niihin lävistäjät.



Kuvien perusteella kuusikulmiossa on yhdeksän lävistäjää

Yleisesti n -kulmiossa jokaisesta kärjestä voidaan piirtää lävistäjä kaikkiin muihin kärkiin paitsi kyseiseen kärkeen sekä sen viereisiin kärkiin. Jokaisesta kärjestä voidaan siis piirtää lävistäjä $n - 3$ kärkeen. Tällöin n -kulmiossa olisi $n \cdot (n - 3)$ lävistäjää.

Pitää kuitenkin huomioda, että piirrettäessä lävistäjä voidaan sen alkupisteeksi ajatella kumpi tahansa kärjistä, jotka lävistäjä yhdistää. Kahta kärkeä yhdistää kuitenkin aina vain yksi lävistäjä. Niinpä

lävistäjien määrä n -kulmiossa on $\frac{n \cdot (n - 3)}{2}$.

Siis

nelikulmiossa on $\frac{4 \cdot (4 - 3)}{2} = 2$ lävistäjää,

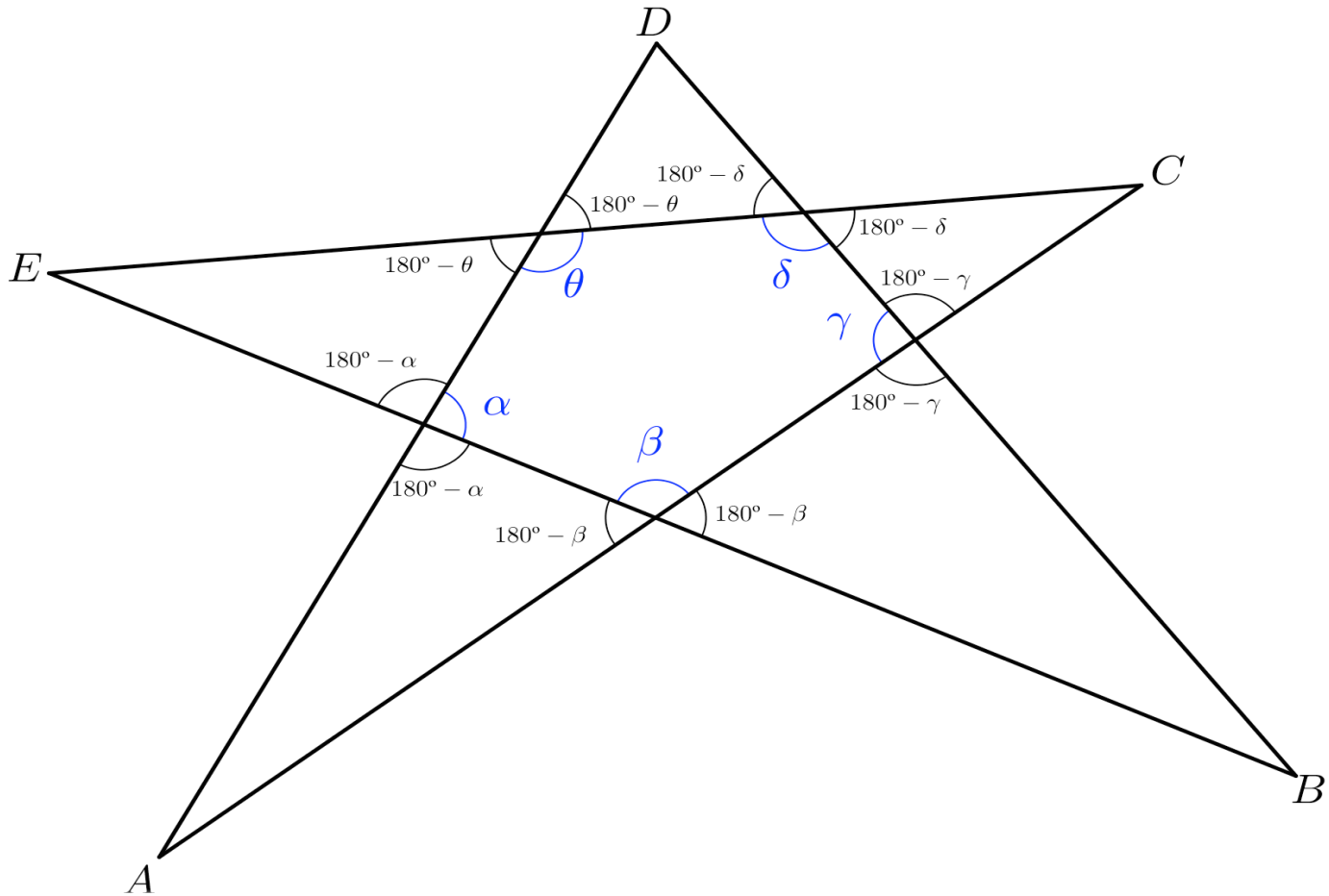
viisikulmiossa on $\frac{5 \cdot (5 - 3)}{2} = 5$ lävistäjää ja

kuusikulmiossa on $\frac{6 \cdot (6 - 3)}{2} = 9$ lävistäjää.

Vastaus a) 2 b) 5 c) 9
 n -kulmiossa lävistäjiä on $\frac{n \cdot (n - 3)}{2}$

45

Merkitään kuvan keskelle muodostuvan viisikulmion kulmia kirjaimilla α , β , γ , δ ja θ .



Sakaroihin muodostuvista kolmioista saadaan:

$$\sphericalangle A + 180^\circ - \alpha + 180^\circ - \beta = 180^\circ$$

$$\sphericalangle A = \alpha + \beta - 180^\circ$$

$$\sphericalangle B + 180^\circ - \beta + 180^\circ - \gamma = 180^\circ$$

$$\sphericalangle B = \beta + \gamma - 180^\circ$$

$$\sphericalangle C + 180^\circ - \gamma + 180^\circ - \delta = 180^\circ$$

$$\sphericalangle C = \gamma + \delta - 180^\circ$$

$$\sphericalangle D + 180^\circ - \delta + 180^\circ - \theta = 180^\circ$$

$$\sphericalangle D = \delta + \theta - 180^\circ$$

$$\sphericalangle E + 180^\circ - \theta + 180^\circ - \alpha = 180^\circ$$

$$\sphericalangle E = \theta + \alpha - 180^\circ.$$

Viisikulmion kulmien summa on $(5-2) \cdot 180^\circ = 3 \cdot 180^\circ$.

Lasketaan kulmien A , B , C , D ja E summa.

$$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C + \sphericalangle D + \sphericalangle E$$

$$= \alpha + \beta - 180^\circ + \beta + \gamma - 180^\circ + \gamma + \delta - 180^\circ + \delta + \theta - 180^\circ + \theta + \alpha - 180^\circ$$

$$= 2(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \theta) - 5 \cdot 180^\circ$$

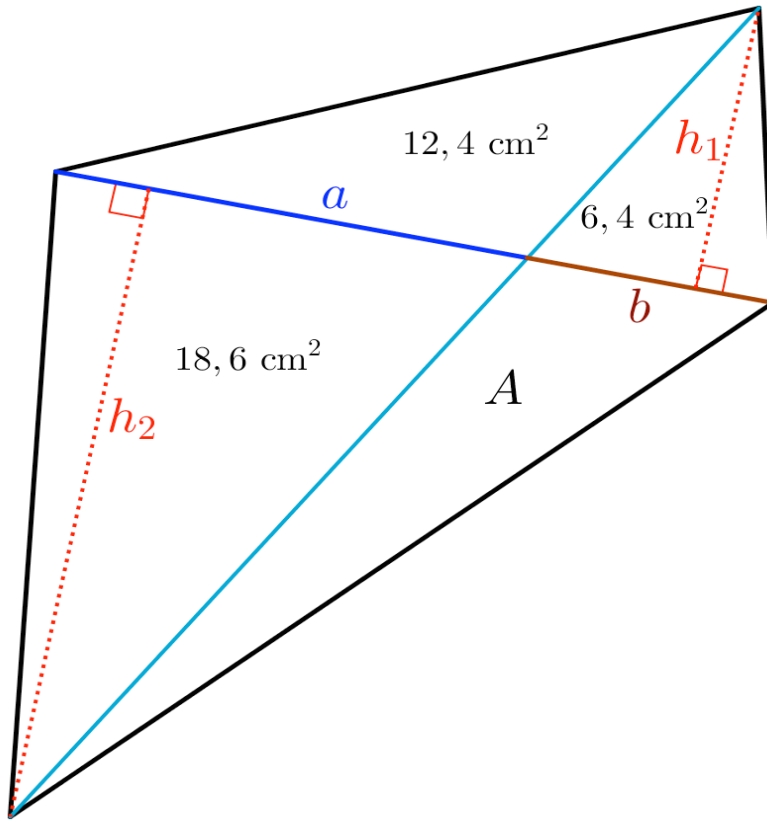
$$= 2 \cdot (3 \cdot 180^\circ) - 5 \cdot 180^\circ$$

$$= 6 \cdot 180^\circ - 5 \cdot 180^\circ = 180^\circ$$

On siis osoitettu, että kulmien A , B , C , D ja E summa on 180° eli oikokulma. $\square$

46

Piirretään mallikuva. Käytetään kuvan merkintöjä.



Kahden ylimmän kolmion korkeus on h_1 . Muodostetaan pinta-aloista yhtälöt.

$$\frac{1}{2}ah_1 = 12,4 \quad \text{ja} \quad \frac{1}{2}bh_1 = 6,4$$

Jaetaan yhtälöt puolittain.

$$\frac{\frac{1}{2}a\cancel{h_1}}{\frac{1}{2}b\cancel{h_1}} = \frac{12,4}{6,4}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{12,4}{6,4}$$

Kahden alimman kolmion korkeus on h_2 . Muodostetaan pinta-aloista yhtälöt.

$$\frac{1}{2}ah_2 = 18,6 \quad \text{ja} \quad \frac{1}{2}bh_2 = A$$

Jaetaan yhtälöt puolittain.

$$\frac{\cancel{\frac{1}{2}}a\cancel{h_2}}{\cancel{\frac{1}{2}}b\cancel{h_2}} = \frac{18,6}{A}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{18,6}{A}$$

Saadaan siis, että $\frac{a}{b} = \frac{12,4}{6,4}$ ja $\frac{a}{b} = \frac{18,6}{A}$ eli $\frac{12,4}{6,4} = \frac{18,6}{A}$.

Ratkaistaan yhtälöstä pinta-ala A .

$$\frac{12,4}{6,4} = \frac{18,6}{A}$$

$$A = 9,6 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Vastaus $A = 9,6 \text{ cm}^2$

47

Kartta on yhdenmuotoinen kuva maastosta, jolloin kartan pituudet ja maaston pituudet ovat suoraan verrannollisia keskenään. Merkitään reitin pituutta kartalla kirjaimella x .

Muutetaan reitin todellinen pituus metreiksi, jotta yksiköt supistuvat laskussa järkevästi:

$$12,5 \text{ km} = 12\,500 \text{ m}$$

Muodostetaan vastinpituuksien välinen verrantoyhtälö ja ratkaistaan x .

$$\frac{x}{12500} = \frac{2,0}{600}$$

$$600x = 25000 \quad | : 600$$

$$x = 41,666\dots$$

$$x \approx 42(\text{cm})$$

Vastaus Reitin pituus kartalla on 42 cm.

48

a) Pienoismallin mittakaava k on pienoismallin ja oikean kirjaston vastinpituuksien suhde.

$$k = \frac{125 \text{ cm}}{85 \text{ m}} = \frac{125 \text{ cm}}{8500 \text{ cm}} = \frac{1}{68} = 1 : 68$$

Mittakaava on 1 : 68.

b) Koska pienoismallin mittakaava on 1 : 68, ovat pienoismallin pituudet suuruudeltaan $\frac{1}{68}$ todellisista pituuksista. Näin ollen pienoismallin korkeus on

$$\frac{1}{68} \cdot 15 \text{ m} = 0,22058 \dots \text{ m} \approx 22 \text{ cm}.$$

Pienoismallin korkeus on 22 cm.

Vastaus a) Mittakaava on 1 : 68.

b) Pienoismallin korkeus on 22 cm.

49

Kartan mittakaava on kartalta mitatun pituuden ja vastaavan todellisen pituuden suhde.

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan x .

$$\frac{x}{12,5} = \frac{1}{20000} \quad \text{Kerrotaan ristiin.}$$

$$20\,000x = 12,5 \quad | : 20\,000$$

$$x = 0,000\,625 \text{ (km)}$$

Pituus kartalla on $x = 0,000\,625 \text{ km} = 0,625 \text{ m} = 62,5 \text{ cm}$.

Lasketaan mittakaava y .

$$y = \frac{76 \text{ cm}}{190 \text{ km}} = \frac{76 \text{ cm}}{19\,000\,000 \text{ cm}} \stackrel{(76 \text{ cm})}{=} \frac{1}{250\,000} = 1 : 250\,000$$

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan z .

$$\frac{3,5}{z} = \frac{1}{10000} \quad \text{Kerrotaan ristiin.}$$

$$z = 35\,000 \text{ (cm)}$$

Todellinen pituus on $z = 35\,000 \text{ cm} = 350 \text{ m}$.

Vastaus $x = 62,5 \text{ cm}$, $y = 1 : 250\,000$, $z = 350 \text{ m}$

50

Merkitään lammen ympärysmittaa kirjaimella x ja ratkaistaan se verrantoyhtälöstä.

$$\frac{3,9}{x} = \frac{1}{15000}$$
$$x = 58\,500 \text{ (cm)}$$

Kerrotaan ristiin.

Lammen ympärysmitta on $58\,500 \text{ cm} = 585 \text{ m} \approx 590 \text{ m}$.

Keskivauhti v on kuljetun matkan ja matkaan käytetyn ajan osamäärä. Matka-aika on nyt $5,0 \text{ min} = 300 \text{ s}$. Lasketaan keskivauhti.

$$v = \frac{585 \text{ m}}{300 \text{ s}} = 1,95 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 2,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Koska $1 \text{ m/s} = 3,6 \text{ km/h}$, saadaan keskivauhdille myös arvo

$$v = 1,95 \cdot 3,6 \text{ km/h} = 7,02 \text{ km/h} \approx 7,0 \text{ km/h}.$$

Vastaus Lammen ympärysmitta on 590 m , keskivauhti on $2,0 \text{ m/s}$ (tai $7,0 \text{ km/h}$)

51

a) Merkitään matkaa kirjaimella x ja ratkaistaan se verrantoyhtälöstä.

$$\frac{1,5}{x} = \frac{1}{50000}$$

Kerrotaan ristiin.

$$x = 75\,000 \text{ (cm)}$$

Matka on $75\,000 \text{ cm} = 750 \text{ m}$, eli **vaihtoehto 2**).

b) Merkitään pellon sivun pituutta kartalla kirjaimella x ja ratkaistaan se verrantoyhtälöstä.

$$\frac{x}{250} = \frac{1}{50000}$$

Kerrotaan ristiin.

$$50\,000x = 250$$

$$| : 50\,000$$

$$x = 0,005 \text{ (m)}$$

Pellon sivun pituus kartalla on $0,005 \text{ m} = 5 \text{ mm}$, eli **vaihtoehto 2**).

c) Merkitään puun paksuutta kirjaimella x ja ratkaistaan se verrantoyhtälöstä.

$$\frac{0,5}{x} = \frac{1}{50000}$$

Kerrotaan ristiin.

$$x = 25\,000 \text{ (mm)}$$

Puun paksuus on $25\,000 \text{ mm} = 25 \text{ m}$, eli **vaihtoehto 3**).

d) Merkitään viivan leveyttä kirjaimella x ja ratkaistaan se verrantoyhtälöstä.

$$\frac{x}{10} = \frac{1}{50000}$$

Kerrotaan ristiin.

$$50\,000x = 10$$

$$| : 50\,000$$

$$x = 0,0002 \text{ (m)}$$

Viivan leveys on $0,0002 \text{ m} = 0,2 \text{ mm}$, eli **vaihtoehto 3**).

Vastaus a) 2 b) 2 c) 3 d) 3

52

Merkitään laivan pituutta kirjaimella x , muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan pituus.

$$\frac{48}{x} = \frac{3}{200}$$

$$3x = 9600$$

$$x = 3200 \text{ (cm)}$$

Kerrotaan ristiin.

$$| : 3$$

Laivan pituus on $3200 \text{ cm} = 32 \text{ m}$.

Vastaus Laivan pituus on 32 m.

53

a) Vastinpituudet ovat x ja 6 sekä 5 ja 3. Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan x .

$$\frac{x}{6} = \frac{5}{3} \quad \text{Kerrotaan ristiin.}$$
$$3x = 30 \quad | : 3$$
$$x = 10$$

b) Vastinpituudet ovat y ja 16 sekä 3 ja 5. Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan y .

$$\frac{y}{16} = \frac{3}{5} \quad \text{Kerrotaan ristiin.}$$
$$5y = 48 \quad | : 5$$
$$y = \frac{48}{5} = 9\frac{3}{5} = 9,6$$

c) Mittakaava k on vastinpituuksien suhde. Nyt $k = 5 : 3$ (tai $3 : 5$).

Vastaus a) $x = 10$ b) $y = 9,6$ c) $5 : 3$ (tai $3 : 5$)

54

a) Kolmiot CAB ja CDE ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen perusteella.

- Kulma C on yhteinen.
- Kulmat CDE ja CAB ovat samankohtaisina yhtä suuret, koska $AB \parallel DE$.

Vastinjanat ovat DE ja AB sekä CD ja CA . Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan x .

$$\begin{array}{lcl} \frac{x}{15} = \frac{12}{20} & \text{Kerrotaan ristiin.} & \\ 20x = 180 & | : 20 & \\ x = 9 & & \end{array}$$

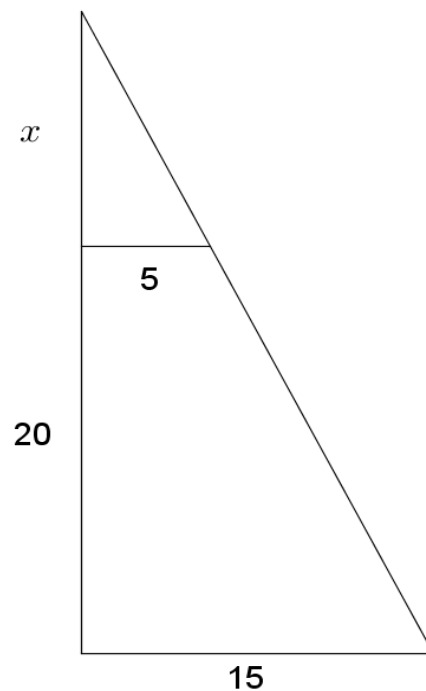
b) Kolmiot CAB ja CDE ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen perusteella.

- Kulma C on yhteinen.
- Kulmat CDE ja CAB ovat samankohtaisina yhtä suuret, koska $AB \parallel DE$.

Vastinjanat ovat CE ja CB sekä DE ja AB . Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan x .

$$\begin{array}{lcl} \frac{10}{10+x} = \frac{5}{8} & \text{Kerrotaan ristiin.} & \\ 5(10+x) = 80 & & \\ 50 + 5x = 80 & & \\ 5x = 30 & | : 5 & \\ x = 6 & & \end{array}$$

Vastaus a) $x = 9$ b) $x = 6$



Merkitään joen leveyttä kirjaimella x . Kuvion kaksi sisäkkäistä suorakulmaista kolmiota ovat yhdenmuotoisia kk-lauseen perusteella, sillä molemmissa on suora kulma ja huippukulma on yhteinen. Vastinpituudet ovat x ja $x + 20$ sekä 5 ja 15. Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan x .

$$\frac{x}{x + 20} = \frac{5}{15}$$

$$15x = 5(x + 20)$$

$$15x = 5x + 100$$

$$10x = 100$$

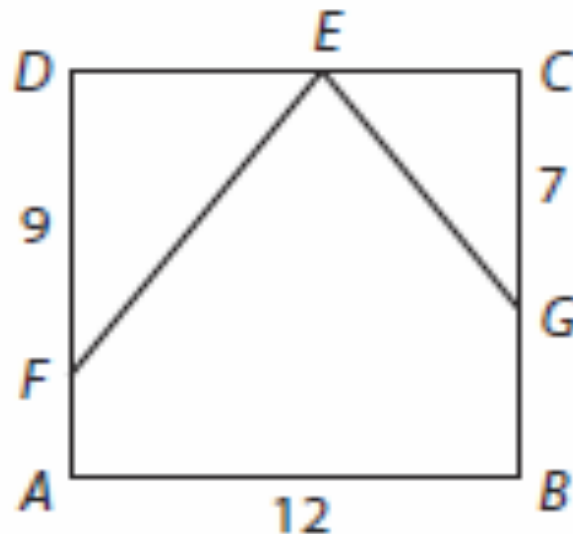
$$x = 10 \text{ (m)}$$

Kerrotaan ristiin.

$$| : 10$$

Joen leveys on 10 m.

Vastaus Joen leveys on 10 m.



Kolmiot DFE ja CGE ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen nojalla.

- Kulmat C ja D ovat suoria.
- Kulmat DEF ja CEG ovat yhtä suuret.

Kun merkitään $x = |EC|$, niin $|DE| = 12 - x$. Vastinsivut ovat EC ja ED sekä CG ja DF . Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan x .

$$\frac{x}{12-x} = \frac{7}{9}$$

$$9x = 7(12 - x)$$

$$9x = 84 - 7x$$

$$16x = 84$$

$$x = \frac{84}{16} = \frac{21}{4} = 5\frac{1}{4}$$

Kerrotaan ristiin.

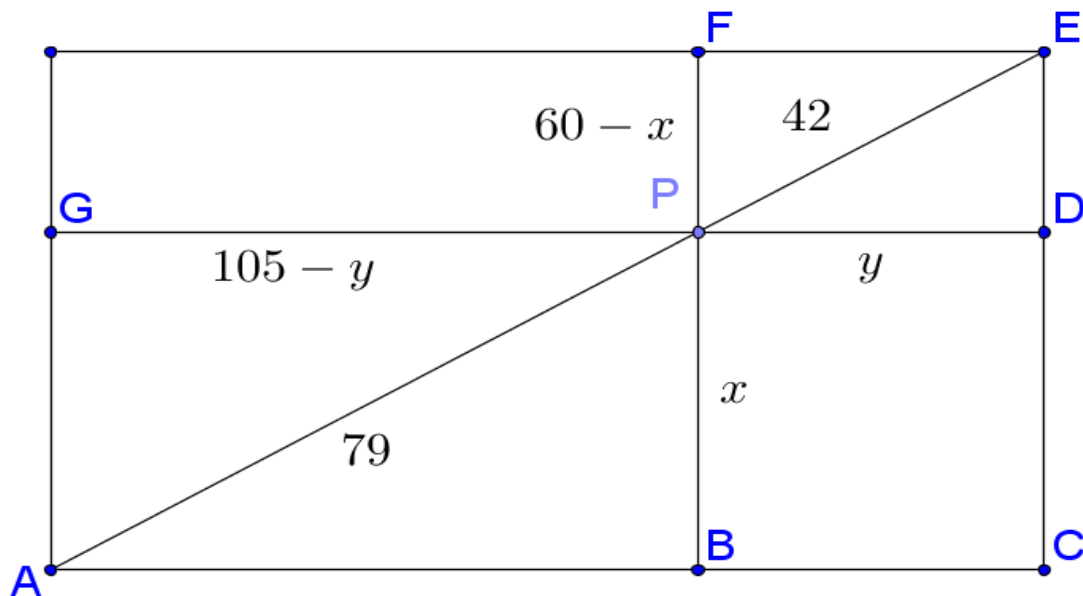
$$| : 16$$

Janan EC pituus on $5\frac{1}{4}$.

Vastaus $|EC| = 5\frac{1}{4}$

57

Käytetään oheisen kuvion merkintöjä.



a) Kolmiot ABP ja EFP ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen nojalla.

- Molemmissa on suora kulma.
- Kulmat FPE ja BPA ovat ristikulmina yhtä suuret.

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan kysytty pituus x .

Vastinjanat ovat PB ja PF sekä PA ja PE .

$$\frac{x}{60 - x} = \frac{79}{42}$$

Kerrotaan ristiin.

$$42x = 79(60 - x)$$

$$42x = 4740 - 79x$$

$$121x = 4740$$

$$| : 121$$

$$x = 39,173\dots$$

$$x \approx 39 \text{ (m)}$$

Etäisyys alemmasta sivurajasta on noin 39 m.

b) Kolmiot PDE ja PGA ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen nojalla.

- Molemmissa on suora kulma.
- Kulmat DPE ja GPA ovat ristikulmina yhtä suuret.

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan kysytty pituus y .

Vastinjanat ovat PD ja PG sekä PE ja PA .

$$\frac{y}{105 - y} = \frac{42}{79} \quad \text{Kerrotaan ristiin.}$$

$$79y = 42(105 - y)$$

$$79y = 4410 - 42y$$

$$121y = 4410 \quad | : 121$$

$$y = 36,446\dots$$

$$y \approx 36 \text{ (m)}$$

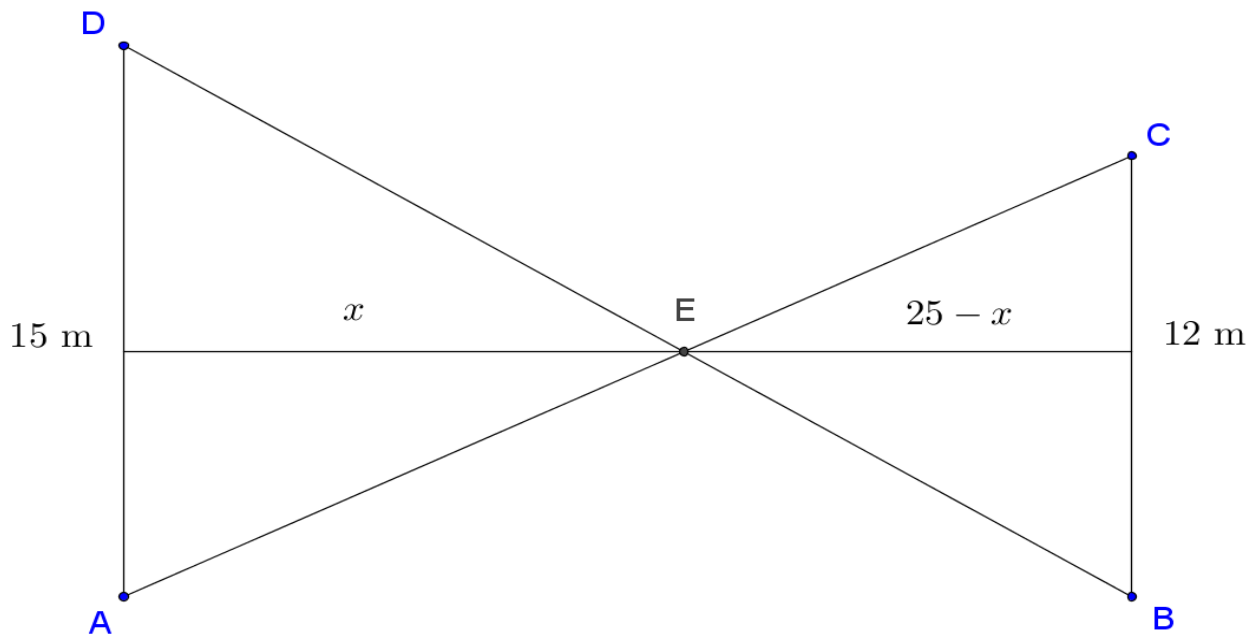
Etäisyys oikeasta päädyistä on noin 36 m.

Vastaus a) Etäisyys alemmasta sivurajasta on 39 m.

b) Etäisyys oikeasta päädyistä on 36 m.

58

Käytetään oheisen kuvion merkintöjä.



Kolmiot AED ja CEB ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen nojalla.

- Ristikulmat AED ja CEB ovat yhtä suuret.
- Kulmat EAD ja ECB ovat samankohtaisina yhtä suuret, koska $AD \parallel CB$.

Vastinpituudet ovat kolmioiden korkeudet x ja $25 - x$ sekä kannat $|AD|$ ja $|CB|$. Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan kysytty etäisyys x .

$$\frac{x}{25 - x} = \frac{15}{12}$$

Kerrotaan ristiin.

$$12x = 15(25 - x)$$

$$12x = 375 - 15x$$

$$27x = 375$$

$$| : 27$$

$$x = 13,888\dots$$

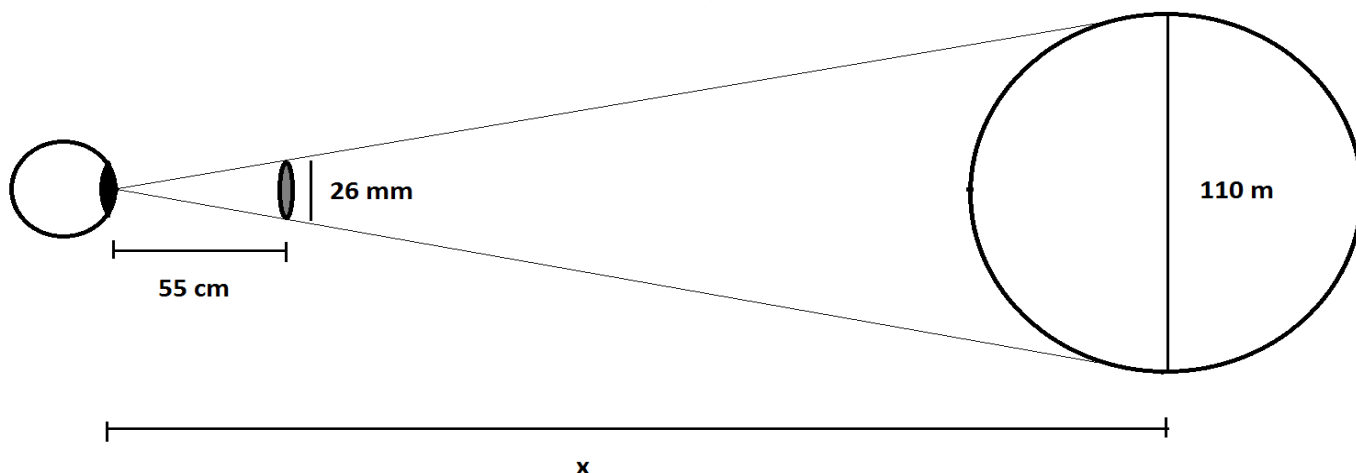
$$x \approx 14 \text{ (m)}$$

Etäisyys korkeampaan pylvääseen on noin 14 m .

Vastaus Etäisyys on 14 m .

59

Käytetään oheisen kuvion merkintöjä.

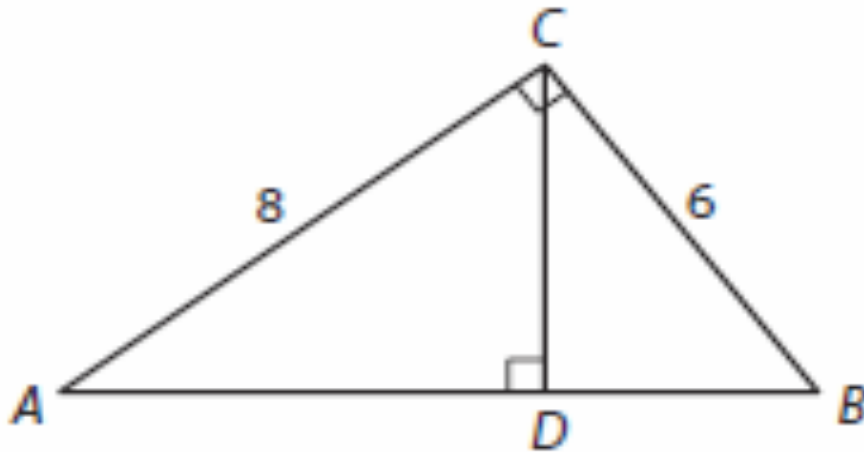


Kuvan sisäkkäiset kolmiot ovat kk-lauseen nojalla yhdenmuotoiset, sillä niillä on yhteinen huippukulma silmän kohdalla ja yhtä suuret, samankohtaiset kantakulmat. Vastinpituudet ovat $26 \text{ mm} = 0,026 \text{ m}$ ja 110 m sekä $55 \text{ cm} = 0,55 \text{ m}$ ja x . Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan kysytty etäisyys x .

$$\begin{array}{lcl} \frac{x}{0,55} = \frac{110}{0,026} & \text{Kerrotaan ristiin.} \\ 0,026x = 60,5 & | : 0,026 \\ x = 2326,923... & \\ x \approx 2300 \text{ (m)} & | : 27 \end{array}$$

Etäisyys Globen-hallista on noin $2300 \text{ m} = 2,3 \text{ km}$.

Vastaus Etäisyys on $2,3 \text{ km}$.



a) Yhdenmuotoiset kolmiot ovat kk-lauseen perusteella (vastinpisteet järjestyksessä) CAB , DAC ja DCB .

- Kaikissa kolmioissa on suora kulma.
- Kolmioissa CAB ja DAC on molemmissa sama kulma A , joten $\triangle CAB \sim \triangle DAC$.
Kolmioissa CAB ja DCB on molemmissa sama kulma B , joten $\triangle CAB \sim \triangle DCB$.
Lopulta myös $\triangle DAC \sim \triangle DCB$, koska molemmat ovat yhdenmuotoisia kolmion CAB kanssa.

b) Tutkitaan kolmioita CAB ja DCB . Merkitään $x = |CD|$, muodostetaan vastinpituuksille verrantoyhtälö ja ratkaistaan x .

$$\frac{|CD|}{|AC|} = \frac{|CB|}{|AB|}$$

$$\frac{x}{8} = \frac{6}{10}$$

$$10x = 48$$

$$x = 4,8$$

Janan CD pituus on 4,8.

Kerrotaan ristiin.

$$| : 10$$

c) Tutkitaan kolmioita DAC ja DCB . Merkitään $x = |DB|$, muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan x .

$$\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{|CD|}{|BD|}$$

$$\frac{8}{6} = \frac{4,8}{x}$$

$$8x = 28,8$$

$$x = 3,6$$

Tällöin $|AD| = 10 - 3,6 = 6,4$ ja jakosuhde on $|AD| : |DB| = 6,4 : 3,6 = 64 : 36 = 16 : 9$.

Kerrotaan ristiin.

$$| : 8$$

Vastaus a) - b) $|CD| = 4,8$

c) $|AD| : |DB| = 16 : 9$

61

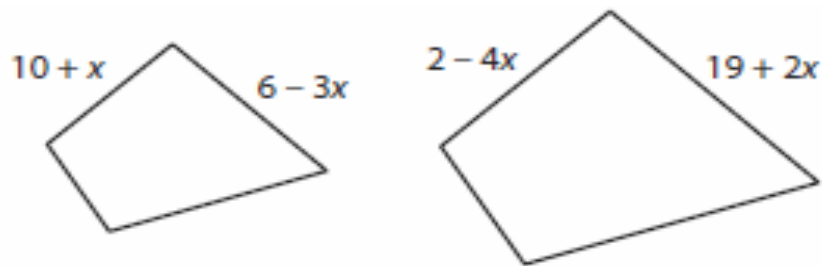
Merkitään jotakin vapaasti valittua pituutta alkuperäisessä kuvassa kirjaimella d . Ensimmäisessä suurennoksessa tämä pituus kasvaa arvoon $1,5d$. Toisessa suurennoksessa tämä arvo suurenee edelleen kertoimella $\frac{5}{3}$, eli lopullinen pituus on $\frac{5}{3} \cdot 1,5d = 2,5d$.

Mittakaavaksi k saadaan täten vastinpituuksien suhteena

$$k = \frac{2,5d}{d} = \overset{10)}{\frac{2,5}{1}} = \frac{25}{10} \overset{5)}{=} \frac{5}{2} = 5 : 2.$$

(Huomaa: Mittakaavan arvo on suoraan $1,5 \cdot 5/3 = 2,5 = 5/2$)

Vastaus Mittakaava on $5 : 2$.



Ratkaistaan ensin x verrantoyhtälöstä. Vastinpituudet ovat $10 + x$ ja $2 - 4x$ sekä $6 - 3x$ ja $19 + 2x$.

$$\frac{10 + x}{2 - 4x} = \frac{6 - 3x}{19 + 2x} \quad \text{Ratkaistaan yhtälö laskimella.}$$

$$x = -2 \quad \text{tai} \quad x = \frac{89}{10}$$

Koska jokainen neljästä lausekkeesta esittää monikulmion sivun pituutta, on niiden kaikkien arvojen oltava positiivisia.

Jos $x = \frac{89}{10}$, niin pituus $2 - 4x = 2 - 4 \cdot \frac{89}{10} = -\frac{168}{5} < 0$, joten $x = \frac{89}{10}$ ei ole tehtävän kannalta kelvollinen ratkaisu.

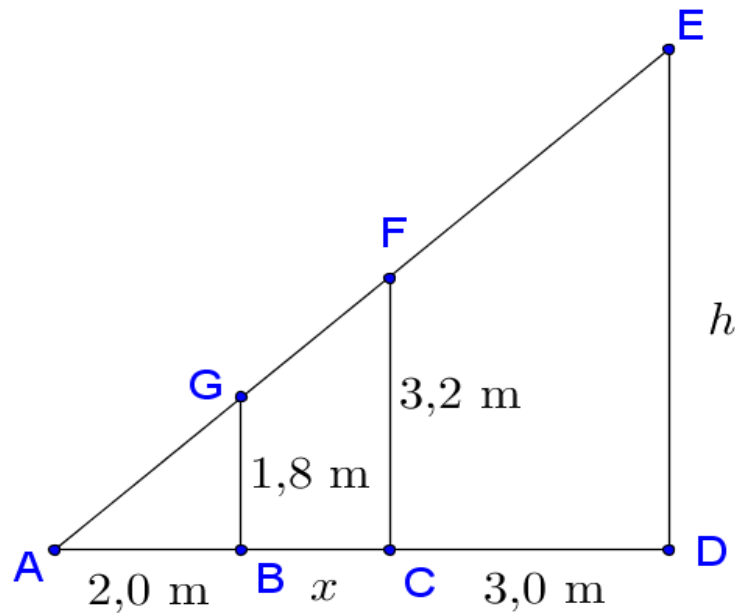
Kun $x = -2$, on jokaisen lausekkeen arvo positiivinen. Tällöin mittakaavaksi saadaan vastinpituuksien suhteena

$$k = \frac{2 - 4x}{10 + x} = \frac{2 - 4 \cdot (-2)}{10 + (-2)} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} = 5 : 4 \quad (\text{tai } k = 4 : 5).$$

Vastaus Mittakaava on $5 : 4$ (tai $4 : 5$).

63

Käytetään oheisen kuvan merkintöjä.



Kolmiot ABG , ACF ja ADE ovat kaikki yhdenmuotoisia keskenään kk -lauseen nojalla, sillä ne ovat suorakulmaisia ja niillä on yhteinen kulma A .

a) Tutkitaan kolmioita ABG ja ACF . Ratkaistaan kysytty etäisyys x vastinpituuksien 2 ja $2 + x$ sekä 1,8 ja 3,2 muodostamasta verrantoyhtälöstä.

$$\frac{2}{2+x} = \frac{1,8}{3,2}$$

Kerrotaan ristiin.

$$1,8(2+x) = 6,4$$

$$3,6 + 1,8x = 6,4$$

$$1,8x = 2,8$$

$$| : 1,8$$

$$x = 1,555\dots$$

$$x \approx 1,6 \text{ (m)}$$

Tytön etäisyys valaisinpylvääseen on noin 1,6 m.

b) Tutkitaan kolmioita ABG ja ADE . Kohdan a perusteella pituus $|AD| = 2,0 \text{ m} + 1,555\ldots \text{ m} + 3,0 \text{ m} = 6,555\ldots \text{ m}$. Ratkaistaan kysytty korkeus h vastinpituuksien 2 ja 6,555... sekä 1,8 ja h muodostamasta verrantoyhtälöstä.

$$\frac{1,8}{h} = \frac{2}{6,555\ldots} \quad \text{Kerrotaan ristiin.}$$

$$2h = 11,8 \quad | : 2$$

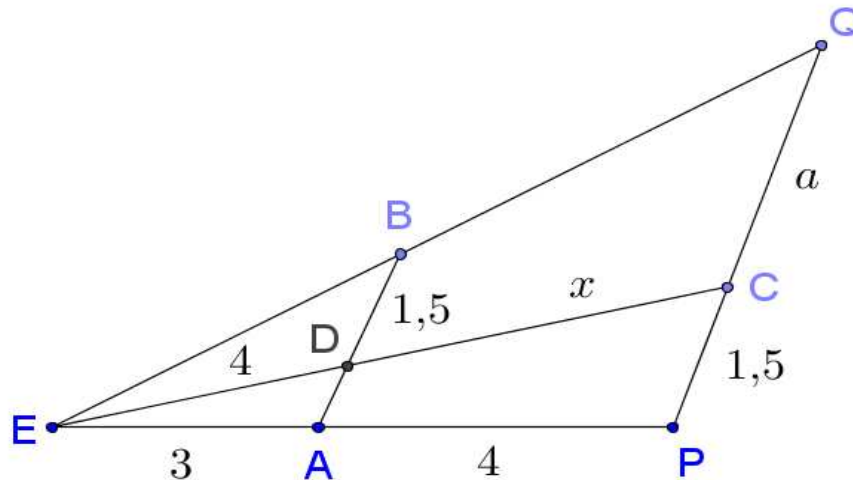
$$h = 5,9 \text{ (m)}$$

Valaisinpylvään korkeus on 5,9 m.

Vastaus a) Etäisyys on 1,6 m. b) Korkeus on 5,9 m.

64

Käytetään oheisen kuvan merkintöjä.



Ratkaistaan ensin pituus x . Kolmiot EAD ja EPC ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen perusteella.

- Kulma DEA on yhteinen.
- Kulmat EAD ja EPC ovat samankohtaisina yhtä suuret, koska janat AB ja PQ ovat yhdensuuntaiset.

Muodostetaan verrantoyhtälö, josta x ratkeaa.

$$\frac{3}{3+4} = \frac{4}{4+x}$$

$$\frac{3}{7} = \frac{4}{4+x}$$

$$3(4+x) = 28$$

$$12 + 3x = 28$$

$$3x = 16$$

$$x = \frac{16}{3}$$

Kerrotaan ristiin.

Kolmiot EDB ja ECQ ovat myös yhdenmuotoiset kk-lauseen nojalla.

- Kulma BED on yhteinen.
- Kulmat EDB ja ECQ ovat samankohtaisina yhtä suuret, koska $AB \parallel PQ$.

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan a .

$$\frac{4}{4+x} = \frac{1,5}{a}$$
$$\frac{4}{4+\frac{16}{3}} = \frac{1,5}{a}$$

$$\frac{3}{7} = \frac{1,5}{a}$$

$$3a = 10,5$$

$$a = 3,5$$

Sijoitetaan $x = \frac{16}{3}$.

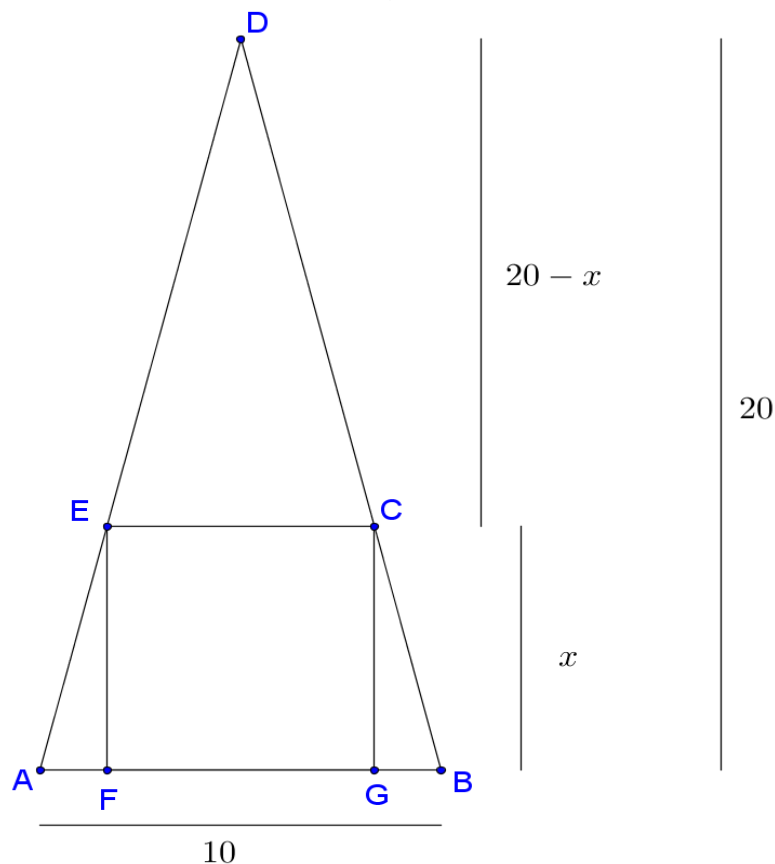
Kerrotaan ristiin.

$$| : 3$$

Vastaus Pituus $a = 3,5$.

65

Käytetään oheisen kuvan merkintöjä.



Kolmiot ABD ja ECD ovat kk-lauseen perusteella yhdenmuotoiset.

- Niillä on yhteinen huippukulma D .
- Kulmat DAB ja DEC ovat samankohtaisina yhtä suuret, koska $AB \parallel EC$.

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan neliön sivun pituus x .

$$\frac{20}{20-x} = \frac{10}{x}$$

$$20x = 10(20-x)$$

$$20x = 200 - 10x$$

$$30x = 200$$

$$x = \frac{20}{3}$$

Korkeuksien suhde =
Kantojen suhde

$$| : 30$$

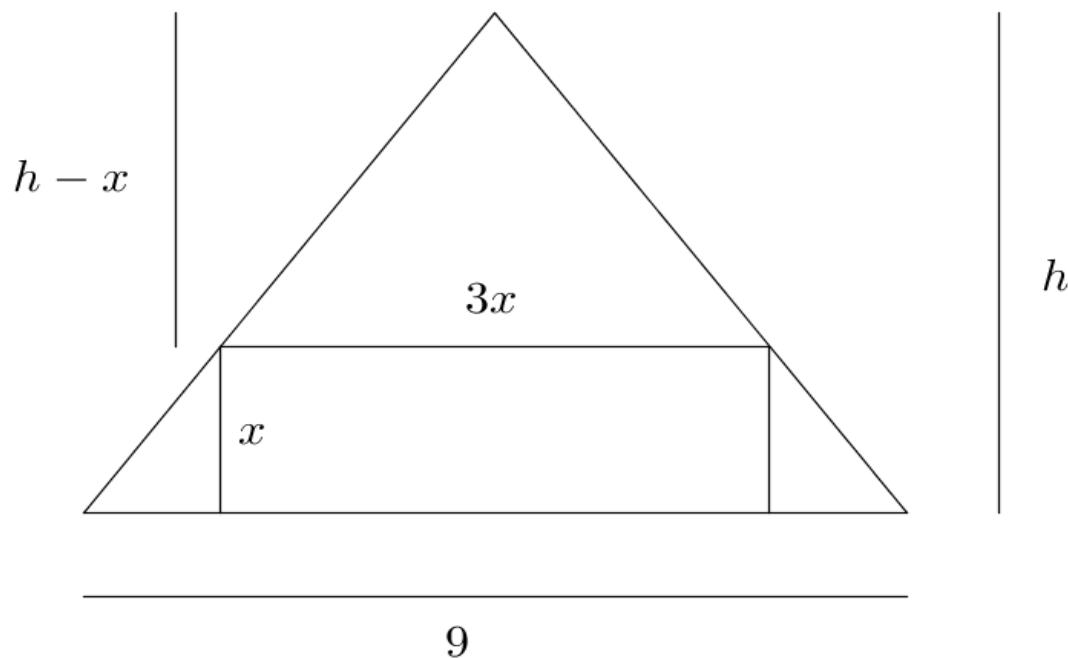
Kun neliön sivun pituus on $\frac{20}{3}$, sen pinta-ala on

$$A = \left(\frac{20}{3}\right)^2 = \frac{400}{9} = 44\frac{4}{9}.$$

Vastaus Pinta-ala on $44\frac{4}{9}$.

66

Käytetään oheisen kuvan merkintöjä.



Kuvan sisäkkäiset, tasakylkiset kolmiot ovat yhdenmuotoisia kklauseen nojalla, sillä niillä on yhteinen huippukulma ja vaakasuorien kantojen vuoksi yhtä suuret, samankohtaiset kantakulmat.

Ratkaistaan ensin pinta-alatiedon avulla korkeus h .

$$A = 27$$

Kolmion pinta-ala $A = \frac{1}{2}ah$.

$$\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot h = 27$$

$$|: \left(\frac{1}{2} \cdot 9 \right)$$

$$h = 6$$

Ratkaistaan sitten yhdenmuotoisista kolmioista pituus x .

Korkeuksien suhde = Kantojen suhde

$$\frac{h-x}{h} = \frac{3x}{9}$$

Sijoitetaan $h = 6$.

$$\frac{6-x}{6} = \frac{3x}{9}$$

Kerrotaan ristiin.

$$18x = 9(6-x)$$

$$18x = 54 - 9x$$

$$27x = 54$$

| : 27

$$x = 2$$

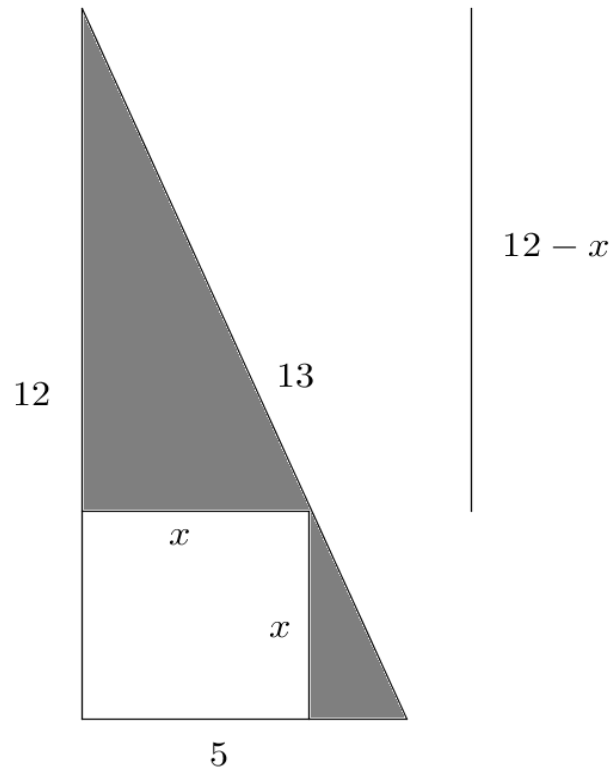
Suorakaiteen korkeus on siis 2 ja korkeus on siten $3 \cdot 2 = 6$.

Suorakaiteen pinta-alaksi saadaan $A = 2 \cdot 6 = 12$.

Vastaus Pinta-ala on 12.

67

Käytetään oheisen kuvan merkintöjä.



Tummennetun alueen pinta-ala saadaan, kun koko kolmion pinta-alasta vähennetään neliön pinta-ala. Kuvan kaikki sisäkkäiset suorakulmaiset kolmiot ovat keskenään yhdenmuotoisia kk-lauseen nojalla, sillä niillä on suoran kulman lisäksi yhteinen tai samankohtaisuuden vuoksi yhtä suuri huippukulma. Muodostetaan verrantoyhtälö koko kolmion ja huippuun jäävän kolmion vastinpituuksille.

$$\begin{aligned}\frac{12}{12-x} &= \frac{5}{x} \\ 12x &= 5(12-x) \\ 12x &= 60 - 5x \\ 17x &= 60 \\ x &= \frac{60}{17}\end{aligned}$$

Korkeuksien suhde =
Kantojen suhde

$$| : 17$$

Koko kolmion pinta-ala on $A_k = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30$ ja neliön pinta-ala on

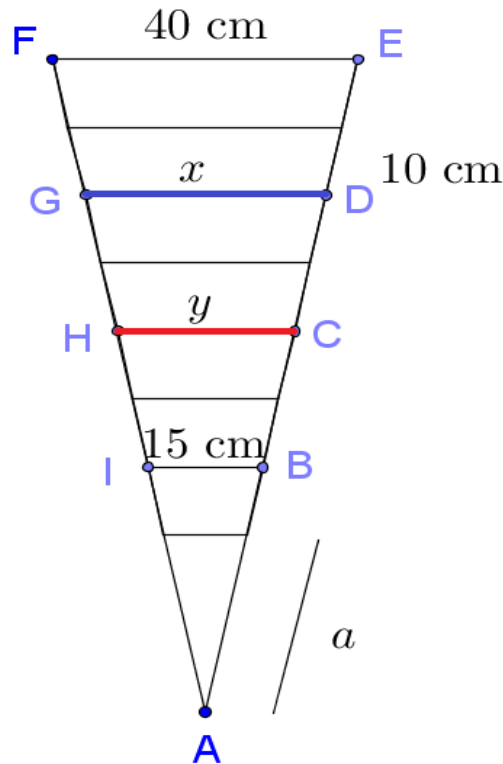
$A_n = \left(\frac{60}{17}\right)^2 = \frac{3600}{289}$. Tummennetun alueen pinta-alaksi saadaan
lopulta

$$A = A_k - A_n = 30 - \frac{3600}{289} = \frac{5070}{289} = 17 \frac{157}{289} \approx 17,5.$$

Vastaus Pinta-ala on 17,5.

68

Täydennetään kehikko kolmioksi ja käytetään oheisen kuvan merkintöjä.



Kaikki kuvion sisäkkäiset kolmiot ovat keskenään yhdenmuotoisia kk -lauseen nojalla, sillä niillä on yhteinen huippukulma A ja samankohtaiset, yhtä suuret kantakulmat (kaikki rimat ovat vaakasuoria).

Ratkaistaan ensin pituus a kolmioiden ABI ja AEF perusteella muodostuvasta verrantoyhtälöstä.

$$\frac{15}{40} = \frac{a+10}{a+70}$$

Kerrotaan ristiin.

$$40(a+10) = 15(a+70)$$

$$40a + 400 = 15a + 1050$$

$$25a = 650$$

$$a = 26 \text{ (cm)}$$

$$| : 25$$

Muodostetaan sitten verrantoyhtälö kolmioista ADG ja AEF ja ratkaistaan x .

$$\frac{x}{40} = \frac{26+50}{26+70}$$

Kerrotaan ristiin.

$$96x = 3040$$

| : 96

$$x = 31,666\dots$$

$$x \approx 32 \text{ (cm)}$$

Pituus x on noin 32 cm.

Muodostetaan lopuksi verrantoyhtälö kolmioista ACH ja AEF ja ratkaistaan y .

$$\frac{y}{40} = \frac{56}{96}$$

Kerrotaan ristiin.

$$96y = 2240$$

| : 96

$$y = 23,333\dots$$

$$y \approx 23 \text{ (cm)}$$

Pituus y on noin 23 cm.

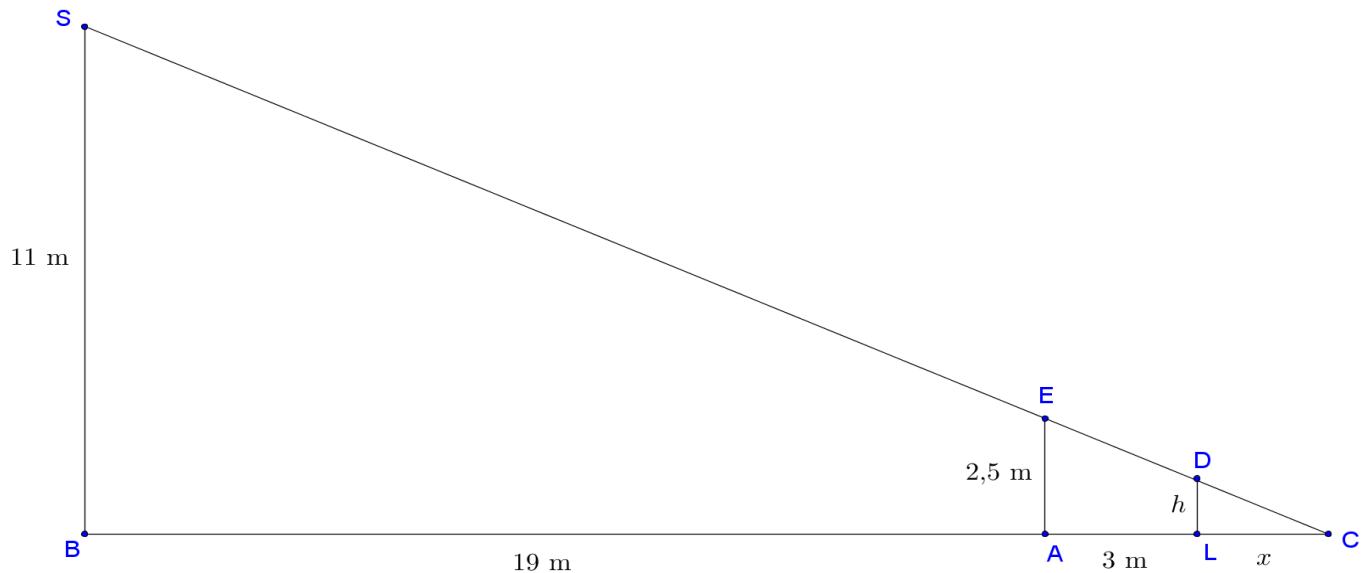
(Huom. Pituudet voi ratkaista myös suoraan yhtälöryhmästä

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{15}{40} = \frac{a+10}{a+70} \\ \frac{x}{40} = \frac{a+50}{a+70} \\ \frac{y}{40} = \frac{a+30}{a+70} \end{array} \right\}$$

Vastaus $x = 32 \text{ cm}$ ja $y = 23 \text{ cm}$.

69

Käytetään oheisen kuvan merkintöjä.



Kuvan sisäkkäiset kolmiot BCS , ACE ja LCD ovat yhdenmuotoisia kk -lauseen nojalla, sillä ne ovat kaikki suorakulmaisia ja niillä on yhteinen terävä kulma C .

Selvitetään, millä korkeudella ”näkölinja” SC kulkee 3 metrin päässä aidan takana, eli määritetään korkeus h . Ratkaistaan ensin pituus x kolmioihin BCS ja ACE liittyvästä verrantoyhtälöstä.

Kerrotaan ristiin.

$$\frac{19 + 3 + x}{3 + x} = \frac{11}{2,5}$$

$$11(3 + x) = 2,5(22 + x)$$

$$33 + 11x = 55 + 2,5x$$

$$8,5x = 22$$

$$x = 2,5882... \text{ (m)}$$

$$| : 8,5$$

Muodostetaan sitten verrantoyhtälö kolmioista ACE ja LCD ja ratkaistaan korkeus h .

Kerrotaan ristiin.

$$\frac{3+x}{x} = \frac{2,5}{h}$$

$$h(3+x) = 2,5x$$

$$h = \frac{2,5x}{3+x}$$

$$h = \frac{2,5 \cdot 2,5882...}{3 + 2,5882...}$$

$$h = \frac{6,4705...}{5,5882...}$$

$$h = 1,1578... \text{ (m)}$$

$$| : (3+x)$$

Sijoitetaan $x = 2,5882...$

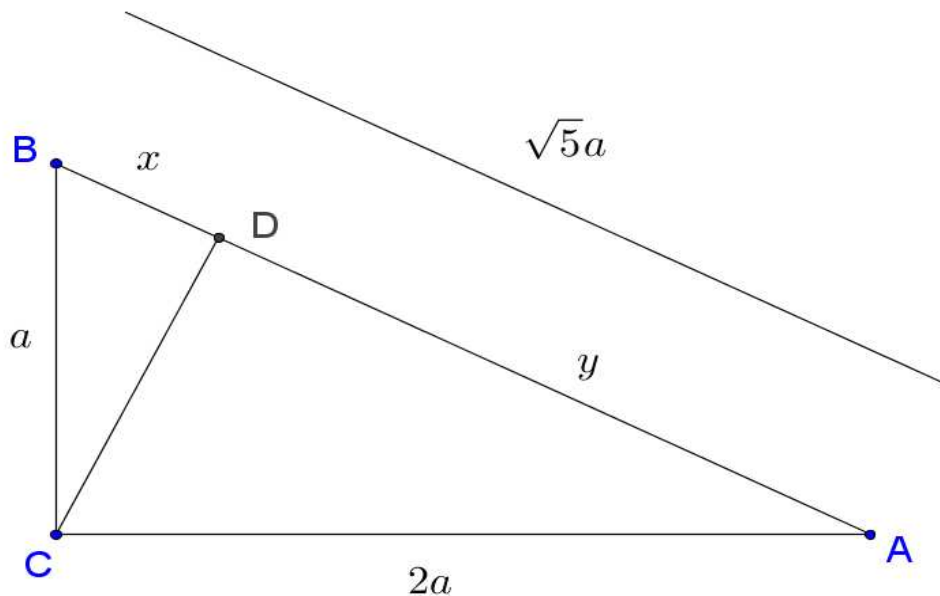
$$| : 8,5$$

Tuloksen perusteella Mikko voi nähdä kohteen aidan takana vain, jos se on vähintään 1,16 metriä korkea. Täten Mikko ei näe vain 105 cm pitkää lasta.

Vastaus Mikko ei näe lasta.

70

Merkitään lyhyemmän kateetin pituutta kirjaimella a , jolloin pidemmän kateetin ja hypotenuusan pituudet ovat vastaavasti $2a$ ja $\sqrt{5}a$. Käytetään oheisen kuvan merkintöjä.



Tehtävän 60 perusteella kaikki kuvan suorakulmaiset kolmiot ovat yhdenmuotoisia. Ratkaistaan verrantoyhtälöiden avulla lausekkeet pituuksille x ja y ja lasketaan lopuksi suhde $x : y$.

Kolmiosta ABC ja CBD saadaan lauseke pituudelle x .

$$\frac{|AB|}{|CB|} = \frac{|BC|}{|BD|}$$

$$\frac{\sqrt{5}a}{a} = \frac{a}{x}$$

$$\sqrt{5}ax = a^2$$

$$x = \frac{a}{\sqrt{5}}$$

Kerrotaan ristiin.

$$| : (\sqrt{5}a)$$

Kolmiosta ABC ja ACD saadaan vastaavasti lauseke pituudelle y .

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|AD|}$$

$$\frac{\sqrt{5}a}{2a} = \frac{2a}{y}$$

Kerrotaan ristiin.

$$\sqrt{5}ay = 4a^2$$

$$| : (\sqrt{5}a)$$

$$y = \frac{4a}{\sqrt{5}}$$

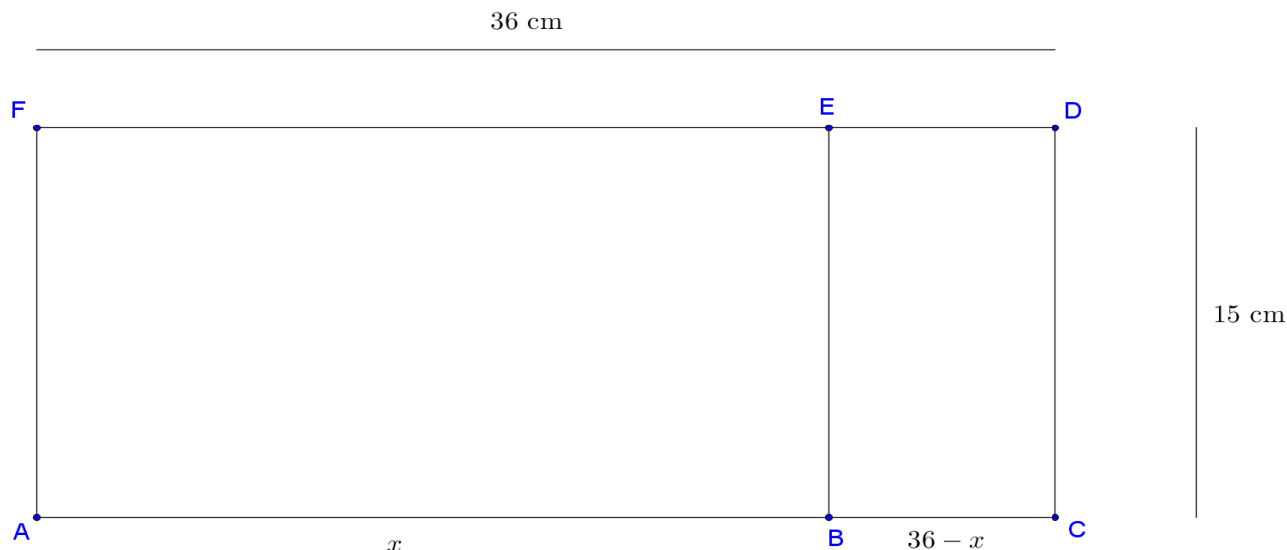
Hypotenuusan jakosuhteeksi saadaan lopulta

$$x : y = \frac{a}{\sqrt{5}} : \frac{4a}{\sqrt{5}} = \frac{a}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{4a} = \frac{1}{4} = 1 : 4.$$

Vastaus Korkeusjana jakaa hypotenuusan suhteessa $1 : 4$.

71

Käytetään oheisen kuvan merkintöjä. Jotta syntyy kaksi nelikulmiota, on oltava $0 < x < 36$.



Pituus x on siis sellainen, että nelikulmiot $ABEF$ ja $CDEB$ ovat yhdenmuotoiset. Tämä voi tapahtua kahdella tavalla: vastinsivuparit ovat joko 1) AB ja CD sekä BE ja DE tai 2) AB ja BC sekä BE ja CD (kuva mallintaa tapausta 1). Tutkitaan molemmat tilanteet erikseen.

Tapaus 1)

$$\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|BE|}{|DE|}$$

$$\frac{x}{15} = \frac{15}{36-x}$$

$$x(36-x) = 225$$

$$36x - x^2 - 225 = 0$$

$$x = 8,0501... \text{ tai } x = 27.9498...$$

$$x \approx 8,1 \text{ (cm)} \text{ tai } x \approx 27,9 \text{ (cm)}$$

Kerrotaan ristiin.

Ratkaistaan yhtälö laskimella.

Saadut ratkaisut ovat toistensa peilikuvat. Jos $x = 8,1$ cm, niin $36 - x = 27,9$ cm ja jos taas $x = 27,9$ cm, niin $36 - x = 8,1$ cm.

Tapaus 2)

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|BE|}{|CD|}$$

$$\frac{x}{36 - x} = \frac{15}{15}$$

$$\frac{x}{36 - x} = 1 \quad | \cdot (36 - x) (\neq 0)$$

$$x = 36 - x$$

$$2x = 36 \quad | : 2$$

$$x = 18 \text{ (cm)}$$

Kun $x = 18$ cm, niin myös $36 - x = 18$ cm, ja tällöin alkuperäinen nelikulmio jakautuu kahteen identtiseen puolikkaaseen.

Vastaus Osien pituudet ovat joko 8,1 cm ja 27,9 cm tai 18 cm ja 18 cm.

72

Merkitään kysyttyä pinta-alaa kirjaimella A . Ratkaistaan A verrantoyhtälöstä.

$$\frac{A}{0,76} = \left(\frac{1}{40000} \right)^2 \quad | \cdot 0,76 \quad \text{Pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö.}$$

$$A = \left(\frac{1}{40000} \right)^2 \cdot 0,76$$

$$A = 4,75 \cdot 10^{-10} \text{ (ha)}$$

Pinta-ala kartalla on siis

$$A = 4,75 \cdot 10^{-10} \text{ ha} = 4,75 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 = 4,75 \text{ mm}^2 \approx 4,8 \text{ mm}^2.$$

Vastaus Pinta-ala on $4,8 \text{ mm}^2$.

73

Merkitään kysyttyä pinta-alaa kirjaimella A ja muutetaan annetut pituusmitat samaan yksikköön. Tällöin pituusyksiköt supistuvat laskussa oikein ja pinta-ala saadaan tehtävänannon yksikössä km^2 .

$$6370 \text{ km} = 6\,370\,000 \text{ m} = 637\,000\,000 \text{ cm}$$

Ratkaistaan A verrantoyhtälöstä.

$$\frac{A}{14\,000\,000} = \left(\frac{25}{637\,000\,000} \right)^2$$

Pinta-alojen suhde on vastinpituuksien osamäärän neliö.

$$A = \left(\frac{25}{637\,000\,000} \right)^2 \cdot 14\,000\,000$$

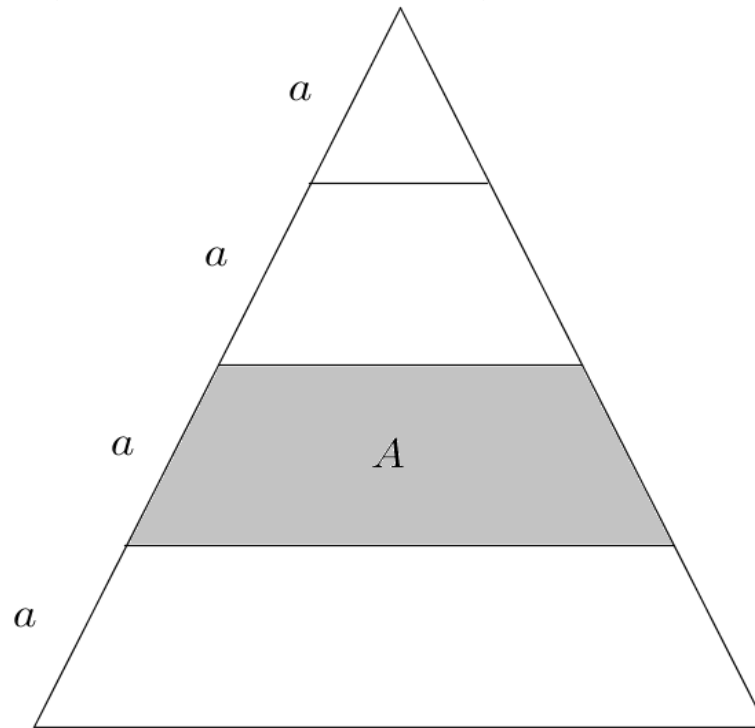
$$A = 2,1563\ldots \cdot 10^{-8} \text{ (km}^2\text{)}$$

Pinta-ala kartalla on siis

$$A = 2,1563\ldots \cdot 10^{-8} \text{ km}^2 = 2,1563\ldots \cdot 10^{-2} \text{ m}^2 = 215,63\ldots \text{ cm}^2 \approx 220 \text{ cm}^2.$$

Vastaus Pinta-ala on 220 cm^2 .

Merkitään yhden jako-osan pituutta kirjaimella a .



Kysytty, kuvassa tummennettuna näkyvä pinta-ala A saadaan selville vähentämällä kolmen ylimmän osan muodostaman kolmion pinta-alasta A_3 kahden ylimmän osan muodostaman kolmion pinta-ala A_2 . Kaikki kuvan sisäkkäiset kolmiot ovat yhdenmuotoisia kklauseen nojalla, sillä niillä on yhteinen huippukulma ja kyljen sekä vaakasuorien kantojen määräämät samankohtaiset, yhtä suuret kantalukmat.

Ratkaistaan ensin pinta-ala A_3 koko kolmion ja kolmen ylimmän osan määräämän kolmion avulla muodostetusta verrantoyhtälöstä.

$$\frac{A_3}{220} = \left(\frac{3a}{4a} \right)^2$$

$$\frac{A_3}{220} = \frac{9}{16}$$

$$16A_3 = 1980$$

$$A_3 = 123,75 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Pinta-alojen suhde on vastinpituuksien osamäärän neliö. Pituudet a supistuvat. Kerrotaan ristiin.

$$| : 16$$

Ratkaistaan sitten pinta-ala A_2 koko kolmion ja kahden ylimmän osan määräämän kolmion avulla muodostetusta verrantoyhtälöstä.

$$\frac{A_2}{220} = \left(\frac{2a}{4a} \right)^2$$

$$\frac{A_2}{220} = \frac{1}{4}$$

$$4A_2 = 220$$

$$A_2 = 55 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Pinta-alojen suhde on vastinpituuksien osamäärän neliö. Pituudet a supistuvat. Kerrotaan ristiin.

| : 16

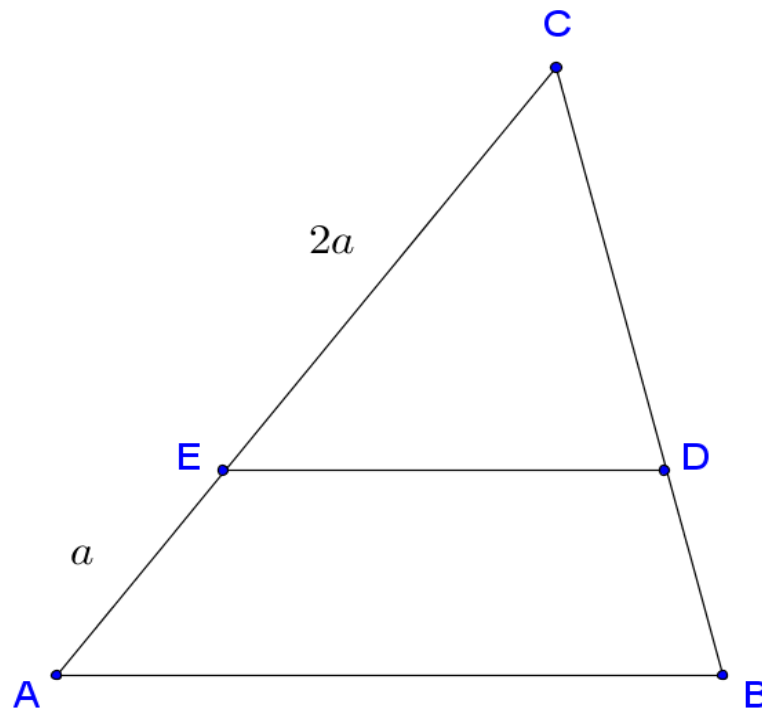
Tummennettu pinta-ala A saadaan näiden pinta-alojen erotuksena.

$$A = A_3 - A_2 = 123,75 \text{ cm}^2 - 55 \text{ cm}^2 = 68,75 \text{ cm}^2 \approx 69 \text{ cm}^2.$$

Vastaus Pinta-ala on 69 cm^2 .

75

Käytetään oheisen kuvan merkintöjä.



Sisäkkäiset kolmiot ABC ja EDC ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen nojalla.

- Huippukulma C on yhteinen.
- Kantakulmat BAC ja DEC ovat samankohtaisina yhtä suuret, koska $AB \parallel ED$.

Merkitään pienemmän huippukolmion EDC pinta-alaa A_h ja koko kolmion pinta-alaa kirjaimella A . Näiden suhde on sama, kuin vastinpituuksien suhteen neliö.

$$\frac{A_h}{A} = \left(\frac{|CE|}{|CA|} \right)^2 = \left(\frac{2a}{3a} \right)^2 = \frac{4}{9} = 0,444... \approx 44\%$$

Pienen kolmion pinta-ala on siis 44% koko kolmion alasta.

Vastaus Pinta-ala on 44% kolmion alasta.

76

a) Pinta-alojen suhde on vastinpituuksen suhteen neliö.

$$\frac{A_{\text{iso}}}{A_{\text{pieni}}} = \left(\frac{25}{15} \right)^2 = 2,777... \approx 278\%.$$

Täten ison pallon pinta-ala on noin $278\% - 100\% = 178\%$ suurempi kuin pienen pallon ala.

b) Tilavuuksien suhde on vastinpituuksen suhteen kuutio.

$$\frac{V_{\text{iso}}}{V_{\text{pieni}}} = \left(\frac{25}{15} \right)^3 = 4,6296... \approx 463\%.$$

Täten ison pallon tilavuus on noin $463\% - 100\% = 363\%$ suurempi kuin pienen pallon tilavuus.

Vastaus a) 178% suurempi b) 363% suurempi

77

Merkitään hahmojen korkeuksia ja tilavuuksia kirjaimilla h ja V niin, että alaindeksit 1, 2 ja 3 viittaavat kappaleisiin järjestyksessä pienimmästä suurimpaan. Nyt tiedetään, että $h_1 = 7,5 \text{ cm}$, $V_2 = 270 \text{ cm}^3$, $h_3 = 25 \text{ cm}$ ja $V_3 = 1250 \text{ cm}^3$.

a) Tilavuuksien suhde on vastinpituuksien suhteen kuutio. Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan tilavuus V_1 .

$$\frac{V_1}{V_3} = \left(\frac{h_1}{h_3} \right)^3$$

$$\frac{V_1}{1250} = \left(\frac{7,5}{25} \right)^3 \quad | \cdot 1250$$

$$V_1 = \left(\frac{7,5}{25} \right)^3 \cdot 1250$$

$$V_1 = 33,75$$

$$V_1 \approx 34 \text{ (cm}^3\text{)}$$

Pienimmän hahmon tilavuus on siis noin 34 cm^3 .

b) Tilavuuksien suhde on vastinpituuksien suhteen kuutio.
Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan korkeus h_2 .

$$\left(\frac{h_2}{h_3}\right)^3 = \frac{V_2}{V_3}$$

$$\left(\frac{h_2}{25}\right)^3 = \frac{270}{1250}$$

$$\frac{h_2}{25} = \sqrt[3]{\frac{270}{1250}} = \frac{3}{5} \quad | \cdot 25$$

$$h_2 = \frac{3}{5} \cdot 25$$

$$h_2 = 15 \text{ (cm)}$$

Keskimmäisen hahmon korkeus on siis 15 cm.

Vastaus a) Tilavuus on 34 cm^3 . b) Korkeus on 15 cm.

78

Merkitään suuremman lipun pituutta kirjaimella d ja ratkaistaan se verrantoyhtälöstä.

$$\left(\frac{d}{1,8}\right)^2 = \frac{3,6}{2,0} = 1,8$$

Pinta-alojen suhde on
vastinpituuksien suhteen neliö.

$$\frac{d}{1,8} = \sqrt{1,8}$$

$$| \cdot 1,8$$

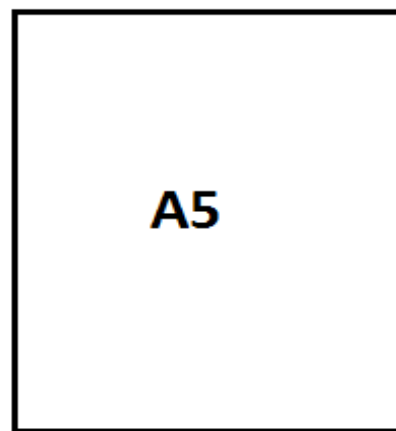
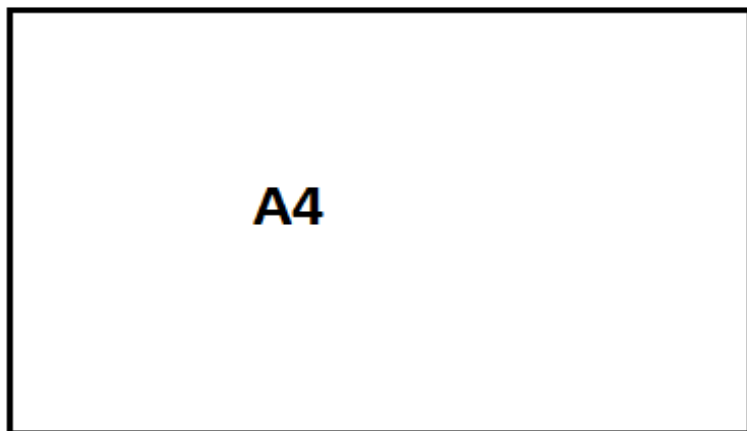
$$d = \sqrt{1,8} \cdot 1,8$$

$$d = 2,4149\dots$$

$$d \approx 2,4 \text{ (m)}$$

Suuremman lipun pituus on siis noin 2,4 m.

Vastaus Pituus on 2,4 m.



Merkitään tekstin korkeutta A4-paperilla h_4 ja A5-paperilla h_5 . Lasketaan suhteen $h_5 : h_4$ arvo prosentteina ja päätellään vastaus.

$$\left(\frac{h_5}{h_4}\right)^2 = \frac{A_{A5}}{A_{A4}}$$

Pinta-alojen suhde on vastinpituuksien suhteen neliö.

$$\frac{h_5}{h_4} = \sqrt{\frac{A_{A5}}{A_{A4}}}$$

Nyt pinta-alojen suhde on $A_{A5} : A_{A4} = 50 : 100 = 0,5$, joten

$$\frac{h_5}{h_4} = \sqrt{0,5} = 0,7071... \approx 71\%.$$

Pienennyksen yhteydessä tekstin korkeus pienenee noin $100\% - 71\% = 29\%$.

Vastaus Korkeus pienenee 29%.

80

Muutetaan aluksi pinta-alat samaan yksikköön.

$$8,5 \text{ m}^2 = 85\,000 \text{ cm}^2$$

Merkitään monumentin ja pienoismallin pinta-aloja järjestyksessä A_1 ja A_2 sekä tilavuuksia vastaavasti V_1 ja V_2 .

Lasketan sitten pinta-alojen avulla pienennöksen mittakaava k .

$$k^2 = \frac{A_2}{A_1}$$

Pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö.

$$k = \sqrt{\frac{A_2}{A_1}}$$

Sijoitetaan pinta-alat.

$$k = \sqrt{\frac{310}{85\,000}} = \sqrt{\frac{31}{8500}}$$

Ratkaistaan sitten tilavuus V_2 verrantoyhtälöstä.

$$\frac{V_2}{V_1} = k^3$$

Tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio.

$$\frac{V_2}{1300} = \left(\sqrt{\frac{31}{8500}} \right)^3$$

$$| \cdot 1300$$

$$V_2 = \left(\sqrt{\frac{31}{8500}} \right)^3 \cdot 1300$$

$$V_2 = 0,2863... \text{ (L)}$$

Pienoismallin tilavuus on siis noin $0,2863... \text{ L} \approx 2,9 \text{ dl}$.

Vastaus Tilavuus on $2,9 \text{ dl}$.

81

Merkitään alkuperäistä pinta-alaa A_1 ja pienennöksen pinta-alaa A_2 . Näiden suhde on sama kuin vastinpituuksien suhteen neliö. Toisaalta kuvatus rakennuksen pinta-alan muutos on prosentteina sama, kuin koko pohjapiirroksen pinta-alan muutos. Nyt

$$\frac{A_2}{A_1} = \left(\frac{30}{45} \right)^2 = 0,444... \approx 44\% .$$

Pinta-ala pienenee siis noin $100\% - 44\% = 56\%$.

Vastaus Pinta-ala pienenee 56%.

82

a) Merkitään jotakin vapaasti valittua pituutta alkuperäisessä kappaleessa h_1 ja vastaavaa pituutta suurennetussa kappaleessa h_2 . Merkitään alkuperäisen kappaleen pinta-alaa A_1 ja suurennetun kappaleen alaa A_2 . Koska pinta-ala on viisinkertaistunut, on $A_2 : A_1 = 5 : 1 = 5$. Määritetään suhde $h_2 : h_1$.

$$\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 = \frac{A_2}{A_1}$$

Pinta-alojen suhde on
vastinpituuksien suhteen neliö.

$$\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 = 5$$

$$\frac{h_2}{h_1} = \sqrt{5} = 2,2360\dots$$

$$\frac{h_2}{h_1} \approx 224\%$$

Pituuksia on siis suurennettava $224\% - 100\% = 124\%$.

b) Merkitään jotakin vapaasti valittua pituutta alkuperäisessä kappaleessa h_1 ja vastaavaa pituutta suurennetussa kappaleessa h_2 . Merkitään alkuperäisen kappaleen tilavuutta V_1 ja suurennetun kappaleen tilavuutta V_2 . Koska pinta-ala on viisinkertaistunut, on $V_2 : V_1 = 5 : 1 = 5$. Määritetään suhde $h_2 : h_1$.

$$\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^3 = \frac{V_2}{V_1}$$

Pinta-alojen suhde on
vastinpituuksien suhteen neliö.

$$\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^3 = 5$$

$$\frac{h_2}{h_1} = \sqrt[3]{5} = 1,7099\dots$$

$$\frac{h_2}{h_1} \approx 171\%$$

Pituuksia on siis suurennettava $171\% - 100\% = 71\%$.

Vastaus a) Pituuksia on suurennettava 124%

b) Pituuksia on suurennettava 71%

83

Määritetään ensin pituuksien muutossuhde, eli mittakaava, kun pinta-ala pienenee suhteessa 2 : 3. Koska pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö, saadaan mittakaavalle seuraava arvo.

$$k^2 = \frac{2}{3}$$

$$k = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Uudet pituuden saadaan nyt kertomalla vanhat tällä mittakaavan arvolla.

Pituus 20 cm muuttuu pituudeksi

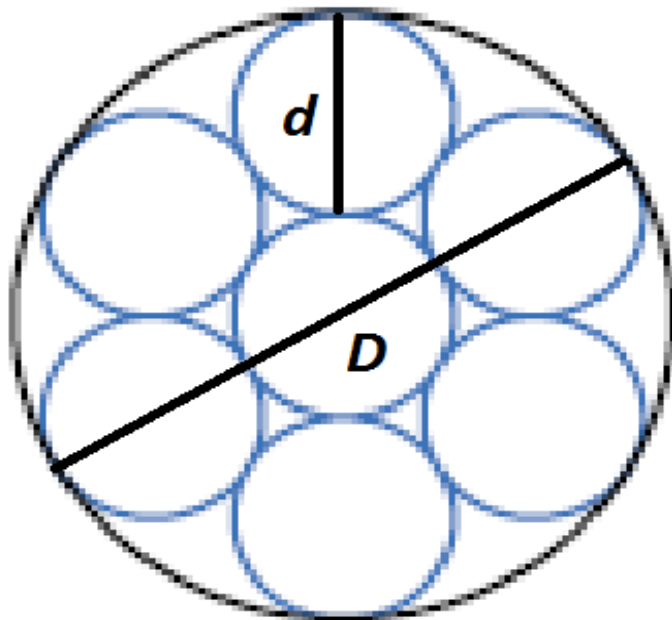
$$\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 20 \text{ cm} = 16,3299... \text{ cm} \approx 16 \text{ cm} .$$

Pituus 21 cm muuttuu pituudeksi $\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 21 \text{ cm} = 17,1464... \text{ cm} \approx 17 \text{ cm} .$

Pituus 29 cm muuttuu pituudeksi

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 29 \text{ cm} = 23,6784... \text{ cm} \approx 24 \text{ cm} .$$

Vastaus Uudet pituudet ovat 16 cm, 17 cm ja 24 cm.



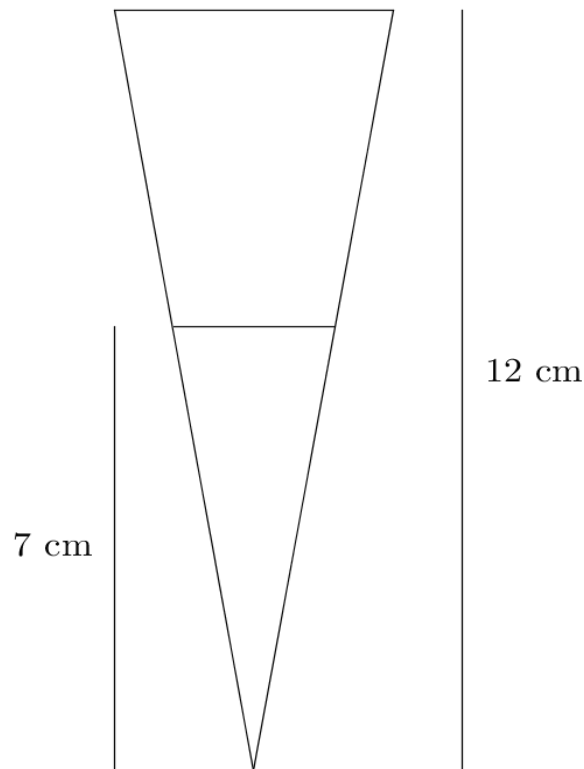
Merkitään pienen ja suuren ympyrän halkaisijoita d ja D ja pinta-aloja vastaavasti A_p ja A_s . Koska $D = 3d$, saadaan pinta-alojen

suhteeksi $\frac{A_p}{A_s} = \left(\frac{d}{D}\right)^2 = \left(\frac{d}{3d}\right)^2 = \frac{1}{9}$, josta $A_p = \frac{1}{9} A_s$.

Koska pieniä ympyröitä on kuviossa 7 kappaletta, kysytty pinta-alojen suhde on

$$\frac{7A_p}{A_s} = \frac{7 \cdot \frac{1}{9} A_s}{A_s} = \frac{7}{9} = 7:9.$$

Vastaus Pinta-alojen suhde on $7:9$.



Lasin poikkileikkaus sisältää kaksi sisäkkäistä kolmiota, jotka ovat keskenään yhdenmuotoiset kk-lauseen nojalla. Kolmioilla on yhteinen huippukulma ja kyljen sekä vaakasuorien linjojen rajaamat yhtä suuret, samankohtaiset kantakulmat. Itse lasi ja sisällä oleva juomapatsas ovat kartioita, ja myös nämä ovat keskenään yhdenmuotoiset. Kun lasin kokonaistilavuutta merkitään V_L ja juoman tilavuutta V_J , saadaan tilavuuksien suhteeksi

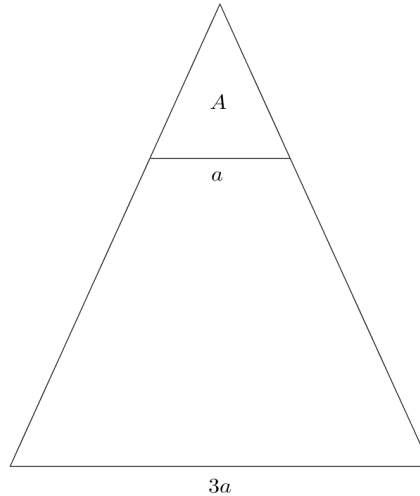
$$\frac{V_J}{V_L} = \left(\frac{7}{12} \right)^3 = 0,1984... \approx 20\%.$$

Juoma täyttää siis noin 20% lasin tilavuudesta, jolloin vapaa tilavuus on $100\% - 20\% = 80\%$.

Vastaus Vapaana on 80%.

86

Merkitään sisään syntyvän pienen kolmion kannan pituutta kirjaimella a , jolloin koko kolmion kanta on pituudeltaan $3a$.



Kuvan sisäkkäiset kolmiot ovat yhdenmuotiset kk-lauseen nojalla.

- Huippukulma on yhteinen
- Kantakulmat ovat samankohtaisina yhtä suuret, koska kannat ovat yhdensuuntaiset.

Merkitään huippukolmion pinta-alaa A ja ratkaistaan se verrantoyhtälöstä.

$$\frac{A}{12} = \left(\frac{a}{3a} \right)^2$$

$$\frac{A}{12} = \frac{1}{9}$$

$$A = \frac{1}{9} \cdot 12 = \frac{4}{3}$$

Alojen suhde on
vastinpituuksien suhteen neliö.

$$| \cdot 12$$

Pohjalle jäävän puolisuunnikkaan pinta-ala on nyt

$$12 - \frac{4}{3} = 10\frac{2}{3}.$$

Vastaus Puolisuunnikkaan pinta-ala on $10\frac{2}{3}$.

87

Tarvittavan päällystekullan määrä on suorassa suhteessa pinta-alaan. Pinta-alojen suhde taas on vastinpituuksien suhteen neliö. Merkitään suurempaan kupoliin tarvittavan kullan massaa M ja ratkaistaan se verrantoyhtälöstä.

$$\frac{M}{85,7} = \left(\frac{2,50}{1,80} \right)^2 \quad | \cdot 85,7$$

$$M = \left(\frac{2,50}{1,80} \right)^2 \cdot 85,7$$

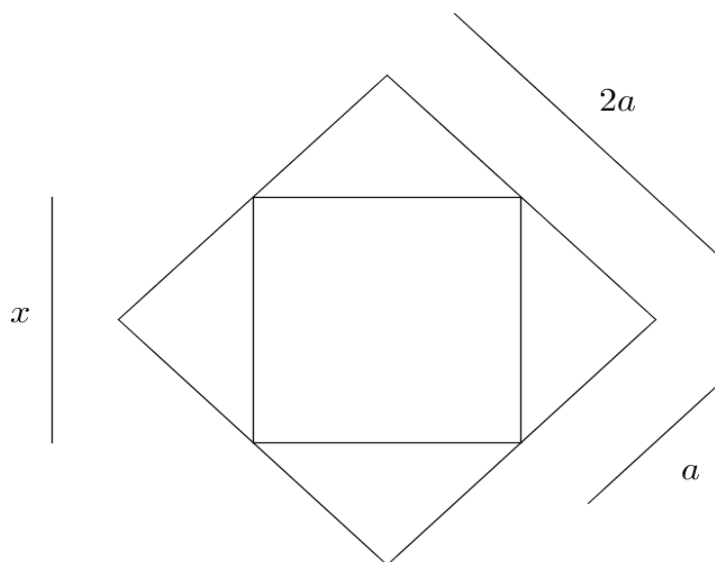
$$M = 165,3163\dots$$

$$M \approx 165 \text{ (g)}$$

Kultaa tarvitaan siis noin 165 g.

Vastaus Kultaa tarvitaan 165 g.

a)



Merkitään suuren neliön sivun pituutta $2a$, jolloin sivun puolikas on a . Merkitään edelleen pienemmän neliön sivun pituutta x .

Suuren neliön pinta-ala on $A_1 = (2a)^2 = 4a^2$. Sisemmän neliön ulkopuolelle jää neljä identtistä suorakulmaista kolmiota, joiden

yhteispinta-ala on $4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot a \right) = 2a^2$. Täten sisemmän neliön pinta-

alaksi saadaan $A_2 = 4a^2 - 2a^2 = 2a^2$. Toisaalta sisemmän neliön ala on x^2 , joten voimme ratkaista sivun pituuden yhtälöstä.

$$x^2 = 2a^2$$

$$x = \sqrt{2a^2}$$

$$x = \sqrt{2}a \quad (a > 0)$$

Neliöiden välinen mittakaava on

$$x : (2a) = \frac{\sqrt{2}a}{2a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \stackrel{(\sqrt{2})}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 : \sqrt{2}.$$

Pinta-alojen suhde on

$$A_2 : A_1 = \frac{2a^2}{4a^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 1 : 2.$$

b) Edellisen kohdan perusteella seuraavan kuvioon syntyvän neliön pinta-ala on aina puolet edellisestä, jolloin pinta-alat muodostavat geometrisen jonon. Kun ensimmäisen neliön pinta-ala on A_1 ja jonon suhdeluku on $\frac{1}{2}$, saadaan n :nnen neliön pinta-ala A_n

kaavasta $A_n = A_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. Ratkaistaan nyt epäyhtälön avulla, millä luvun n arvolla on ensimmäisen kerran $A_n < 0,001 A_1$.

$$A_n < 0,001 A_1$$

$$A_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 0,001 A_1 \quad | : A_1$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 0,001$$

Ratkaistaan epäyhtälö laskimella.

$$n > 10,9657\dots$$

n on kokonaisluku.

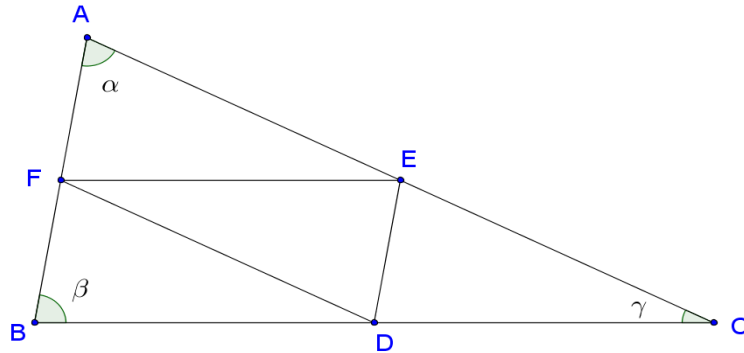
$$n \geq 11$$

Ensimmäinen ehdon toteuttava neliö on siis 11. neliö.

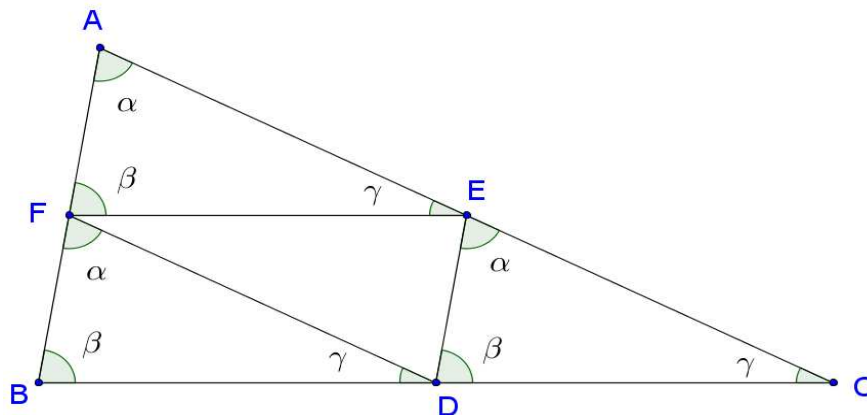
Vastaus a) Mittakaava on $1:\sqrt{2}$ ja pinta-alojen suhde on $1:2$.
b) 11. neliö

89

a) Käytetään oheisen kuvan merkintöjä.



Koska $FE \parallel BC$, on samankohtaisuuden perusteella $\angle AFE = \angle ABC$ ja $\angle AEF = \angle ACB$. Koska $ED \parallel AB$, on samankohtaisuuden perusteella $\angle CED = \angle CAB$ ja $\angle CDE = \angle CBA$. Koska $DF \parallel CA$, on samankohtaisuuden perusteella $\angle BDF = \angle BCA$ ja $\angle BFD = \angle BAC$. Näiden havaintojen pohjalta voimme täydentää kuvaa.

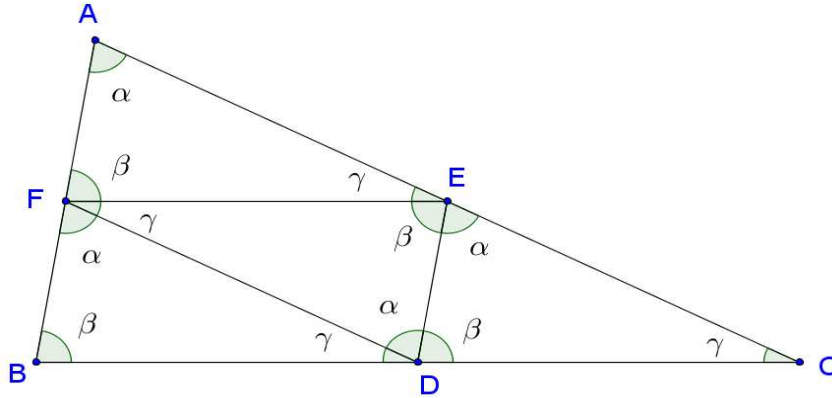


Kolmion kulmasumman perusteella $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Yllä olevasta kuvasta voidaan nyt laskea sisemmän kolmion kulmien suuruudet.

$$\angle EFD = 180^\circ - \alpha - \beta = \gamma \quad (\text{Oikokulman suuruus on } 180^\circ.)$$

$$\angle FED = 180^\circ - \alpha - \gamma = \beta$$

$$\angle EDF = 180^\circ - \beta - \gamma = \alpha$$



Kolmion DEF kulmat ovat siis yhtä suuret, kuin kolmion ABC kulmat, joten kolmiot ovat yhdenmuotoiset. Koska kukin sisemmän kolmion sivuista on pituudeltaan puolet suuren kolmion vastinsivusta, on kolmioiden välinen mittakaava $1 : 2$. Pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö, eli $(1 : 2)^2 = 1^2 : 2^2 = 1 : 4$.

b) Edellisen kohdan nojalla seuraavan kolmion pinta-ala on aina $\frac{1}{4}$

edellisen kolmion alasta. Sisäkköisten kolmioiden pinta-alat muodostavat näin geometrisen jonon, jossa n :nnen kolmion ala

saadaan kaavasta $A_n = A_1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$. Ratkaistaan epäyhtälön avulla,

millä luvun n arvolla on ensimmäisen kerran $A_n < 0,000\,001\,A_1$.

$$A_1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} < 0,000\,001\,A_1 \quad | : A_1$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} < 0,000\,001$$

$$n > 10,9657\dots$$

$$n \geq 11$$

Ratkaistaan epäyhtälö laskimella.

n on kokonaisluku.

Vastaus a) Mittakaava on $1 : 2$ ja pinta-alojen suhde on $1 : 4$.
b) 11. kolmio

90

a) Jos alkuperäisen kartan pinta-ala on A_1 ja pienennetyn kartan ala A_2 , on pinta-alojen suhde $A_2 : A_1 = 1 : 2$. Merkitään tien pituutta alkuperäisellä kartalla a ja pituutta luonnossa d . Ratkaistaan d kahden peräkkäisen verrantoyhtälön avulla.

$$\left(\frac{13,5}{a}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{13,5}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$a = \sqrt{2} \cdot 13,5$$

$$a = 19,0918... \text{ (cm)}$$

Pinta-alojen suhde on vastinpituuksien suhteen neliö.

Kerrotaan ristiin.

Edelleen,

$$\frac{19,0918...}{d} = \frac{1}{25\,000}$$

$$d = 25\,000 \cdot 19,0918...$$

$$d = 477\,297,07... \text{ (cm)}$$

Kerrotaan ristiin.

Tien todellinen pituus on siis noin $477\,297,07 \text{ cm} = 4,772... \text{ km} \approx 4,8 \text{ km}$.

b) Uuden, pienennetyn kartan mittakaavaksi saadaan edellisten laskujen perusteella

$$k = \frac{13,5}{477\,297,07\dots} = \frac{13,5}{25\,000 \cdot 19,0918\dots} = \frac{13,5}{25\,000 \cdot \sqrt{2} \cdot 13,5}$$
$$= \frac{1}{25\,000\sqrt{2}} = \frac{1}{35\,355,33\dots} \approx \frac{1}{35\,400} = 1:35\,400$$

(Huomaa, että mittakaava on peräkkäisten pienennyssuhteiden tulo.)

Vastaus a) Tien pituus kartalla on 9,5 cm.

b) Pienen kartan mittakaava on 1 : 35 000.

91

Kuvan neljä sisäkkäistä kolmiota ovat kaikki yhdenmuotoisia kklauseen nojalla, sillä niillä on yhteinen huippukulma ja kyljen ja vaakasuorien linjojen rajaamat yhtä suuret, samankohtaiset kantakulmat. Merkitään sisäkkäisten kolmioiden pinta-aloja huipulta lukien suurenevassa järjestyksessä A_1 , A_2 , A_3 ja A_4 . Tehtävänannon perusteella $|AC| = 30$ ja pinta-alojen välillä ovat seuraavat yhteydet. $A_2 = 2A_1$, $A_3 = 3A_1$ ja $A_4 = 4A_1$

a) Ratkaistaan janan CD pituus verrantoyhtälöstä.

$$\left(\frac{|CD|}{|CA|} \right)^2 = \frac{A_1}{A_4}$$

Pinta-alojen suhde on vastinpituuksien suhteen neliö.

$$\left(\frac{|CD|}{30} \right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$A_4 = 4A_1$$

$$\frac{|CD|}{30} = \frac{1}{2}$$

$$| \cdot 30$$

$$|CD| = 15$$

Janan CD pituus on siis 15.

b) Janan EF pituus saadaan erotuksena $|CF| - |CE|$. Ratkaistaan siis ensin $|CF|$ ja sitten $|CE|$ samaan tapaan, kuin a-kohdassa.

$$\left(\frac{|CF|}{|CA|}\right)^2 = \frac{A_3}{A_4}$$

Pinta-alojen suhde on vastinpituuksien suhteen neliö.

$$\left(\frac{|CF|}{30}\right)^2 = \frac{3A_1}{4A_1}$$

$$A_3 = 3A_1 \text{ ja } A_4 = 4A_1$$

$$\frac{|CF|}{30} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$| \cdot 30$$

$$|CF| = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 30 = 15\sqrt{3}$$

Edelleen

$$\left(\frac{|CE|}{|CA|}\right)^2 = \frac{A_2}{A_4}$$

Pinta-alojen suhde on vastinpituuksien suhteen neliö.

$$\left(\frac{|CE|}{30}\right)^2 = \frac{2A_1}{4A_1}$$

$$A_2 = 2A_1 \text{ ja } A_4 = 4A_1$$

$$\frac{|CE|}{30} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$| \cdot 30$$

$$|CE| = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 30 = 15\sqrt{2}$$

Näiden tulosten perusteella

$$|EF| = |CF| - |CE| = 15\sqrt{3} - 15\sqrt{2} = 15(\sqrt{3} - \sqrt{2}) (\approx 4,8)$$

Vastaus a) $|CD| = 15$

b) $|EF| = 15(\sqrt{3} - \sqrt{2}) (\approx 4,8)$

92

Kun alkuperäisen piirroksen pinta-ala on A_1 , niin pienennetyn piirroksen pinta-ala on $A_2 = 0,7A_1$. Kun kopion korkeutta merkitään kirjaimella x , on alkuperäisen piirroksen korkeus $x + 14$ (cm). Ratkaistaan korkeus x verrantoyhtälöstä.

$$\left(\frac{x}{x+14}\right)^2 = \frac{A_2}{A_1}$$

$$\left(\frac{x}{x+14}\right)^2 = 0,7$$

$$\frac{x^2}{x^2 + 28x + 196} = 0,7$$

$$x^2 = 0,7(x^2 + 28x + 196)$$

$$x^2 = 0,7x^2 + 19,6x + 137,2$$

$$0,3x^2 - 19,6x - 137,2 = 0$$

$$x = 71,710\dots \text{ tai } x = -6,377\dots$$

$$x \approx 72 \text{ (cm)}$$

Pinta-alojen suhde on vastinpituuksien suhteen neliö.

$$A_2 = 0,7A_1$$

$$| \cdot (x^2 + 28x + 196) (\neq 0)$$

Ratkaistaan yhtälö laskimella.
Korkeus on positiivinen.

Kopion korkeus on noin 72 cm.

Vastaus Kopion korkeus on noin 72 cm.

93

Merkitään 1 litran ja 3 litran pullojen muovimääriä m_1 ja m_3 ja tilavuuksia V_1 ja V_3 . Pullot ovat yhdenmuotoiset ja niiden välinen mittakaava k voidaan ratkaista kahdella eri tavalla yhtälön avulla.

$$k^2 = \frac{m_1}{m_3}$$

$$k = \sqrt{\frac{m_1}{m_3}}$$

ja

$$k^3 = \frac{V_1}{V_3}$$

$$k^3 = \frac{1}{3}$$

$$k = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$$

Muovimäärien ja pinta-alojen suhde on sama. Pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö.

Tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio.

Nyt voidaan selvittää muovimäärien suhde.

$$k = k$$

$$\sqrt{\frac{m_1}{m_3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$$

$$\frac{m_1}{m_3} = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}} \right)^2 = \frac{1}{(\sqrt[3]{3})^2}$$

$$m_3 = (\sqrt[3]{3})^2 m_1$$

$$m_3 = 2,0800... \cdot m_1$$

$$m_3 \approx 2,1 m_1$$

Kerrotaan ristiin.

Suuremman pullon muovimäärä on siis noin 2,1-kertainen.

Lasketaan sitten lausekkeet molempien pullojen muovimäärän ja tilavuuden suhteelle (yksikkönä muovin määrä/litra).

$$1 \text{ litran pullo: } \frac{m_1}{1} = m_1$$

$$3 \text{ litran pullo: } \frac{m_3}{3} = \frac{2,0800... \cdot m_1}{3} = 0,6933... \cdot m_1$$

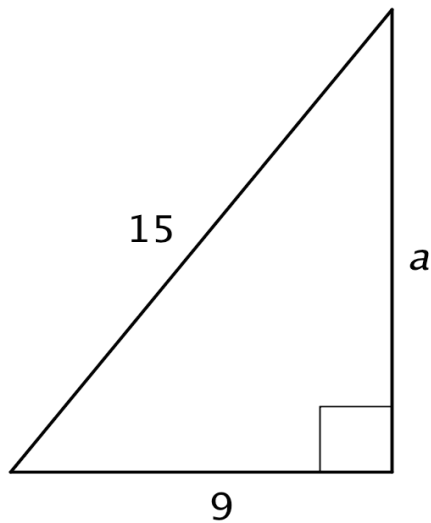
Osamäärä

$$\frac{0,6933... \cdot m_1}{m_1} = 0,6933... \approx 69\%,$$

joten litraa kohden suuremman pullon muovimäärä on $100\% - 69\% = 31\%$ pienempi.

Vastaus Suuremman pullon muovimäärä on 2,1-kertainen ja litraa kohden muovia on käytetty 31% vähemmän.

94



Pythagoraan lauseella saadaan yhtälö

$$15^2 = 9^2 + a^2$$

$$a^2 = 15^2 - 9^2$$

$$= 225 - 81$$

$$= 144$$

$$a = \pm\sqrt{144}$$

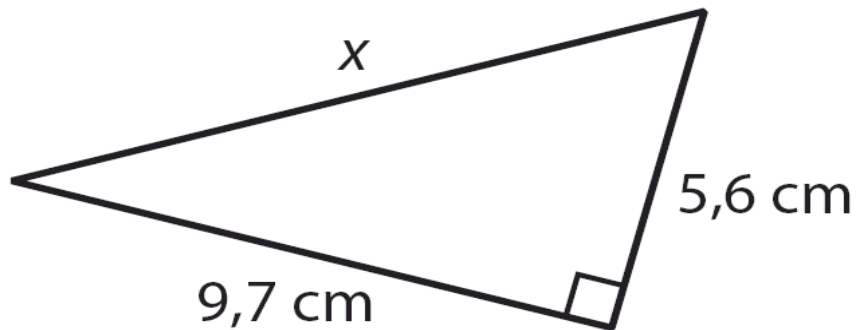
$$a = -12 \text{ tai } a = 12$$

Pituus on positiivinen, joten kateetin pituus on 12.

Vastaus Kateetin pituus on 12.

95

a)



Muodostetaan Pythagoraan lauseella yhtälö.

$$x^2 = 9,7^2 + 5,6^2$$

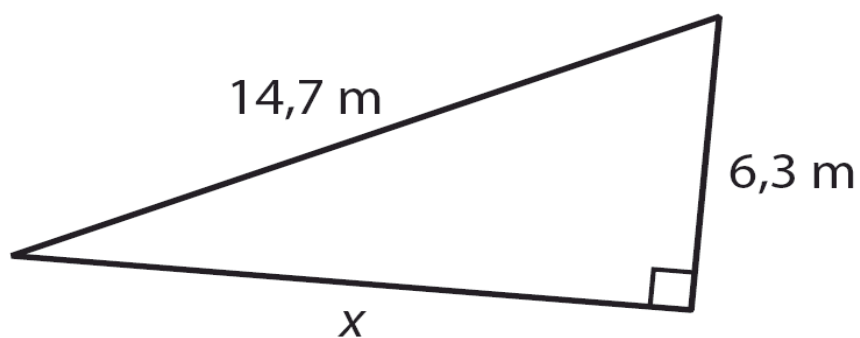
$$= 125,45$$

$$x = \pm\sqrt{125,45}$$

$$x = -11,2004... \text{ tai } x = 11,2004...$$

Sivun pituus on positiivinen, joten $x = 11,2004... \approx 11$ (cm) .

b)



Muodostetaan Pythagoraan lauseella yhtälö.

$$14,7^2 = 6,3^2 + x^2$$

$$x^2 = 14,7^2 - 6,3^2$$

$$= 176,4$$

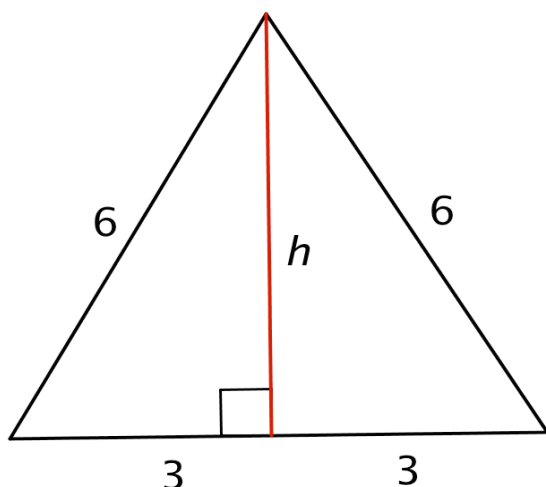
$$x = \pm\sqrt{176,4}$$

$$x = -13,28... \text{ tai } x = 13,28...$$

Sivun pituus on positiivinen, joten $x = 13,28... \approx 13$ (m) .

Vastaus a) 11 cm b) 13 m

96



- a) Jaetaan tasasivuinen kolmio korkeusjanalla kahdeksi suorakulmaiseksi kolmioksi.
Muodostetaan Pythagoraan lauseella yhtälö.

$$6^2 = 3^2 + h^2$$

$$h^2 = 6^2 - 3^2$$

$$= 27$$

$$x = \pm\sqrt{27}$$

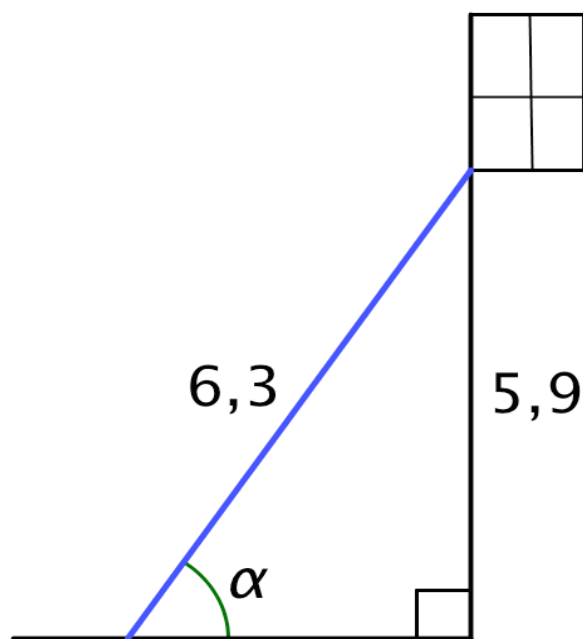
$$x = -\sqrt{27} \text{ tai } x = \sqrt{27}$$

Korkeus on positiivinen, joten $h = \sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = 3\sqrt{3}$.

b) Pinta-ala $A = \frac{\text{kanta} \cdot \text{korkeus}}{2} = \frac{6 \cdot 3\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$.

Vastaus a) $3\sqrt{3}$ b) $9\sqrt{3}$

97



Koska tikkaiden pituus on suurempi kuin ikkunalaudan korkeus maanpinnasta, tikkaat sinällään yltävät ikkunalaudalle. Selvitetään, mikä tällöin on maanpinnan ja tikkaiden välinen kulma, jotta tiedetään, voiko tikkaita käyttää tässä tilanteessa.

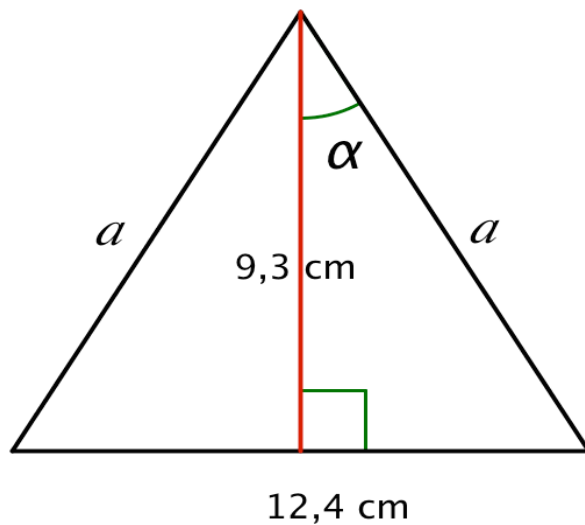
$$\sin \alpha = \frac{5,9}{6,3}$$

$$\begin{aligned}\alpha &= \sin^{-1} \frac{5,9}{6,3} \\ &= 69,47...^\circ \\ &\approx 69^\circ\end{aligned}$$

Koska $55^\circ \leq 69^\circ \leq 75^\circ$, niin tikkailla voi kiivetä ikkunalaudalle.

Vastaus Yltävät

98



Jaetaan tasakylkinen kolmio korkeusjanan avulla kahdeksi suorakulmaiseksi kolmioksi.

Kolmion kyljen pituus saadaan laskettua Pythagoraan lauseen avulla.

$$a^2 = 9,3^2 + \left(\frac{12,4}{2}\right)^2$$

$$= 9,3^2 + 6,2^2$$

$$= 124,93$$

$$a = \pm\sqrt{124,93}$$

Pituus on positiivinen, joten $a = \sqrt{124,93} = 11,177... \approx 11$ (cm).

Huippukulma saadaan suorakulmaisen kolmion kulman α avulla.

$$\tan \alpha = \frac{6,2}{9,3}$$

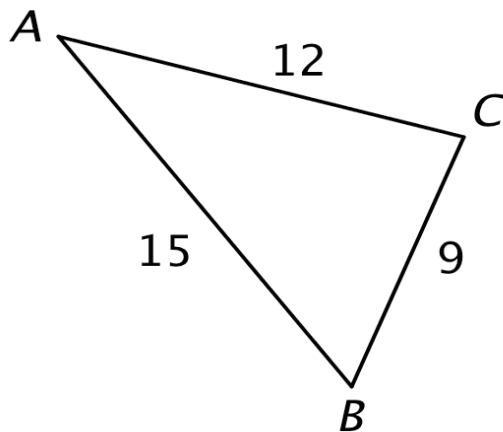
$$\alpha = \tan^{-1} \frac{6,2}{9,3}$$

$$= 33,69...^{\circ}$$

Huippukulma on $2\alpha = 2 \cdot 33,69...^{\circ} = 67,38...^{\circ} \approx 67^{\circ}$.

Vastaus Kylki on 11 cm, huippukulma 67° .

99



- a) Tutkitaan toteutuuko Pythagoraan lause. Pisin sivu on ehdokas hypotenuusaksi, lyhyemmät kateeteiksi.

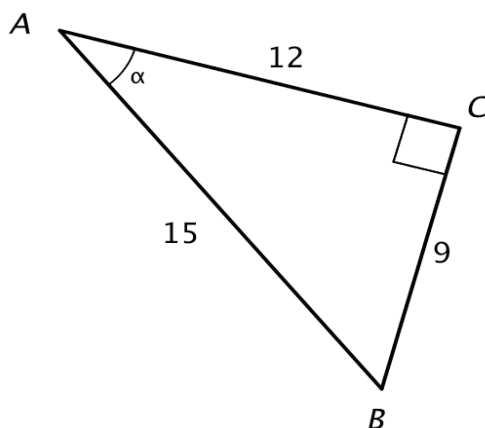
$$9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$$

Toisaalta

$$15^2 = 225$$

Kolmio toteuttaa Pythagoraan lauseen, joten se on suorakulmainen.

- b) Pienin kulma on lyhintä sivua vastassa, joten on laskettava kulma A.



$$\tan \alpha = \frac{9}{12}$$

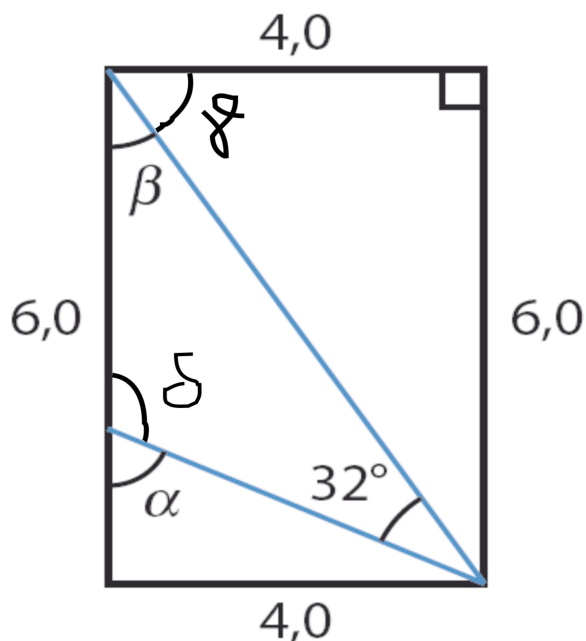
$$\alpha = \tan^{-1} \frac{9}{12}$$

$$= 36,86...^{\circ}$$

$$\approx 36,9^{\circ}$$

Vastaus a) Kolmio on suorakulmainen.
 b) Pienin kulma on $36,9^{\circ}$.

100



Käytetään kuvan merkintöjä. Lasketaan ensin kulma γ .

$$\tan \gamma = \frac{6,0}{4,0}$$

$$\gamma = \tan^{-1} \frac{6,0}{4,0}$$

$$= 56,309...^{\circ}$$

Nyt saadaan selville kulma β .

$$\beta = 90^{\circ} - \gamma = 90^{\circ} - 56,309...^{\circ} = 33,69...^{\circ} \approx 34^{\circ}$$

Kolmion kulmien summa on 180° , joten kulma δ saadaan selville kulman β avulla.

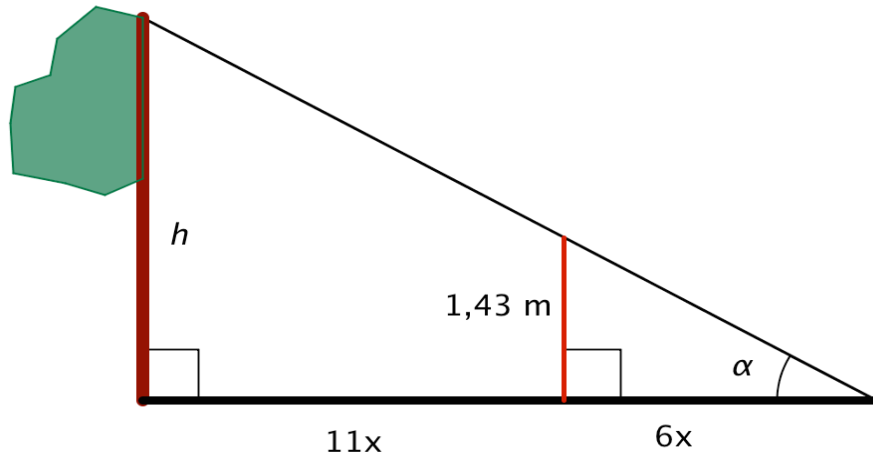
$$\delta = 180^{\circ} - 32^{\circ} - \beta = 148^{\circ} - \beta$$

Kulma α on kulman δ vieruskulma.

$$\begin{aligned}
\alpha &= 180^\circ - \delta \\
&= 180^\circ - (148^\circ - \beta) \\
&= 180^\circ - 148^\circ + \beta \\
&= 32^\circ + \beta \\
&= 32^\circ + 33,69\dots^\circ \\
&= 65,69\dots^\circ \approx 66^\circ
\end{aligned}$$

Vastaus $\alpha = 66^\circ, \beta = 34^\circ$

101



Männyn varjon pituus on $11x + 6x = 17x$, jossa x on Juuson kengän pituus 28 cm eli 0,28 m.

a) Suorakulmaisten kolmioiden avulla saadaan yhtälöt

$$\tan \alpha = \frac{1,43}{6x} \text{ ja toisaalta } \tan \alpha = \frac{h}{17x}.$$

Merkitään oikeat puolet yhtä suuriksi ja ratkaistaan saatu yhtälö.

$$\frac{h}{17x} = \frac{1,43}{6x}$$

$$h = \frac{17\cancel{x} \cdot 1,43}{6\cancel{x}}$$

$$= \frac{17 \cdot 1,43}{6}$$

$$= 4,0516... \approx 4,1 \text{ (m)}$$

b) Pienemmän suorakulmaisen komion avulla saadaan yhtälö

$$\tan \alpha = \frac{1,43 \cancel{\text{ m}}}{6 \cdot 0,28 \cancel{\text{ m}}}$$

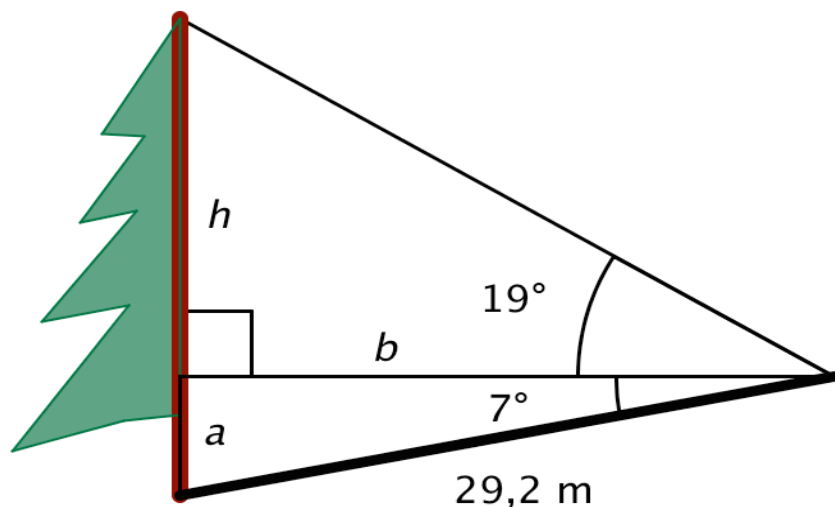
$$\alpha = \tan^{-1} \frac{1,43}{6 \cdot 0,28}$$

$$= 40,404...^{\circ} \approx 40^{\circ}$$

c) b-kohdan perusteella aurinko on 40° horisontin yläpuolella.

Vastaus a) 4,1 m b) 40° c) 40°

102



Käytetään kuvan merkintöjä. Lasketaan ensin alemman suorakulmaisen kolmion avulla kateetit a ja b .

Tämän jälkeen lasketaan ylemmän suorakulmaisen kolmion avulla 19° kulman vastaisen kateetin pituus h .

Kysytty kuusen pituus on $a + h$.

$$\sin 7^\circ = \frac{a}{29,2}$$

$$\begin{aligned} a &= 29,2 \cdot \sin 7^\circ \\ &= 3,558... \text{ (m)} \end{aligned}$$

$$\cos 7^\circ = \frac{b}{29,2}$$

$$\begin{aligned} b &= 29,2 \cdot \cos 7^\circ \\ &= 28,982... \text{ (m)} \end{aligned}$$

$$\tan 19^\circ = \frac{h}{b}$$

$$h = b \tan 19^\circ$$

$$= 28,982... \cdot \tan 19^\circ$$

$$= 9,979... \text{ (m)}$$

$$a + h = 3,558... + 9,979...$$

$$= 13,53...$$

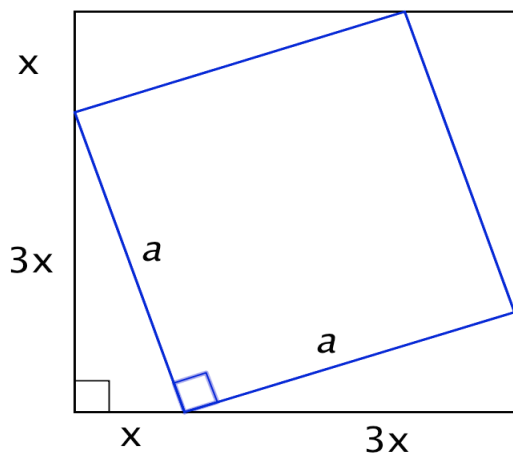
$$\approx 13,5 \text{ (m)}$$

Kuusen pituus on 13,5 m.

Vastaus 13,5 m

103

a)



Lasketaan sisemmän sinisen neliön sivun pituus Pythagoraan lauseen avulla suorakulmaisesta kolmiosta, jonka kateetit ovat x ja $3x$.

$$a^2 = x^2 + (3x)^2 = x^2 + 9x^2 = 10x^2$$

$$a = \pm\sqrt{10x^2}$$

$$= \pm\sqrt{10}|x| \quad | x > 0$$

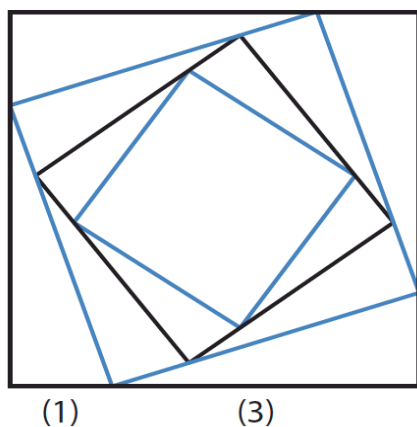
$$= \pm\sqrt{10}x$$

Neliön sivun pituus on positiivinen, joten $a = \sqrt{10}x$.

Neliöiden pinta-alojen suhde on

$$\frac{A_{\text{sisäneliö}}}{A_{\text{ulkoneliö}}} = \frac{(\sqrt{10}x)^2}{(4x)^2} = \frac{10\cancel{x^2}}{16\cancel{x^2}} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$$

b)



Sisäkkäisten neliöiden pinta-alat muodostavat geometrisen jonon $A_1, A_2, A_3, \dots$, jossa ensimmäinen termi on A_1 ja jonon suhdeluku a-kohdan mukaan $q = \frac{5}{8}$.

Yleisen termin lauseke on $A_n = A_1 \cdot q^{n-1} = A_1 \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}$.

Etsitään pienin arvo indeksille n niin, että $A_n < \frac{1}{1000} A_1$.

$$A_n < \frac{1}{1000} A_1$$

$$A_1 \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1} < \frac{1}{1000} A_1 \quad | : A_1 (> 0)$$

$$\left(\frac{5}{8}\right)^{n-1} < \frac{1}{1000} \quad | \text{ Ratkaistaan laskimella.}$$

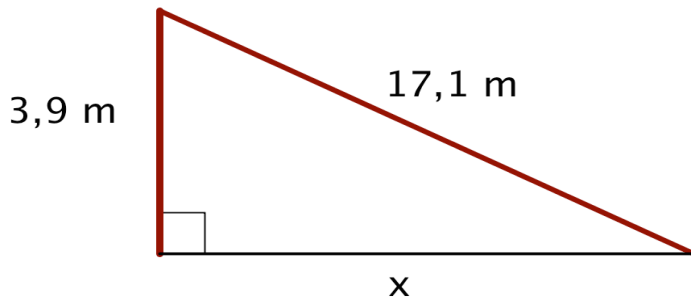
$$n > 15,6... \quad | n = 1, 2, 3, \dots$$

$$n \geq 16$$

Vastaus a) Alojen suhde on $\frac{5}{8}$. b) 16. neliö

104

Männyn taittuneen latvaosan pituus on $21 - 3,9 = 17,1$ metriä. Piirretään tilanteesta kuva.



Selvitetään vaakasuoran kateetin pituus x ja verrataan sitä oravan käpypajan 16 m pitkään etäisyyteen männyn tyvestä.

Pythagoraan lauseella saadaan

$$x^2 + 3,9^2 = 17,1^2$$

$$x^2 = 17,1^2 - 3,9^2$$

$$= 277,2$$

$$x = \pm\sqrt{277,2}$$

$$= \pm 16,64\dots$$

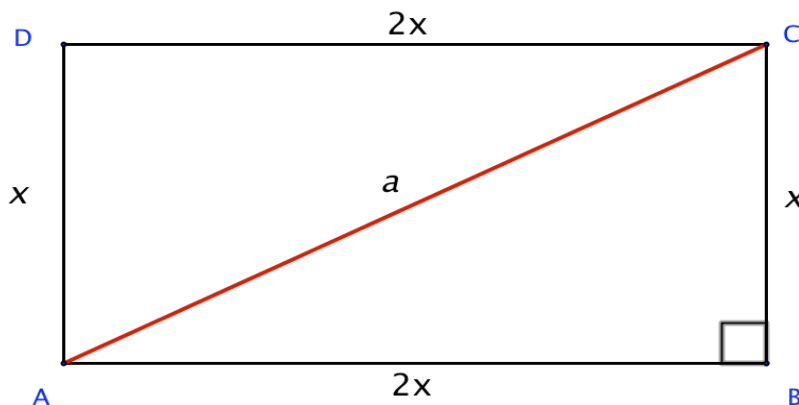
$$\approx \pm 16,6 \text{ (m)}$$

Kateetin pituus on positiivinen, joten $x = 16,6 \text{ m}$.

Koska $16,6 \text{ m} > 16 \text{ m}$, niin orava ei ole turvassa käpypajallaan.

Vastaus Ei ole turvassa.

105



Lasketaan oikotien AC pituus a sekä peltoa kiertävän reitin ABC pituus. Verrataan saatuja matkoja toisiinsa.

Pythagoraan lauseella saadaan

$$\begin{aligned} a^2 &= (2x)^2 + x^2 \\ &= 4x^2 + x^2 \\ &= 5x^2 \\ a &= \pm\sqrt{5x^2} \\ &= \pm\sqrt{5}|x| \quad | \quad x > 0 \\ &= \pm\sqrt{5}x \end{aligned}$$

Pellon lävistäjän pituus on positiivinen, joten $a = \sqrt{5}x$.

Peltoa kiertävän reitin ABC pituus on $2x + x = 3x$.

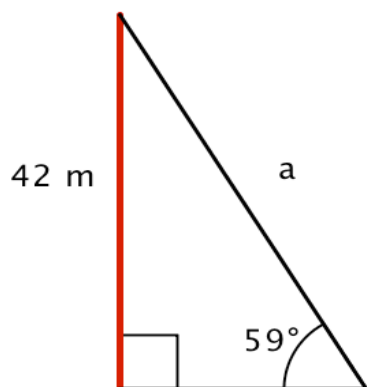
Verrataan oikoreitin pituutta peltoa kiertävän reitin pituuteen:

$$\frac{\sqrt{5}x}{3x} = \frac{\sqrt{5}}{3} = 0,74535... = 74,535...\%$$

Oikotie on $100\% - 74,535...\% = 25,464...\% \approx 25,5\%$ lyhyempi.

Vastaus Oikotie on 25,5 % lyhyempi.

106



Merkitään yhden vaijerin pituutta kirjaimella a .

Muodostetaan yhtälö sinin avulla.

$$\sin 59^\circ = \frac{42}{a}$$

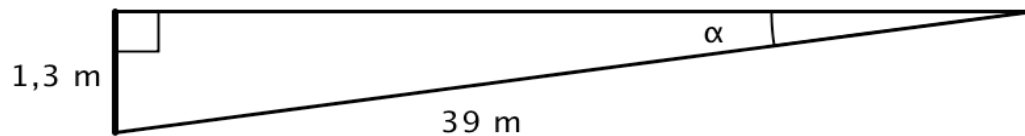
$$a \sin 59^\circ = 42$$

$$a = \frac{42}{\sin 59^\circ}$$

$$\text{Vaijeria tarvitaan } 3a = 3 \cdot \frac{42}{\sin 59^\circ} = 146,99... \approx 150 \text{ (m).}$$

Vastaus 150 metriä

107



Merkitään kysyttyä kulmaa kirjaimella α .

Muodostetaan yhtälö sinin avulla.

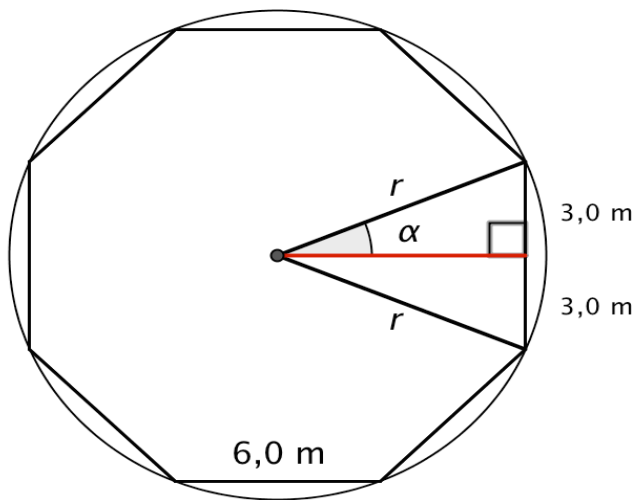
$$\sin \alpha = \frac{1,3}{39}$$

$$\alpha = \sin^{-1} \frac{1,3}{39}$$

$$\alpha = 1,91...^{\circ} \approx 1,9^{\circ}$$

Vastaus $1,9^{\circ}$

108



Säännöllinen 8-kulmio voidaan jakaa 8 samanlaiseen tasakylkiseen kolmioon. Jaetaan tällainen tasakylkinen kolmio korkeusjanalla kahdeksi suorakulmaiseksi kolmioksi kuvan mukaisesti.

Suorakulmaisen kolmion terävä kulma on $\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{360^\circ}{8} = 22,5^\circ$.

Muodostetaan yhtälö sinin avulla.

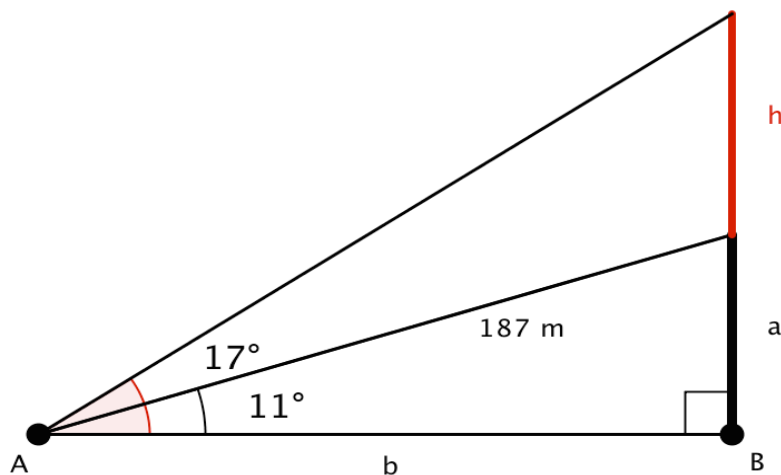
$$\sin 22,5^\circ = \frac{3,0}{r}$$

$$r \sin 22,5^\circ = 3,0$$

$$\begin{aligned} r &= \frac{3,0}{\sin 22,5^\circ} \\ &= 7,83... \approx 7,8 \text{ (m)} \end{aligned}$$

Vastaus 7,8 metriä

109



Merkitään suon pinnasta mitattua mäen korkeutta kirjaimella a ja tornin korkeutta kirjaimella h .

- a) Muodostetaan mäen korkeuden a laskemiseksi yhtälö sinin avulla.

$$\sin 11^\circ = \frac{a}{187}$$

$$a = 187 \sin 11^\circ$$

$$= 35,68\dots$$

$$\approx 36 \text{ (m)}$$

- b) Tornin korkeuden h laskemiseksi selvitetään ensin kosinin avulla tarkastelupisteen A vaakasuora etäisyys b tornin jatkeella olevasta pisteestä B .

Lasketaan sen jälkeen tangentin avulla tornin ja mäen yhteinen korkeus $a + h$, josta selvitetään kysytty h .

$$\cos 11^\circ = \frac{b}{187}$$

$$b = 187 \cos 11^\circ$$

$$\tan 17^\circ = \frac{a + h}{b}$$

$$b \tan 17^\circ = a + h$$

$$h = b \tan 17^\circ - a$$

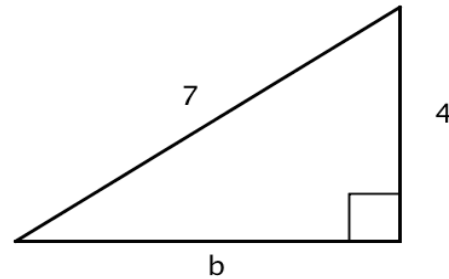
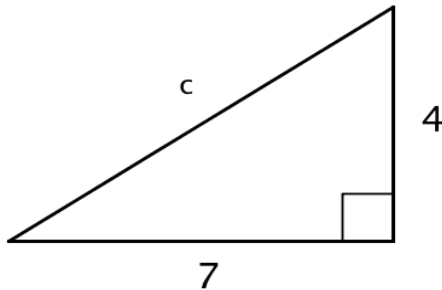
$$= 187 \cos 11^\circ \cdot \tan 17^\circ - 187 \sin 11^\circ$$

$$= 20,43\dots$$

$$\approx 20 \text{ (m)}$$

Vastaus a) 36 m b) 20 m

110



Kun suorakulmaisesta kolmiosta tunnetaan kaksi sivua, niin kolmannen sivun pituus voidaan laskea Pythagoraan lauseen avulla. Annettu pidempi sivun pituus 7 voi olla joko kateetti tai hypotenuusa. Käsitellään nämä tapaukset erikseen.

- 1) Selvitetään hypotenuusan pituus c , kun kateetit ovat 4 ja 7.

$$\begin{aligned} c^2 &= 7^2 + 4^2 \\ &= 49 + 16 \\ &= 65 \\ c &= \pm\sqrt{65} \end{aligned}$$

Pituus on positiivinen, joten hypotenuusan pituus on $\sqrt{65}$.

- 2) Selvitetään kateetin pituus b , kun toisen kateetin pituus on 4 ja hypotenuusan pituus 7.

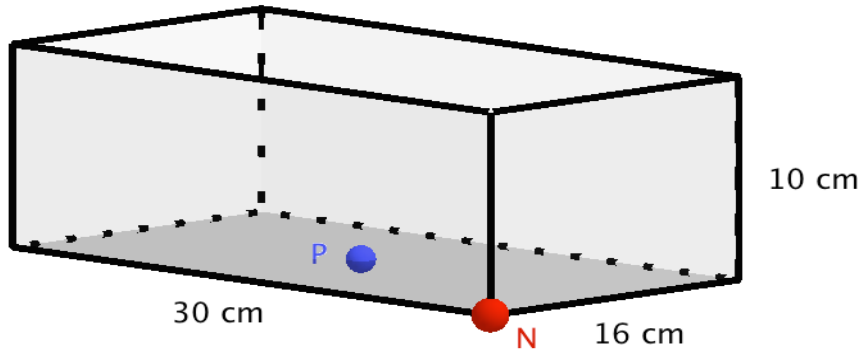
$$\begin{aligned} 7^2 &= b^2 + 4^2 \\ b^2 &= 7^2 - 4^2 \\ &= 49 - 16 \\ &= 33 \\ b &= \pm\sqrt{33} \end{aligned}$$

Pituus on positiivinen, joten kateetin pituus on $\sqrt{33}$.

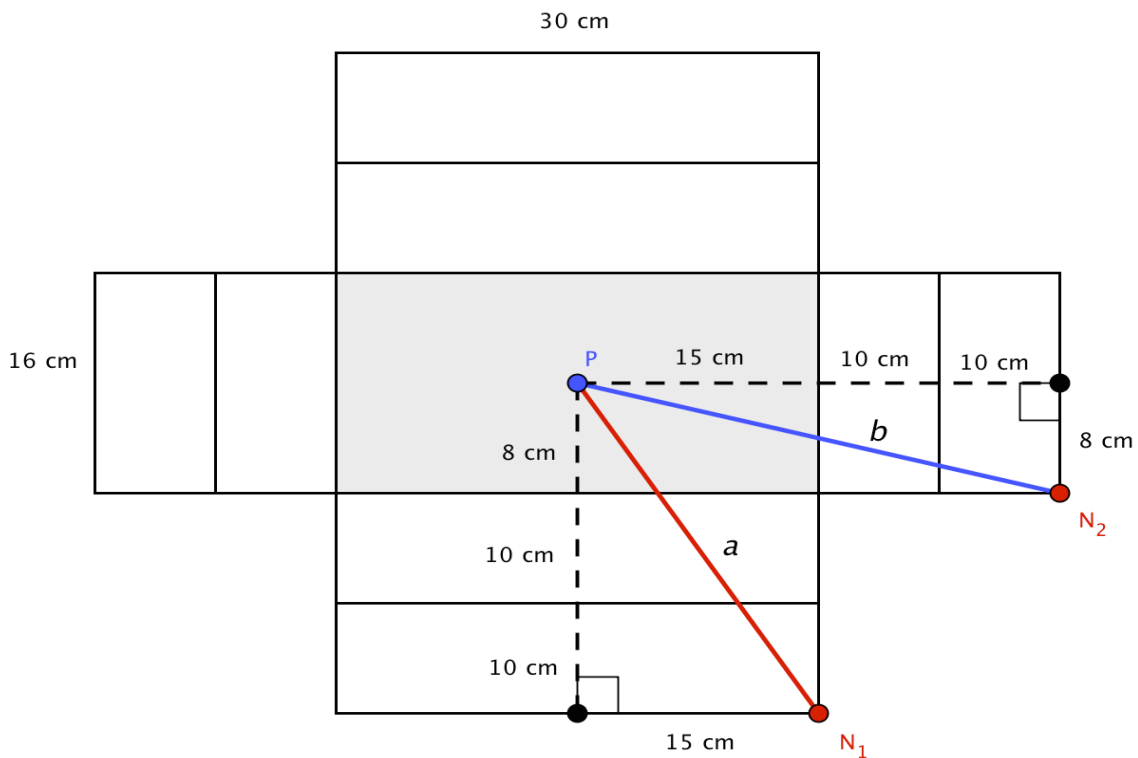
Kolmion kolmannen sivun pituus on $\sqrt{33}$ tai $\sqrt{65}$.

Vastaus $\sqrt{33}$ tai $\sqrt{65}$

111



Lyhimmän reitin määrittäminen kolmiulotteisen laatikon pinnalla on hankalaa. Piirretään laatikko tasokuviona niin, että reunojen sisä- ja ulkopinnat näkyvät erikseen.



Lyhin reitti on joko punainen PN_1 tai sininen PN_2 .
Lasketaan niiden pituudet ja valitaan lyhyempi.

***PN₁*:**

$$a^2 = 28^2 + 15^2$$

$$= 1009$$

$$a = (\pm)\sqrt{1009}$$

$$= 31,7\dots$$

***PN₂*:**

$$b^2 = 35^2 + 8^2$$

$$= 1289$$

$$a = (\pm)\sqrt{1289}$$

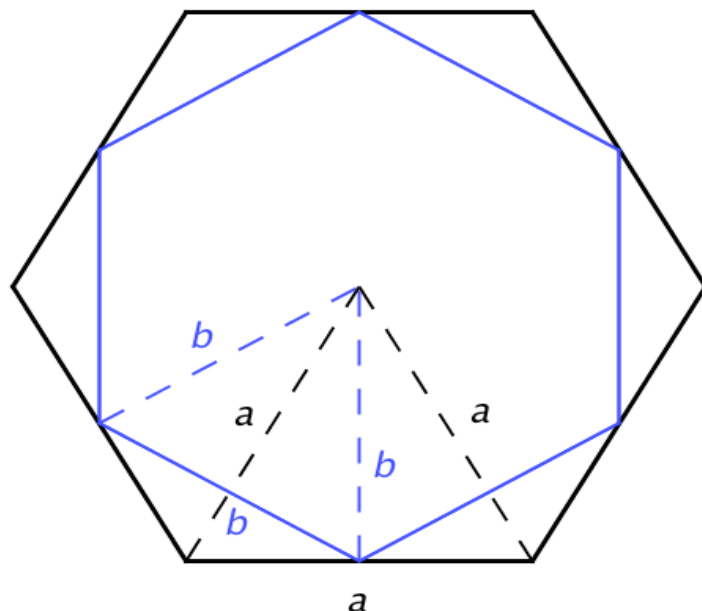
$$= 35,9\dots$$

Lyhin reitti on punaisella piirretty PN_1 ja sen pituus on $31,7\dots \approx 32$ cm.

Vastaus 32 cm

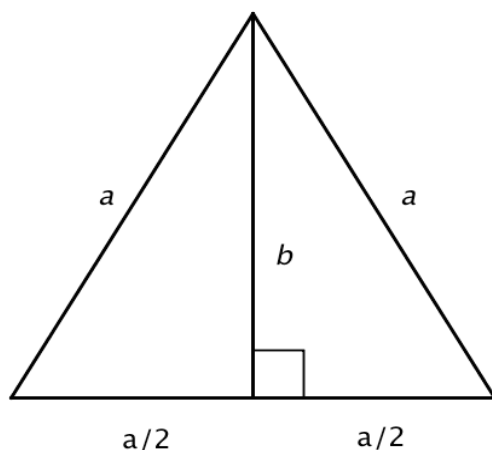
112

a)



Säännöllinen kuusikulmio voidaan jakaa kuuteen yhtenevään tasasivuiseen kolmioon.

Merkitään alkuperäisen kuusikulmion sivua kirjaimella a ja sen sisään piirretyn kuusikulmion sivua kirjaimella b .



Sisemmän kuusikulmion sivun pituus on sama kuin ulommasta kuusikulmiosta erotetun tasasivuisen kolmion korkeus.

Muodostetaan Pythagoraan lauseen avulla yhtälö.

$$a^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$a^2 = b^2 + \frac{a^2}{4}$$

$$b^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$= \frac{3}{4}a^2$$

$$b = (\pm)\sqrt{\frac{3}{4}a^2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}|a| \quad | a > 0$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

Kuusikulmioiden mittakaava $k = \frac{b}{a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

Pinta-alojen suhde on $\frac{A_{\text{ulompi}}}{A_{\text{sisempi}}} = k^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$

- b) Merkitään ensimmäisen kuusikulmion pinta-alaa kirjaimella A_1 ja seuraavien kuusikulmioiden pinta-aloja $A_2, A_3, \dots$. Pinta-alat muodostavat geometrisen jonon, jossa peräkkäisten termien suhdeluku on a-kohdan perusteella $q = \frac{3}{4}$.

Jonon n :nnen termin lauseke on $A_n = A_1 \cdot q^{n-1} = A_1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$.

Muodostetaan epäyhtälö.

$$A_n < \frac{A_1}{1\,000\,000}$$

$$A_1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} < \frac{A_1}{10^6} \quad | : A_1 (> 0)$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} < \frac{1}{10^6} \quad | \text{ Ratkaistaan laskimella}$$

$$n > 49,02... \quad | n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

$$n \geq 50$$

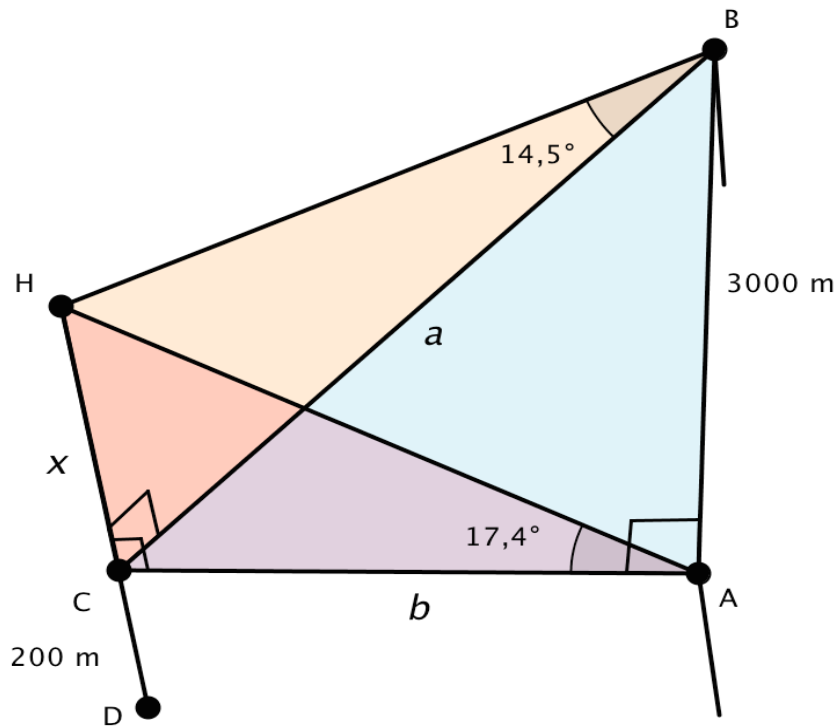
Ensimmäinen kuusikulmio, jonka ala on pienempi kuin miljoonasosa alkuperäisen kuusikulmion alasta on A_{50} .

Vastaus a) Mittakaava on $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ja pinta-alojen suhde $\frac{3}{4}$.

b) 50. Kuusikulmio

Huomaa: Epäyhtälön voi ratkaista myös kokeilemalla, kun perustelee ensin, että kuusikulmion A_n ala pienenee, kun n kasvaa.

113



Tavoitteena on laskea ensin vuoren huipun etäisyys x havaintopisteiden kautta kulkevasta vaakasuorasta tasosta. Tämän jälkeen saadaan kysytty vuoren korkeus merenpinnasta D lisäämällä laskettuun arvoon 200 metriä.

Muodostetaan yhtälöt kuvan kolmen suorakulmaisen kolmion avulla.

1) Kolmio ACH : $\tan 17,4^\circ = \frac{x}{b}$

2) Kolmio BCH : $\tan 14,5^\circ = \frac{x}{a}$

3) Kolmio ABC : $a^2 = b^2 + 3000^2$

Huomataan, että saatiin kolme yhtälöä, joissa on yhteensä kolme tuntematonta muuttujaa. Tarkoituksena on ratkaista muuttuja x .

Ratkaistaan ensin a ja b yhtälöistä 1 ja 2. Sijoitetaan ne sen jälkeen yhtälöön 3 ja ratkaistaan x .

$$1) \tan 17,4^\circ = \frac{x}{b} \quad \text{eli} \quad b = \frac{x}{\tan 17,4^\circ}$$

$$2) \tan 14,5^\circ = \frac{x}{a} \quad \text{eli} \quad a = \frac{x}{\tan 14,5^\circ}$$

$$3) \quad a^2 = b^2 + 3000^2$$

$$\left(\frac{x}{\tan 14,5^\circ} \right)^2 = \left(\frac{x}{\tan 17,4^\circ} \right)^2 + 3000^2 \quad \left| \text{Ratkaistaan laskimella.} \right.$$

$$x = -1373,7... \text{ tai } x = 1373,7...$$

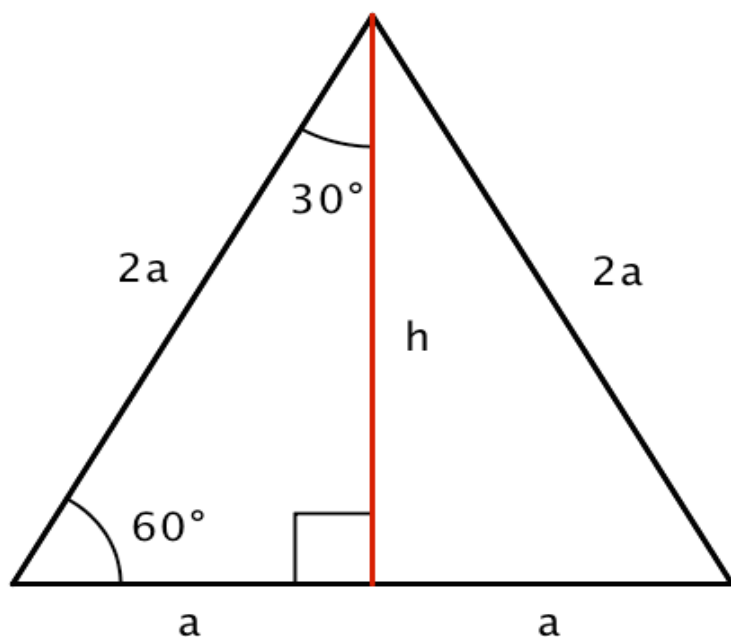
Etäisyys x on positiivinen, joten $x = 1373,7... \text{ m}$.

Vuoren korkeus merenpinnasta on

$$x + 200 \text{ m} = 1373,7... \text{ m} + 200 \text{ m} = 1573,7... \text{ m} \approx 1570 \text{ m}.$$

Vastaus 1570 m

114



Merkitään tasasivuisen kolmion sivujen pituuksia $2a$:lla.

Tasasivuisen kolmion kaikki kulmat ovat 60° .

Jaetaan tasasivuinen kolmio korkeusjanan avulla kahdeksi suorakulmaiseksi kolmioksi, joilloin niissä molemmissa on 60° ja 30° kulmat. Tasasivuisen kolmion korkeus h voidaan laskea Pythagoraan lauseella suorakulmaisesta kolmiosta.

$$(2a)^2 = a^2 + h^2$$

$$h^2 = 4a^2 - a^2$$

$$= 3a^2$$

$$h = (\pm)\sqrt{3a^2}$$

$$= \sqrt{3}|a| \quad | a > 0$$

$$= \sqrt{3}a$$

Määritetään kysytyt sinin, kosinin ja tangentin arvot tunnetun suorakulmaisen kolmion avulla.

$$\mathbf{a)} \quad \sin 30^\circ = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{h}{2a} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{a}{h} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

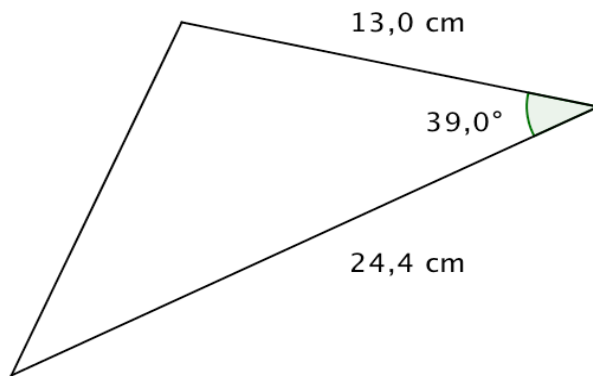
$$\mathbf{b)} \quad \sin 60^\circ = \frac{h}{2a} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{h}{a} = \frac{\sqrt{3}a}{a} = \sqrt{3}$$

Vastaus	$\mathbf{a)} \quad \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$	$\mathbf{b)} \quad \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$
	$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$
	$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$	$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$

115



Kolmion pinta-ala on

$$A = \frac{1}{2} ab \sin \gamma \quad \left| \begin{array}{l} a = 13,0 \\ b = 24,4 \\ \gamma = 39,0^\circ \end{array} \right.$$

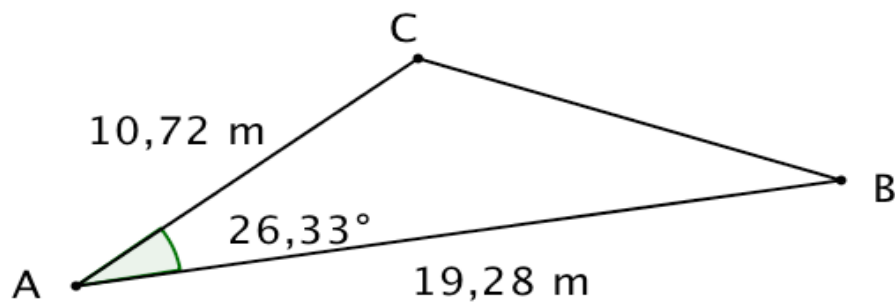
$$= \frac{1}{2} \cdot 13,0 \cdot 24,4 \cdot \sin 39,0^\circ$$

$$= 99,81\dots$$

$$\approx 99,8 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Vastaus $99,8 \text{ cm}^2$

116



Kolmion pinta-ala on

$$A = \frac{1}{2} ab \sin \gamma \quad \left| \begin{array}{l} a = 19,28 \\ b = 10,72 \\ \gamma = 26,33^\circ \end{array} \right.$$

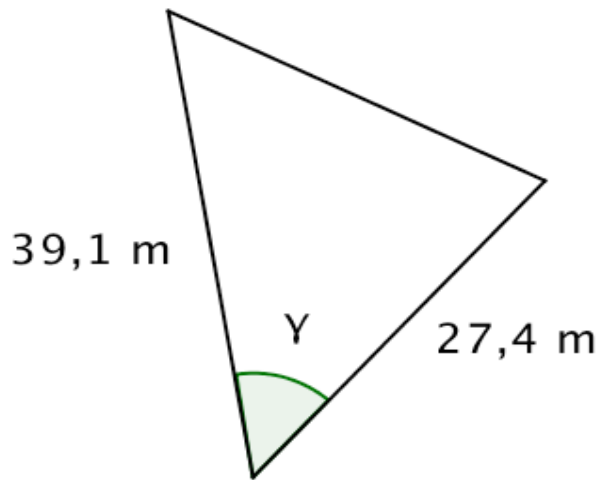
$$= \frac{1}{2} \cdot 19,28 \cdot 10,72 \cdot \sin 26,33^\circ$$

$$= 45,8358\dots$$

$$\approx 45,84 \text{ (m}^2\text{)}$$

Vastaus 45,84 m²

117



Kolmion pinta-ala on 346 m^2 . Muodostetaan yhtälö.

$$A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma \quad \left| \begin{array}{l} a = 27,4 \text{ m} \\ b = 39,1 \text{ m} \\ A = 346 \text{ m}^2 \end{array} \right.$$

$$346 = \frac{1}{2} \cdot 27,4 \cdot 39,1 \cdot \sin\gamma$$

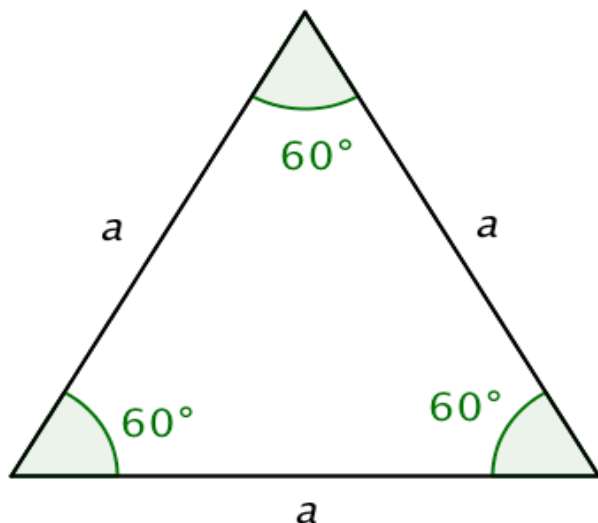
$$\sin\gamma = \frac{2 \cdot 346}{27,4 \cdot 39,1} = 0,645\dots$$

$$\gamma = \sin^{-1} 0,645\dots = 40,23\dots^\circ \approx 40,2^\circ$$

Koska $\sin(180^\circ - \gamma) = \sin\gamma$, niin kulmaksi kelpaa myös

$$\gamma = 180^\circ - 40,23\dots^\circ = 139,76\dots^\circ \approx 139,8^\circ.$$

Vastaus $40,2^\circ$ tai $139,8^\circ$

118

Tasakylkisen kolmion kaikki kulmat ovat 60° . Merkitään kolmion sivujen pituutta kirjaimella a . Muodostetaan yhtälö.

$$A = \frac{1}{2} a \cdot a \sin 60^\circ$$

$$60 = \frac{1}{2} a^2 \sin 60^\circ$$

$$120 = a^2 \sin 60^\circ$$

$$a^2 = \frac{120}{\sin 60^\circ}$$

$$a = \pm \sqrt{\frac{120}{\sin 60^\circ}} = \pm 11,771... \approx \pm 11,8$$

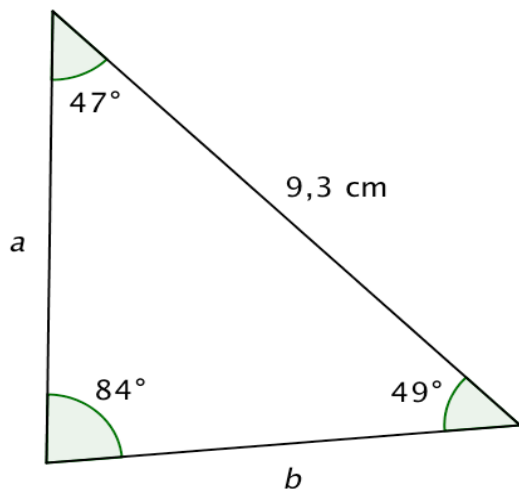
Sivun pituus on positiivinen, joten $a = 11,8$.

Vastaus 11,8

119

Kolmion kolmas kulma on $180^\circ - 84^\circ - 49^\circ = 47^\circ$.

Pisin sivu on suurimman 84° kulman vastainen sivu.



Muodostetaan yhtälöt sivujen a ja b pituuksien selvittämiseksi sinilauseen avulla.

$$\frac{a}{\sin 49^\circ} = \frac{9,3}{\sin 84^\circ}$$

$$a = \frac{9,3}{\sin 84^\circ} \cdot \sin 49^\circ = 7,057... \approx 7,1 \text{ (cm)}$$

$$\frac{b}{\sin 47^\circ} = \frac{9,3}{\sin 84^\circ}$$

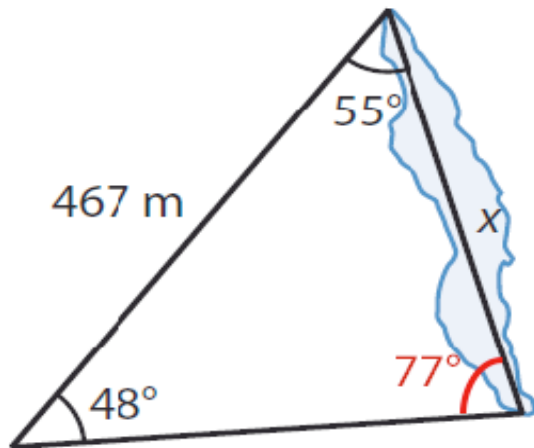
$$b = \frac{9,3}{\sin 84^\circ} \cdot \sin 47^\circ = 6,839... \approx 6,8 \text{ (cm)}$$

Sivujen pituudet ovat 6,8 cm ja 7,1 cm.

Vastaus 6,8 cm ja 7,1 cm

120

Kolmion kolmas kulma on $180^\circ - 48^\circ - 55^\circ = 77^\circ$.



Muodostetaan yhtälö lammen pituuden x selvittämiseksi sinilauseen avulla.

$$\frac{x}{\sin 48^\circ} = \frac{467}{\sin 77^\circ}$$

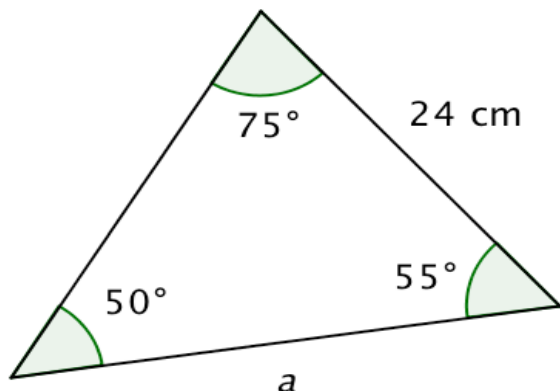
$$x = \frac{467}{\sin 77^\circ} \cdot \sin 48^\circ = 356,17... \approx 356 \text{ (m)}$$

Lammen pituus on $x = 356 \text{ m}$.

Vastaus $x = 356 \text{ m}$

121

Kolmion kolmas kulma on $180^\circ - 75^\circ - 55^\circ = 50^\circ$.



Muodostetaan yhtälö sivun a pituuden selvittämiseksi sinilauseen avulla.

$$\frac{a}{\sin 75^\circ} = \frac{24}{\sin 50^\circ}$$

$$a = \frac{24}{\sin 50^\circ} \cdot \sin 75^\circ = 30,26... \text{ (cm)}$$

Kolmion pinta-ala on

$$A = \frac{1}{2} ab \sin \gamma \quad \left| \begin{array}{l} a = 30,26... \text{ cm} \\ b = 24 \text{ cm} \\ \gamma = 55^\circ \end{array} \right.$$

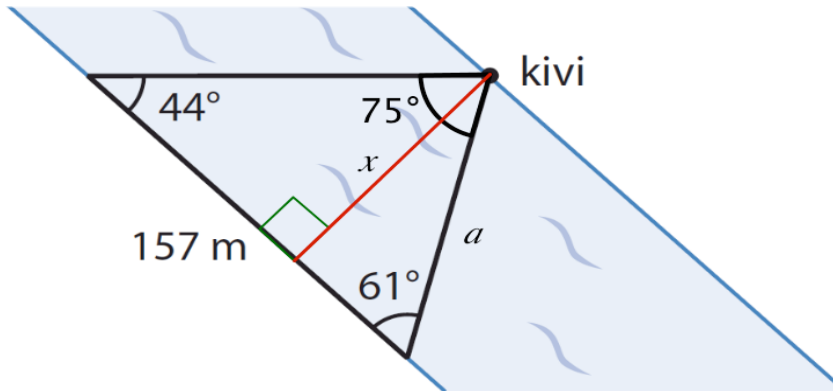
$$= \frac{1}{2} \cdot 30,26... \cdot 24 \cdot \sin 55^\circ$$

$$= 297,47... \approx 297 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Vastaus 297 cm^2

122

Täydennetään kuvaan kysytty joen leveys x ja kolmas kulma $180^\circ - 44^\circ - 61^\circ = 75^\circ$.



Lasketaan ensin suorakulmaisen kolmion kateetti a alkuperäisestä kolmiosta sinilauseen avulla.

$$\frac{a}{\sin 44^\circ} = \frac{157}{\sin 75^\circ}$$

$$a = \frac{157}{\sin 75^\circ} \cdot \sin 44^\circ = 112,908... \text{ (cm)}$$

Joen leveys saadaan suorakulmaisen kolmion avulla.

$$\sin 61^\circ = \frac{x}{a}$$

$$x = a \sin 61^\circ$$

$$= 112,908... \cdot \sin 61^\circ$$

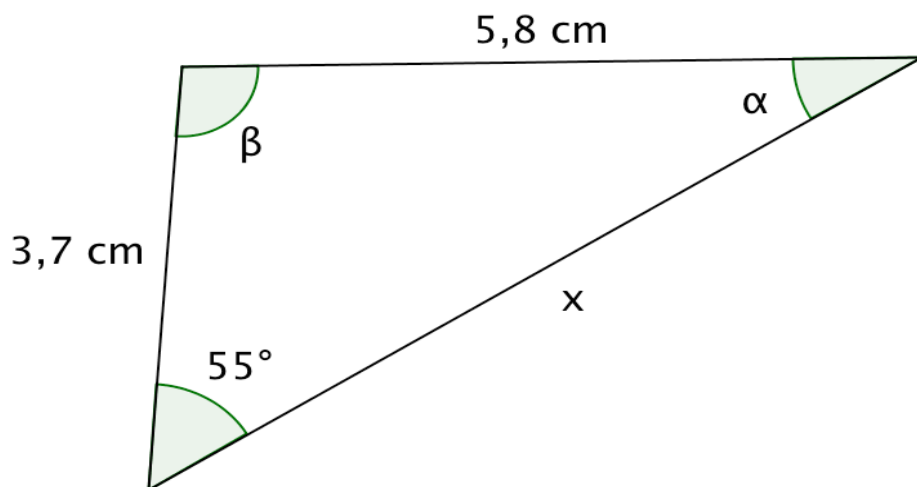
$$= 98,752...$$

$$\approx 99 \text{ (m)}$$

Vastaus 99 m

123

Piirretään tilanteesta kuva.



Selvitetään ensin kulma α sinilauseen avulla.

$$\frac{3,7}{\sin \alpha} = \frac{5,8}{\sin 55^\circ}$$

$$5,8 \sin \alpha = 3,7 \sin 55^\circ$$

$$\sin \alpha = \frac{3,7 \sin 55^\circ}{5,8} = 0,522\dots$$

$$\alpha = \sin^{-1} 0,522\dots = 31,504\dots^\circ \approx 32^\circ$$

Koska $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, niin ratkaisuksi saadaan myös

$$\alpha = 180^\circ - 31,504\dots^\circ = 148,49\dots^\circ \approx 148^\circ.$$

Kulma β saadaan kolmion kulmien summan avulla.

- Kun $\alpha = 32^\circ$, niin

$$\beta = 180^\circ - 55^\circ - 31,504\dots^\circ = 93,495\dots^\circ \approx 93^\circ$$

Kelpaa kolmion kulmaksi, joten $\alpha = 32^\circ$ ja $\beta = 93^\circ$.

- Kun $\alpha = 148^\circ$, niin

$\beta = 180^\circ - 55^\circ - 148,49\dots^\circ = -23,49\dots^\circ$ Ei kelpaa kolmion kulmaksi, joten myöskään arvo $\alpha = 148^\circ$ ei ole mahdollinen.

Sivun pituus x saadaan sinilauseen avulla.

$$\frac{x}{\sin \beta} = \frac{5,8}{\sin 55^\circ}$$

$$x = \frac{5,8 \sin \beta}{\sin 55^\circ}$$

$$= \frac{5,8 \sin 93,495\dots^\circ}{\sin 55^\circ}$$

$$= 7,067\dots \approx 7,1 \text{ (cm)}$$

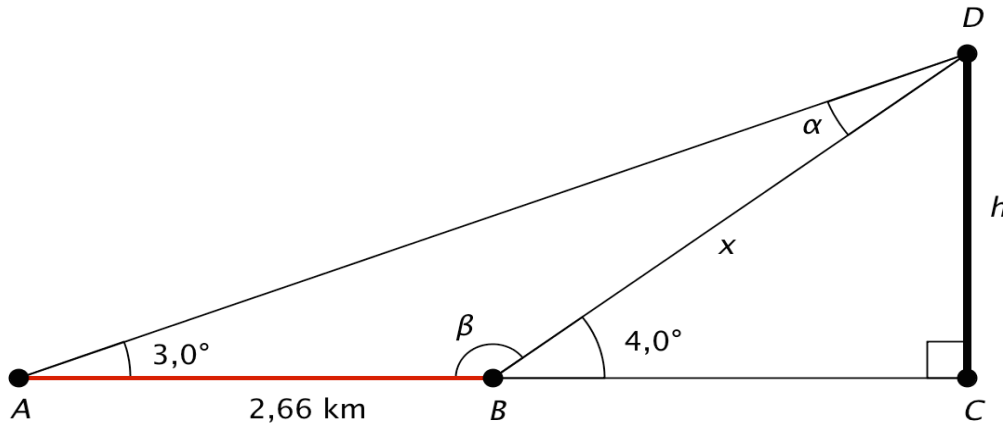
Muut kulmat ovat 32° ja 93° sekä kolmas sivu 7,1 cm.

Vastaus

Kulmat 32° ja 93° sekä sivu 7,1 cm

124

Piirretään tilanteesta kuva.



Kilpisjärven pinnan tasossa oleva piste C on 473 metrin korkeudella merenpinnasta. Selvitetään ensin huipun korkeus h järven pinnasta mitattuna. Saanan huipun korkeus merenpinnasta on $h + 473$ m.

Selvitetään suorakulmaisen kolmion BCD hypotenuusan pituus x sinilauseen avulla kolmiosta ABD .

Kulma $\beta = 180^\circ - 4,0^\circ = 176,0^\circ$ ja

kulma $\alpha = 180^\circ - 3,0^\circ - 176,0^\circ = 1,0^\circ$.

$$\frac{x}{\sin 3,0^\circ} = \frac{2,66}{\sin \alpha}$$

$$x = \frac{2,66 \cdot \sin 3,0^\circ}{\sin \alpha} \quad \left| \alpha = 1,0^\circ \right.$$

$$= \frac{2,66 \cdot \sin 3,0^\circ}{\sin 1,0^\circ}$$

$$= 7,976... \text{ (km)}$$

Suorakulmaisesta kolmiosta BCD saadaan

$$\sin 4,0^\circ = \frac{h}{x}$$

$$h = x \cdot \sin 4,0^\circ$$

$$= 7,976... \cdot \sin 4,0^\circ$$

$$= 0,5564... \text{ (km)}$$

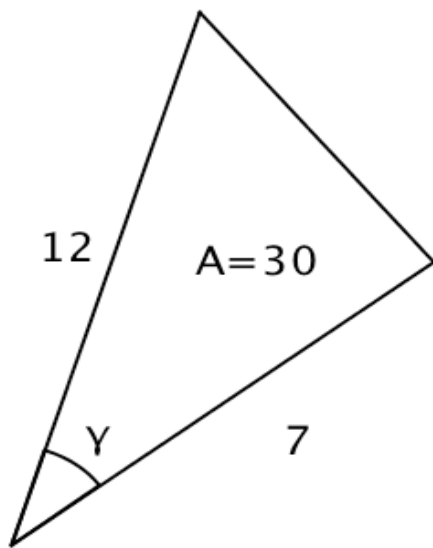
$$h = 0,5564... \text{ km} = 556,4... \text{ m}$$

Lasketaan Saanan huipun etäisyys merenpinnan tasosta.

$$h + 473 \text{ m} = 556,4... \text{ m} + 473 \text{ m} = 1029,4... \text{ m} \approx 1030 \text{ m}$$

Vastaus 1030 m

125



Muodostetaan yhtälö.

$$A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$$

$$30 = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 7 \cdot \sin\gamma$$

$$\sin\gamma = \frac{2 \cdot 30}{12 \cdot 7} = 0,714\dots$$

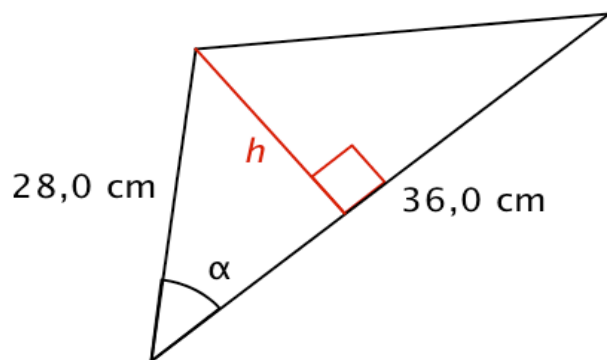
$$\gamma = \sin^{-1} 0,714\dots = 45,58\dots^\circ \approx 45,6^\circ$$

Koska $\sin(180^\circ - \gamma) = \sin\gamma$, niin kulmaksi kelpaa myös

$$180^\circ - 45,58\dots^\circ = 134,41\dots^\circ \approx 134,4^\circ$$

Vastaus $45,6^\circ$ tai $134,4^\circ$

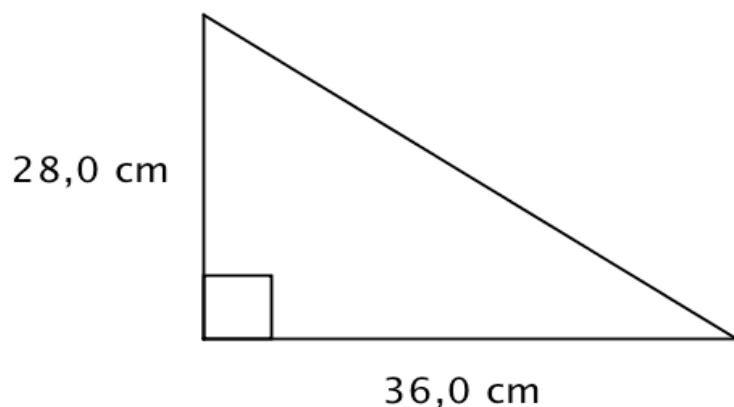
126



Valitaan kolmion kannaksi $36,0 \text{ cm}$ pituinen sivu.

Kolmion pinta-ala on mahdollisimman suuri, kun kolmion korkeus h on mahdollisimman suuri.

Kolmion korkeuden suurin mahdollinen arvo on $h = 28,0 \text{ cm}$, kun kulma $\gamma = 90^\circ$.

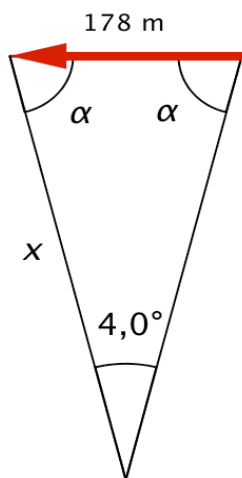


Kolmion pinta-alan suurin mahdollinen arvo on

$$A = \frac{28,0 \cdot 36,0}{2} = 504 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Vastaus 504 cm^2

127



Tilanteessa muodostuu tasakylkinen kolmio, jonka kantakulma on

$$\alpha = \frac{180^\circ - 4,0^\circ}{2} = 88^\circ$$

Ratkaistaan kysytty etäisyys x sinilauseella.

$$\frac{x}{\sin \alpha} = \frac{178}{\sin 4,0^\circ}$$

$$x = \frac{178}{\sin 4,0^\circ} \cdot \sin \alpha \quad \left| \alpha = 88^\circ \right.$$

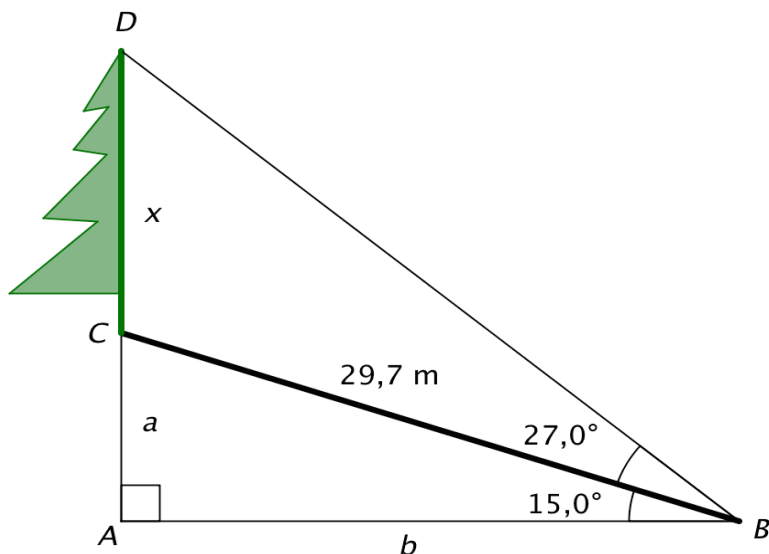
$$= \frac{178}{\sin 4,0^\circ} \cdot \sin 88^\circ$$

$$= 2550,18... \approx 2550 \text{ (m)}$$

Laivan keula on 2550 metrin etäisyydellä veneilijästä.

Vastaus 2550 m

128



Lasketaan ensin suorakulmaisen kolmion ABC avulla kateettien pituudet a ja b . Sen jälkeen suorakulmaisen kolmion ABD avulla voidaan laskea kateetin AD pituus.

Kuusen pituus on $|AD| - a$.

$$\sin 15,0^\circ = \frac{a}{29,7}$$

$$a = 29,7 \cdot \sin 15,0^\circ = 7,686... \text{ (m)}$$

$$\cos 15,0^\circ = \frac{b}{29,7}$$

$$b = 29,7 \cdot \cos 15,0^\circ = 28,687... \text{ (m)}$$

$$\tan(15,0^\circ + 27,0^\circ) = \frac{|AD|}{b}$$

$$|AD| = b \cdot \tan(15,0^\circ + 27,0^\circ)$$

$$= b \cdot \tan 42,0^\circ$$

$$= 28,687... \cdot \tan 42,0^\circ$$

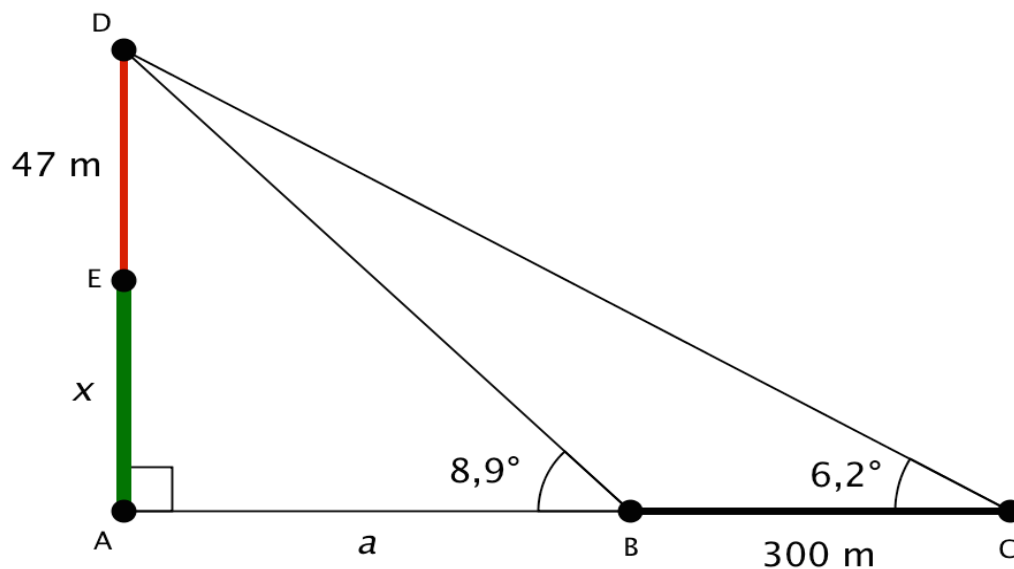
$$= 25,830... \text{ (m)}$$

$$x = |AD| - a = 25,830... - 7,686... = 18,14... \approx 18,1 \text{ (m)}$$

Kuusen pituus on 18,1 metriä.

Vastaus 18,1 m

129



Kuvan merkinnöillä kysytty mäen korkeus on x . Muodostetaan yhtälöpari suorakulmaisten kolmioiden ABD ja ACD avulla.

$$\begin{cases} \tan 8,9^\circ = \frac{x + 47}{a} \\ \tan 6,2^\circ = \frac{x + 47}{a + 300} \end{cases}$$

Ratkaistaan laskimella.

$$\begin{cases} x = 59,40... \text{ (m)} \\ a = 679,51... \text{ (m)} \end{cases}$$

Kysytty mäen korkeus on $59,40... \text{ m} \approx 59 \text{ m}$

Vastaus 59 m

Huomaa:

Yhtälöparin voi ratkaista myös ilman laskimen solve-toimintoa esimerkiksi seuraavasti:

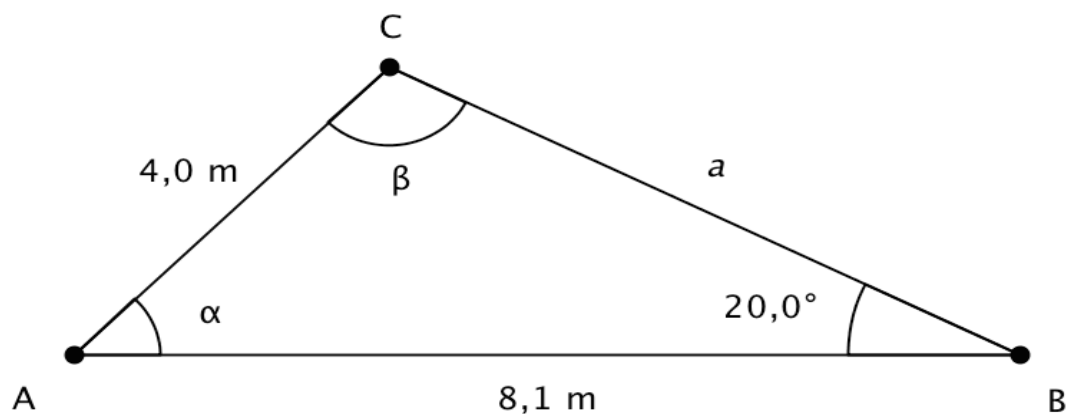
$$\begin{cases} \tan 8,9^\circ = \frac{x+47}{a} \\ \tan 6,2^\circ = \frac{x+47}{a+300} \end{cases}$$
$$\begin{cases} a \tan 8,9^\circ = x+47 & \cdot 1 \\ \tan 6,2^\circ(a+300) = x+47 & \cdot (-1) \end{cases}$$
$$+ \begin{cases} a \tan 8,9^\circ & = x+47 \\ -a \tan 6,2^\circ - 300 \tan 6,2^\circ = -x-47 \end{cases}$$

$$a \tan 8,9^\circ - a \tan 6,2^\circ - 300 \tan 6,2^\circ = 0$$

$$a = \frac{300 \tan 6,2^\circ}{\tan 8,9^\circ - \tan 6,2^\circ} = 679,51... \text{ (m)}$$

$$x = a \tan 8,9^\circ - 47 = 679,51... \cdot \tan 8,9^\circ - 47 = 59,40... \text{ (m)}$$

130



Määritetään kulma β sinilauseen avulla.

$$\frac{4,0}{\sin 20,0^\circ} = \frac{8,1}{\sin \beta}$$

$$4,0 \cdot \sin \beta = 8,1 \cdot \sin 20,0^\circ$$

$$\sin \beta = \frac{8,1 \cdot \sin 20,0^\circ}{4,0} = 0,692\dots$$

$$\beta = \sin^{-1} 0,692\dots = 43,83\dots^\circ \approx 43,8^\circ$$

Koska $\sin(180^\circ - \beta) = \sin \beta$, niin kulmaksi kelpaa myös

$$\beta = 180^\circ - 43,83\dots^\circ = 136,15\dots^\circ \approx 136,2^\circ.$$

Käsitellään erikseen tapaukset $\beta = 43,8^\circ$ ja $\beta = 136,2^\circ$.

$$1) \quad \beta = 43,8^\circ :$$

$$\alpha = 180^\circ - 20,0^\circ - 43,83\dots^\circ = 116,16\dots^\circ \approx 116,2^\circ$$

$$\frac{4,0}{\sin 20,0^\circ} = \frac{a}{\sin \alpha}$$

$$a = \frac{4,0 \cdot \sin \alpha}{\sin 20,0^\circ} \quad \left| \alpha = 116,16\dots^\circ \right.$$

$$= \frac{4,0 \cdot \sin 116,16\dots^\circ}{\sin 20,0^\circ}$$

$$= 10,49\dots \approx 10,5 \text{ (m)}$$

$$2) \quad \beta = 136,2^\circ :$$

$$\alpha = 180^\circ - 20,0^\circ - 136,15\dots^\circ = 23,83\dots^\circ \approx 23,8^\circ$$

$$\frac{4,0}{\sin 20,0^\circ} = \frac{a}{\sin \alpha}$$

$$a = \frac{4,0 \cdot \sin \alpha}{\sin 20,0^\circ} \quad \left| \alpha = 23,83\dots^\circ \right.$$

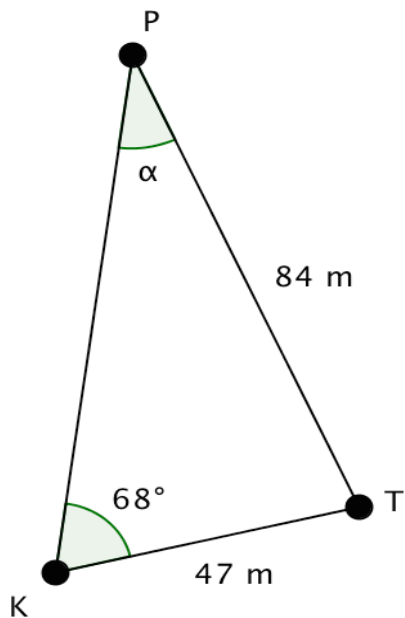
$$= \frac{4,0 \cdot \sin 23,83\dots^\circ}{\sin 20,0^\circ}$$

$$= 4,72\dots \approx 4,7 \text{ (m)}$$

Kolmion muut kulmat ovat $43,8^\circ$ ja $116,2^\circ$ ja kolmas sivu 10,5 m tai muut kulmat ovat $136,2^\circ$ ja $23,8^\circ$ ja kolmas sivu 4,7 m.

Vastaus kulmat $43,8^\circ$ ja $116,2^\circ$ ja sivu 10,5 m tai
kulmat $136,2^\circ$ ja $23,8^\circ$ ja sivu 4,7 m

131



Kysytty kulma ratkeaa sinilauseen avulla.

$$\frac{47}{\sin \alpha} = \frac{84}{\sin 68^\circ}$$

$$47 \sin 68^\circ = 84 \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{47 \sin 68^\circ}{84} = 0,518...$$

$$\alpha = \sin^{-1} 0,518... = 31,25...^\circ \approx 31^\circ$$

Koska $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, kulma voi olla myös

$$\alpha = 180^\circ - 31,25...^\circ = 148,7...^\circ \approx 148^\circ.$$

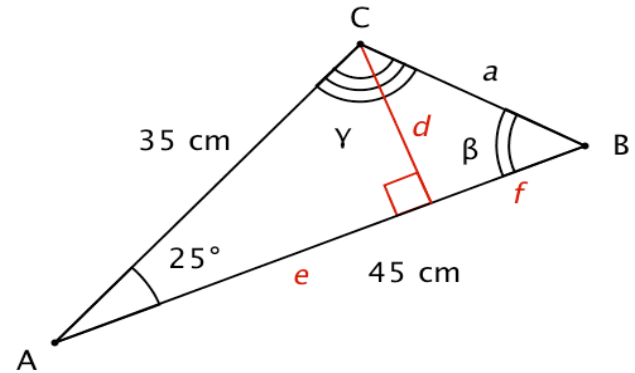
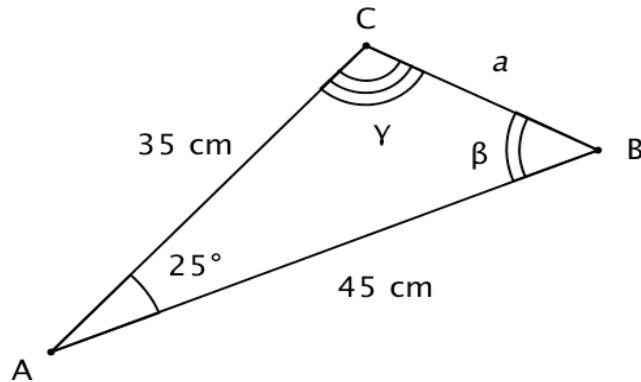
- Kun $\alpha = 148^\circ$, kolmion kolmas kulma olisi $180^\circ - 68^\circ - 148^\circ = -36^\circ$, mikä ei ole mahdollista. Siis arvo 148° ei kelpaa kolmion kulmaksi.
- Kun $\alpha = 31^\circ$, kolmion kolmas kulma olisi $180^\circ - 68^\circ - 31^\circ = 81^\circ$, mikä on mahdollista. Siis arvo 31° kelpaa kolmion kulmaksi.

Kioskin ja taksitolpan väli näkyy 31° kulmassa.

Vastaus 31°

132

Piirretään kolmion sivulle AB korkeusjana. Nimetään laskemisen apuna tarvittavat janat.



Lasketaan sivujen pituudet d , e ja f .

$$\sin 25^\circ = \frac{d}{35}$$

$$d = 35 \sin 25^\circ$$

$$\cos 25^\circ = \frac{e}{35}$$

$$e = 35 \cos 25^\circ$$

$$f = 45 - e = 45 - 35 \cos 25^\circ$$

Sivu a saadaan Pythagoraan lauseen avulla.

$$a^2 = d^2 + f^2$$

$$= (35 \sin 25^\circ)^2 + (45 - 35 \cos 25^\circ)^2$$

$$= 395,13\dots$$

- $a = (\pm)\sqrt{395,13...} = 19,87... \approx 20 \text{ (cm)}$

Kulma B saadaan sinilauseen avulla.

$$\frac{35}{\sin \beta} = \frac{a}{\sin 25^\circ}$$

$$35 \sin 25^\circ = a \sin \beta$$

$$\sin \beta = \frac{35 \sin 25^\circ}{a} \quad | \quad a = 19,87...$$

$$= \frac{35 \sin 25^\circ}{19,87...} = 0,744...$$

- $\beta = \sin^{-1} 0,744... = 48,08...^\circ \approx 48^\circ$ tai
 $\beta = 180^\circ - 48,08...^\circ = 131,91...^\circ \approx 132^\circ$

Kulma C saadaan kulmien A ja B avulla.

- Jos $\beta = 48^\circ$, niin
 $\gamma = 180^\circ - 25^\circ - 48,08...^\circ = 106,91...^\circ \approx 107^\circ$ (kelpaa)

Jos $\beta = 132^\circ$, niin

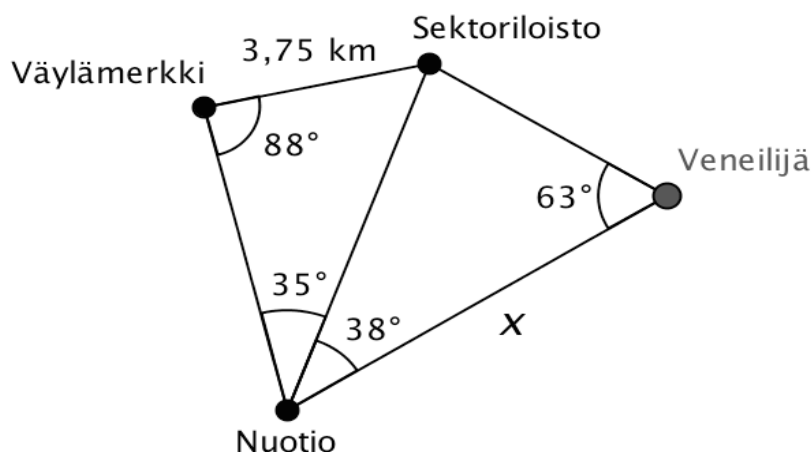
$$\gamma = 180^\circ - 25^\circ - 131,91...^\circ = 23,18...^\circ \approx 23^\circ$$

(ei kelpaa. Kulman C on oltava tylppä, sillä se on pisimmän sivun vastaisena kulmana kolmion suurin kulma)

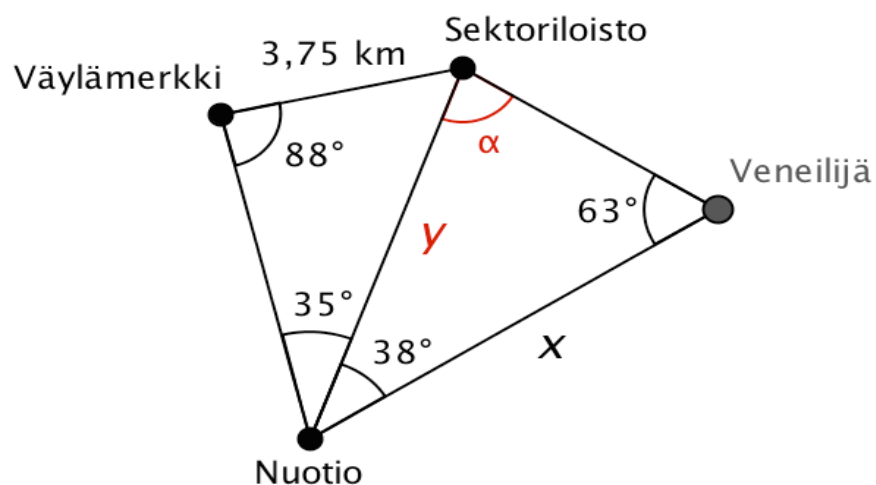
Kolmion kolmas sivu on 20 cm ja kulmat ovat 48° ja 107° .

Vastaus kolmas sivu 20 cm ja kulmat 48° sekä 107°

133



Täydennetään kuvaan laskemisen apuna tarvittavat mitat.



Lasketaan nuotion ja sektoriloiston välinen etäisyys y sinilauseella.

$$\frac{y}{\sin 88^\circ} = \frac{3,75}{\sin 35^\circ}$$

$$y = \frac{3,75 \cdot \sin 88^\circ}{\sin 35^\circ} = 6,53\dots$$

Lasketaan kulma α .

$$\alpha = 180^\circ - 38^\circ - 63^\circ = 79^\circ$$

Lasketaan sinilauseella kysytty veneen etäisyys nuotiosta x .

$$\frac{x}{\sin \alpha} = \frac{y}{\sin 63^\circ}$$

$$x = \frac{y \sin \alpha}{\sin 63^\circ} \quad \left| \begin{array}{l} \alpha = 79^\circ \\ y = 6,53... \text{ km} \end{array} \right.$$

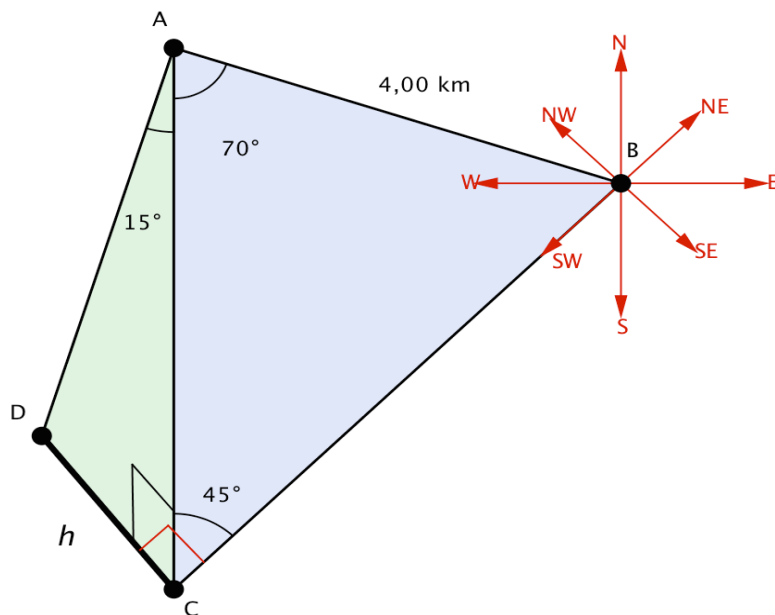
$$= \frac{6,53... \cdot \sin 79^\circ}{\sin 63^\circ}$$

$$= 7,19... \approx 7,2 \text{ (km)}$$

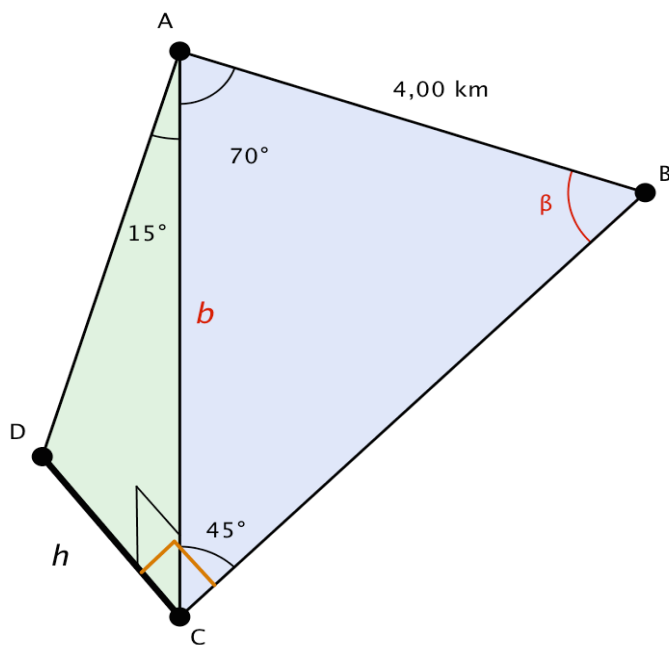
Veneen etäisyys nuotiopaikasta on 7,2 km.

Vastaus 7,2 km

134



Täydennetään kuvaan laskemisen apuna tarvittavat mitat.



Lasketaan kulma β .

$$\beta = 180^\circ - 70^\circ - 45^\circ = 65^\circ$$

Lasketaan vuoren juuren etäisyys pisteestä A eli janan AC pituus b sinilauseella.

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{4,00}{\sin 45^\circ}$$

$$b = \frac{4,00 \cdot \sin \beta}{\sin 45^\circ} \quad | \quad \beta = 65^\circ$$

$$= \frac{4,00 \cdot \sin \beta}{\sin 45^\circ}$$

$$= 5,126... \text{ (km)}$$

Lasketaan kysytty vuoren korkeus h suorakulmaisesta kolmiosta ACD .

$$\tan 15^\circ = \frac{h}{b}$$

$$h = b \tan 15^\circ \quad | \quad b = 5,126... \text{ km}$$

$$= 5,126... \cdot \tan 15^\circ$$

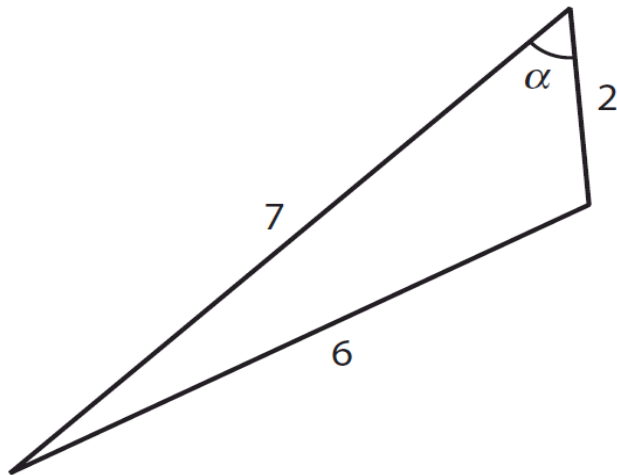
$$= 1,373...$$

$$\approx 1,37 \text{ (km)}$$

Vuoren korkeus on $1,37 \text{ km} = 1370 \text{ m}$.

Vastaus 1370 m

135



Muodostetaan yhtälö kosinilauseen avulla.

$$6^2 = 7^2 + 2^2 - 2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot \cos \alpha$$

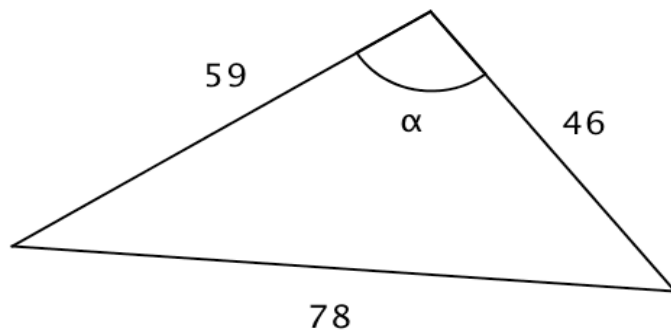
$$2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot \cos \alpha = 7^2 + 2^2 - 6^2$$

$$\cos \alpha = \frac{49 + 4 - 36}{2 \cdot 7 \cdot 2} = \frac{17}{28}$$

$$\alpha = \cos^{-1} \frac{17}{28} = 52,61...^\circ \approx 52,6^\circ$$

Vastaus $52,6^\circ$

136



Kolmion suurin kulma on pisimmän sivun vastainen kulma.

$$78^2 = 59^2 + 46^2 - 2 \cdot 59 \cdot 46 \cdot \cos \alpha$$

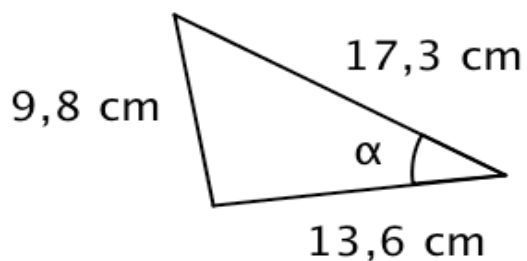
$$2 \cdot 59 \cdot 46 \cdot \cos \alpha = 59^2 + 46^2 - 78^2$$

$$\cos \alpha = \frac{59^2 + 46^2 - 78^2}{2 \cdot 59 \cdot 46} = \frac{-487}{5428}$$

$$\alpha = \cos^{-1} \left(-\frac{487}{5428} \right) = 95,14...^\circ \approx 95,1^\circ$$

Vastaus $95,1^\circ$

137



Kolmion pienin kulma on lyhimmän sivun vastainen kulma.

$$9,8^2 = 17,3^2 + 13,6^2 - 2 \cdot 17,3 \cdot 13,6 \cdot \cos \alpha$$

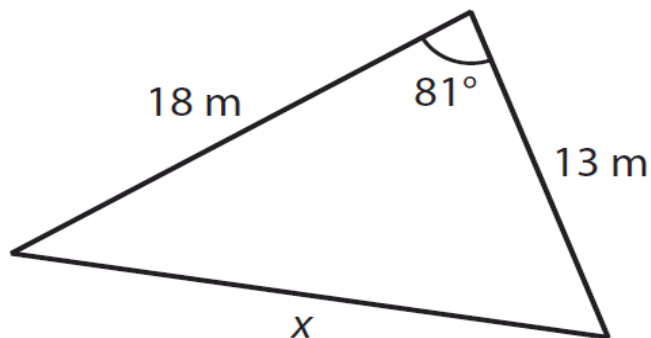
$$2 \cdot 17,3 \cdot 13,6 \cdot \cos \alpha = 17,3^2 + 13,6^2 - 9,8^2$$

$$\cos \alpha = \frac{17,3^2 + 13,6^2 - 9,8^2}{2 \cdot 17,3 \cdot 13,6} = \frac{388,21}{470,56}$$

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{388,21}{470,56} \right) = 34,41...^\circ \approx 34,4^\circ$$

Vastaus $34,4^\circ$

138



Muodostetaan yhtälö kosinilauseen avulla.

$$x^2 = 13^2 + 18^2 - 2 \cdot 13 \cdot 18 \cdot \cos 81^\circ$$

$$= 493 - 468 \cdot \cos 81^\circ$$

$$= 419,788\dots$$

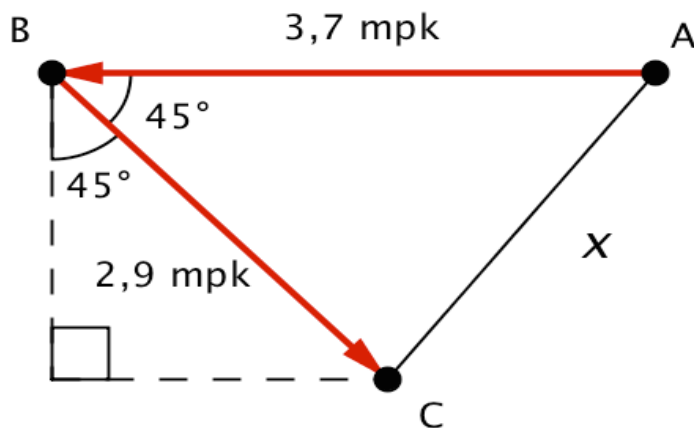
$$x = (\pm)\sqrt{419,788\dots}$$

$$= 20,48\dots \approx 20 \text{ (m)}$$

Sivun pituus $x = 20$ metriä.

Vastaus $x = 20 \text{ m}$

139



Kysytty etäisyys x saadaan määritettyä kosinilauseen avulla.

$$x^2 = 3,7^2 + 2,9^2 - 2 \cdot 3,7 \cdot 2,9 \cdot \cos 45^\circ$$

$$= 22,1 - 21,46 \cdot \cos 45^\circ$$

$$= 6,92...$$

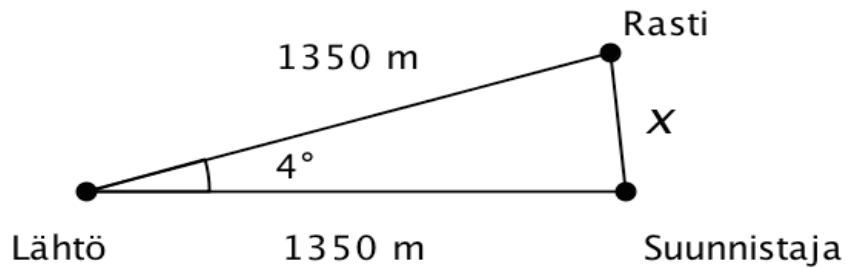
$$x = (\pm)\sqrt{6,92...}$$

$$= 2,63... \approx 2,6 \text{ (mpk)}$$

Veneilijä päätyi 2,6 meripeninkulman päähän lähtöpisteestä.

Vastaus 2,6 mpk

140



Lasketaan suunnistajan ja rastin välinen etäisyys x kosinilauseen avulla.

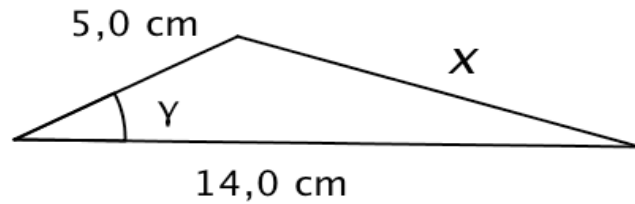
$$\begin{aligned} x^2 &= 1350^2 + 1350^2 - 2 \cdot 1350 \cdot 1350 \cdot \cos 4^\circ \\ &= 2 \cdot 1350^2 - 2 \cdot 1350^2 \cdot \cos 4^\circ \\ &= 8879,03... \end{aligned}$$

$$x = (\pm)\sqrt{8879,03...} = 94,22... \approx 94 \text{ (m)}$$

Suunnistaja on 94 metrin päässä rastista.

Vastaus 94 m

141



Kolmion pinta-ala on

$$A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$$

$$27,9 = \frac{1}{2} \cdot 5,0 \cdot 14,0 \cdot \sin\gamma$$

$$\sin\gamma = \frac{2 \cdot 27,9}{5,0 \cdot 14,0} = 0,797\dots$$

$$\gamma = \sin^{-1} 0,797\dots = 52,85\dots^\circ$$

Koska $\sin(180^\circ - \gamma) = \sin\gamma$, niin kulman γ arvoksi kelpaa myös

$$\gamma = 180^\circ - 52,85\dots^\circ = 127,14\dots^\circ.$$

Kosinilauseen avulla saadaan laskettua kolmas sivu.

$$\begin{aligned} x^2 &= 5,0^2 + 14,0^2 - 2 \cdot 5,0 \cdot 14,0 \cdot \cos\gamma \\ &= 221 - 140\cos\gamma \end{aligned}$$

- Kun $\gamma = 52,85\dots^\circ$, niin

$$x^2 = 221 - 140\cos 52,85\dots^\circ = 136,46\dots$$

$$x = (\pm)\sqrt{136,46\dots} = 11,68\dots \approx 11,7 \text{ (cm)}$$

- Kun $\gamma = 127,14\dots^\circ$, niin

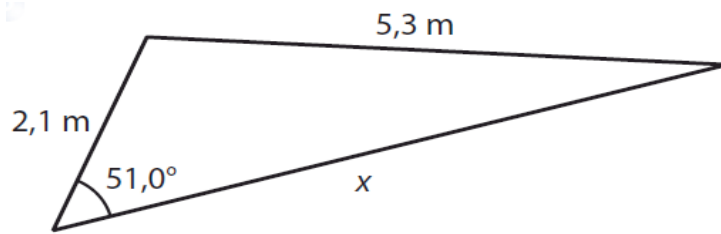
$$x^2 = 221 - 140\cos 127,14\dots^\circ = 305,53\dots$$

$$x = (\pm)\sqrt{305,53\dots} = 17,47\dots \approx 17,5 \text{ (cm)}$$

Kolmion kolmannen sivun pituus on 11,7 cm tai 17,5 cm.

Vastaus 11,7 cm tai 17,5 cm

142



Muodostetaan yhtälö kosinilauseen avulla.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma$$

$$5,3^2 = 2,1^2 + x^2 - 2 \cdot 2,1 \cdot x \cdot \cos 51,0^\circ$$

$$x^2 - 4,2 \cdot \cos 51,0^\circ \cdot x + 2,1^2 - 5,3^2 = 0$$

$$x^2 - 4,2 \cdot \cos 51,0^\circ \cdot x - 23,68 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{4,2 \cdot \cos 51,0^\circ \pm \sqrt{(-4,2 \cdot \cos 51,0^\circ)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-23,68)}}{2 \cdot 1}$$

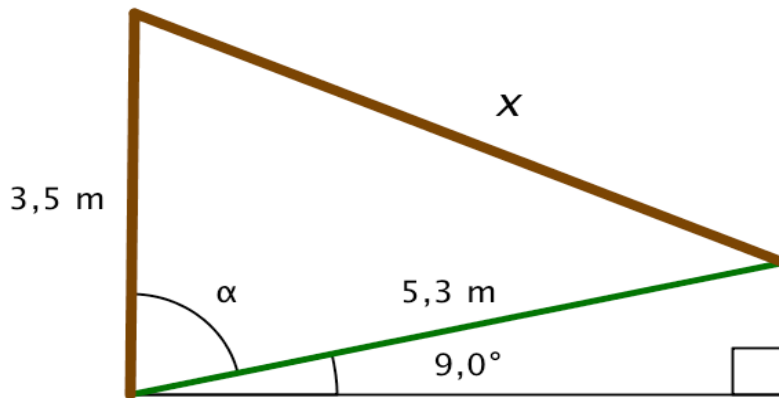
$$x = -3,72... \text{ tai } x = 6,36...$$

Sivun pituus on positiivinen, joten $x = 6,36... \text{ cm} \approx 6,4 \text{ cm}$.

(Toisen asteen yhtälön voi ratkaista myös laskimella)

Vastaus $x = 6,4 \text{ cm}$

143



Männyn pystyyn jääneen tyven ja rinteen välinen kulma on

$$\alpha = 90^\circ - 9,0^\circ = 81,0^\circ.$$

Muodostetaan yhtälö kosinilauseen avulla.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma$$

$$x^2 = 3,5^2 + 5,3^2 - 2 \cdot 3,5 \cdot 5,3 \cdot \cos 81,0^\circ$$

$$= 34,53\dots$$

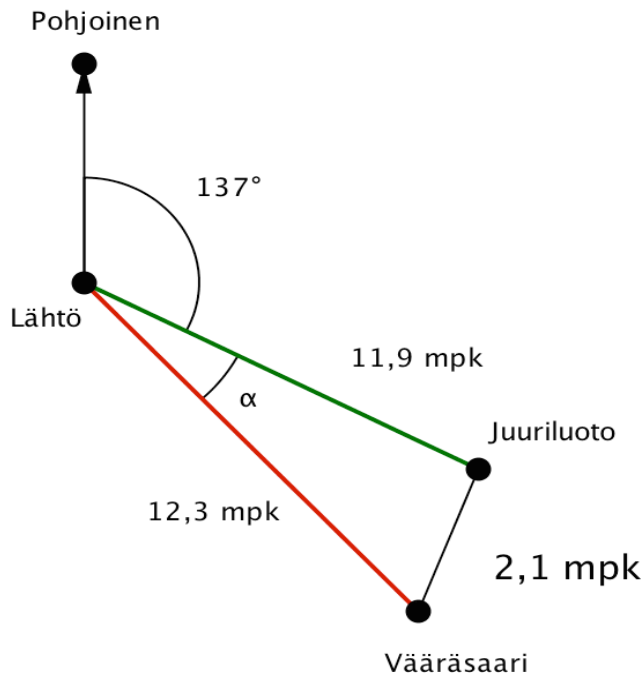
$$x = (\pm)\sqrt{34,53\dots} = 5,87\dots \text{ (m)}$$

Männyn alkuperäinen pituus oli

$$3,5 \text{ m} + x = 3,5 \text{ m} + 5,87\dots \text{ m} = 9,37\dots \text{ m} \approx 9,4 \text{ m}.$$

Vastaus 9,4 m

144



Veneilijä halusi ajaa suuntaan 137° , mutta päätyi ajamaan kulman α verran väärään suuntaan.

Ratkaistaan kulma α kosinilauseen avulla.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \alpha$$

$$2,1^2 = 11,9^2 + 12,3^2 - 2 \cdot 11,9 \cdot 12,3 \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{2,1^2 - 11,9^2 - 12,3^2}{-2 \cdot 11,9 \cdot 12,3} = 0,985...$$

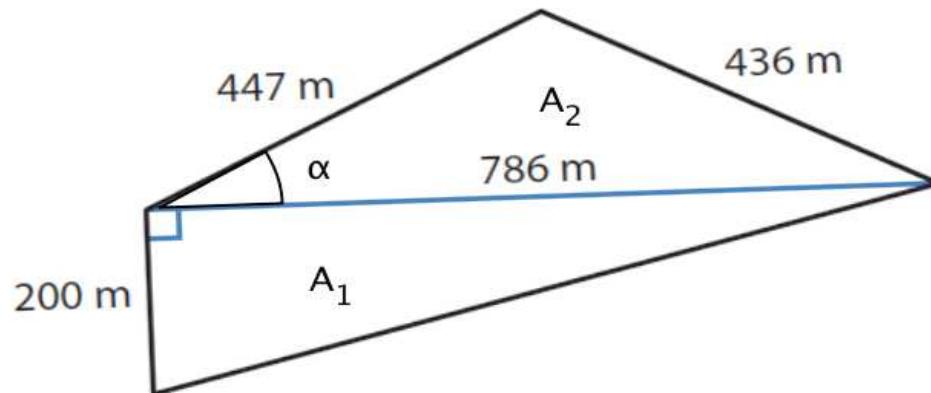
$$\alpha = \cos^{-1} 0,985... = 9,77...^\circ \approx 9,8^\circ$$

Kompassilukeman virhe oli $9,8^\circ$.

(Veneilijän todellinen kompassisuunta oli siis $146,8^\circ$ tai $127,2^\circ$.)

Vastaus $9,8^\circ$

145



Alemman suorakulmaisen kolmion pinta-ala saadaan suoraan annettujen mittojen avulla.

$$A_1 = \frac{200 \cdot 786}{2} = 78\,600 \text{ (m}^2\text{)}$$

Ylemmän kolmion pinta-alan laskemiseksi selvitetään ensin kulma α kosinilauseen avulla.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$$

$$436^2 = 447^2 + 786^2 - 2 \cdot 447 \cdot 786 \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{436^2 - 447^2 - 786^2}{-2 \cdot 447 \cdot 786} = 0,893\dots$$

$$\alpha = \cos^{-1} 0,893\dots = 26,745\dots^\circ$$

Alemman kolmion pinta-ala on

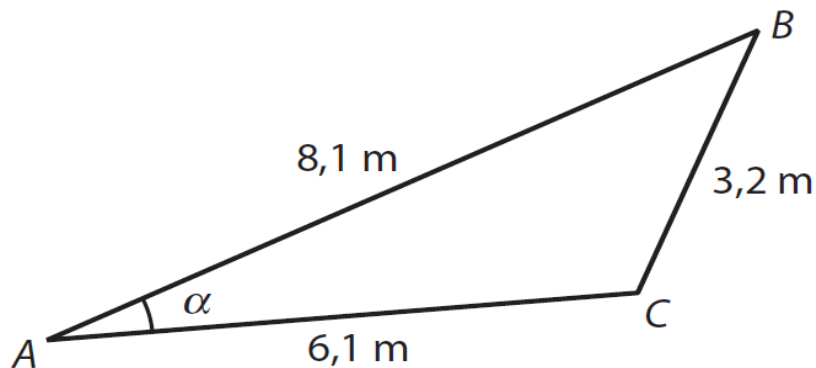
$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot 447 \cdot 786 \cdot \sin 26,745...^\circ = 79\,055,85... \text{ (m}^2\text{)}$$

Koko metsäpalstan pinta-ala on

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 = 78\,600 \text{ m}^2 + 79\,055,85... \text{ m}^2 \\ &= 157\,655,85... \text{ m}^2 \approx 158\,000 \text{ m}^2 (= 15,8 \text{ ha}) \end{aligned}$$

Vastaus $158\,000 \text{ m}^2 = 15,8 \text{ ha}$

146



Määritetään kulma α kosinilauseen avulla.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$$

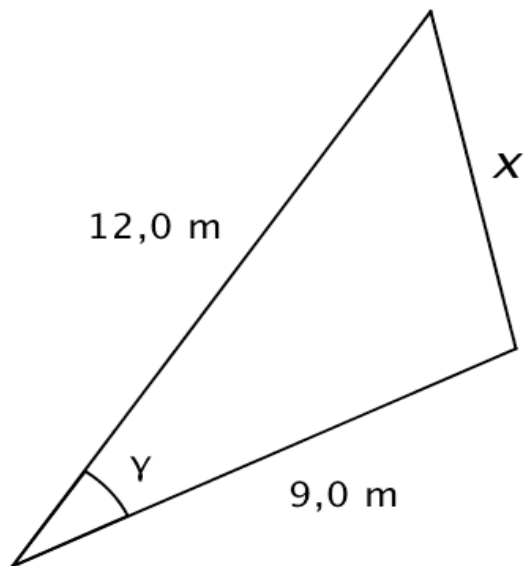
$$3,2^2 = 8,1^2 + 6,1^2 - 2 \cdot 8,1 \cdot 6,1 \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{3,2^2 - 8,1^2 - 6,1^2}{-2 \cdot 8,1 \cdot 6,1} = 0,936...$$

$$\alpha = \cos^{-1} 0,936... = 20,47...^\circ \approx 20,5^\circ$$

Vastaus $20,5^\circ$

147



Määritetään tunnettujen sivujen välinen kulma pinta-alan avulla.

$$A = \frac{1}{2}bc \sin \gamma$$

$$27,0 = \frac{1}{2} \cdot 12,0 \cdot 9,0 \cdot \sin \gamma$$

$$\sin \gamma = \frac{2 \cdot 27,0}{12,0 \cdot 9,0} = 0,5$$

$$\gamma = \sin^{-1} 0,5 = 30^\circ$$

Koska $\sin(180^\circ - \gamma) = \sin \gamma$, niin kulmaksi kelpaa myös

$$\gamma = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ.$$

Kysytyn sivun pituus x saadaan kosinilauseella.

$$\begin{aligned}x^2 &= 12,0^2 + 9,0^2 - 2 \cdot 12,0 \cdot 9,0 \cdot \cos \gamma \\&= 225 - 216 \cos \gamma\end{aligned}$$

Kun $\gamma = 30^\circ$, niin sivun pituudeksi x saadaan

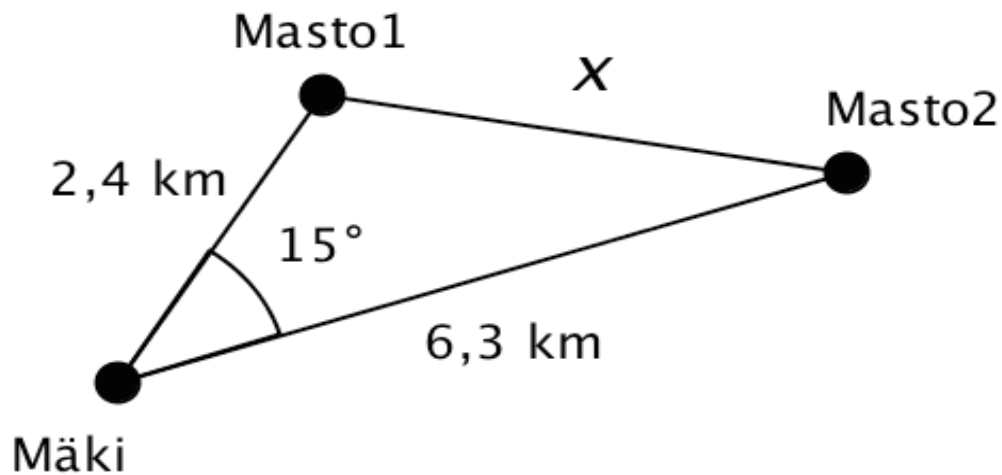
$$\begin{aligned}x^2 &= 225 - 216 \cos 30^\circ = 37,93... \\x &= (\pm) \sqrt{37,93...} = 6,15... \approx 6,2 \text{ (m)}.\end{aligned}$$

Kun $\gamma = 150^\circ$, niin sivun pituudeksi x saadaan

$$\begin{aligned}x^2 &= 225 - 216 \cos 150^\circ = 412,06... \\x &= (\pm) \sqrt{412,06...} = 20,29... \approx 20,3 \text{ (m)}.\end{aligned}$$

Vastaus 6,2 m tai 20,3 m

148



Mastojen välinen etäisyys saadaan kosinilauseen avulla.

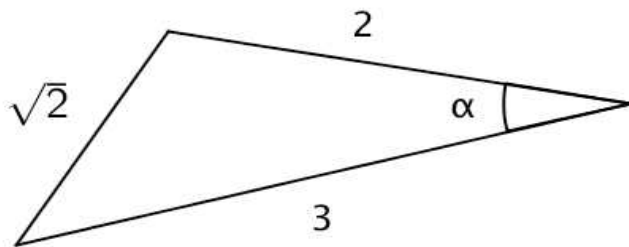
$$x^2 = 2,4^2 + 6,3^2 - 2 \cdot 2,4 \cdot 6,3 \cdot \cos 15^\circ$$
$$= 16,24 \dots$$

$$x = (\pm) \sqrt{16,24 \dots} = 4,02 \dots \approx 4,0 \text{ (km)}$$

Mastojen välinen etäisyys on 4,0 km.

Vastaus 4,0 km

149



- a) Kolmion pienin kulma on lyhintä sivua vastassa.

Kysytty kulma saadaan kosinilauseella.

$$(\sqrt{2})^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{(\sqrt{2})^2 - 2^2 - 3^2}{-2 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{2 - 4 - 9}{-12} = \frac{11}{12}$$

$$\alpha = \cos^{-1} \frac{11}{12} = 23,55...^\circ \approx 23,6^\circ$$

Kolmion pienin kulma on $23,6^\circ$.

- b) Tutkitaan toteuttaako kolmio Pythagoraan lauseen.
Ehdokas hypotenuusaksi on pisin sivu, jonka pituus on 3.

$$3^2 = (\sqrt{2})^2 + 2^2$$

$$9 = 2 + 4$$

$$9 = 6$$

epätosi

Kolmio ei ole suorakulmainen.

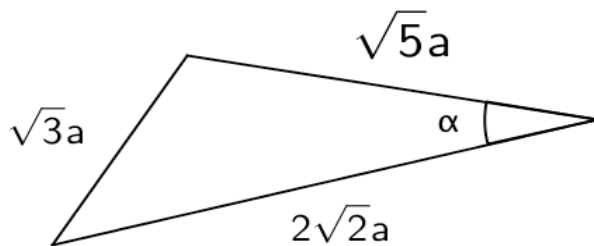
Vastaus a) $23,6^\circ$ b) ei ole suorakulmainen

150

a) Kolmion sivujen pituudet ovat

$$\sqrt{3}a, \sqrt{5}a \text{ ja } 2\sqrt{2}a = \sqrt{4 \cdot 2}a = \sqrt{8}a.$$

Pienin kulma on lyhimmän $\sqrt{3}a$ -pituisen sivun vastainen kulma.



Pienin kulma saadaan laskettua kosinilauseen avulla.

$$(\sqrt{3}a)^2 = (\sqrt{5}a)^2 + (\sqrt{8}a)^2 - 2 \cdot \sqrt{5}a \cdot \sqrt{8}a \cdot \cos \alpha$$

$$3a^2 = 5a^2 + 8a^2 - 2 \cdot \sqrt{40} \cdot a^2 \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{3a^2 - 5a^2 - 8a^2}{-2 \cdot \sqrt{40} \cdot a^2} = \frac{\overset{5}{\cancel{10}} \cdot \cancel{a^2}}{\underset{1}{\cancel{2}} \cdot \sqrt{40} \cdot \cancel{a^2}} = \frac{5}{\sqrt{40}} = \sqrt{\frac{25}{40}} = \sqrt{\frac{5}{8}}$$

$$\alpha = \cos^{-1} \sqrt{\frac{5}{8}} = 37,76...^\circ \approx 37,8^\circ$$

Kolmion pienin kulma on $37,8^\circ$.

b) Tutkitaan toteuttaako kolmio Pythagoraan lauseen. Ehdokas hypotenuusaksi on kolmion pisin sivu, pituudeltaan $\sqrt{8}a$.

$$(\sqrt{8}a)^2 = (\sqrt{3}a)^2 + (\sqrt{5}a)^2$$

$$8a^2 = 3a^2 + 5a^2$$

$$8a^2 = 8a^2$$

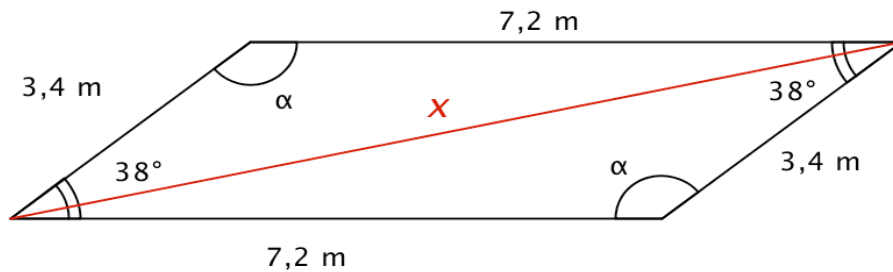
tosi

Kolmio on suorakulmainen.

Vastaus a) $37,8^\circ$ b) on suorakulmainen

151

Suunnikkaan vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuret. Pisin lävistäjä on suunnikkaan suuremman kulman vastainen lävistäjä.



Vierekkäisten kulmien summa on 180° .

$$\alpha = 180^\circ - 38^\circ = 142^\circ.$$

Pidemmän lävistäjän pituus saadaan kosinilauseen avulla.

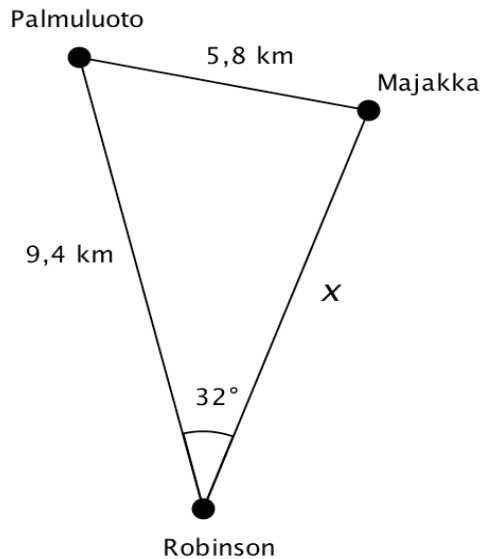
$$\begin{aligned} x^2 &= 3,4^2 + 7,2^2 - 2 \cdot 3,4 \cdot 7,2 \cdot \cos 142^\circ \\ &= 101,98... \end{aligned}$$

$$x = (\pm)\sqrt{101,98...} = 10,09... \approx 10,1 \text{ (m)}$$

Pidemmän lävistäjän pituus on 10,1 m.

Vastaus 10,1 m

152



Muodostetaan yhtälö kosinilauseen avulla.

$$5,8^2 = 9,4^2 + x^2 - 2 \cdot 9,4 \cdot x \cdot \cos 32^\circ$$

$$x^2 - 2 \cdot 9,4 \cdot x \cdot \cos 32^\circ + 9,4^2 - 5,8^2 = 0$$

$$x^2 - 18,8 \cdot \cos 32^\circ \cdot x + 54,72 = 0$$

$$x = \frac{18,8 \cdot \cos 32^\circ \pm \sqrt{(-18,8 \cdot \cos 32^\circ)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 54,72}}{2 \cdot 1}$$

$$x = 5,00... \quad \text{tai} \quad x = 10,94$$

$$x \approx 5,0 \quad \text{tai} \quad x \approx 10,9$$

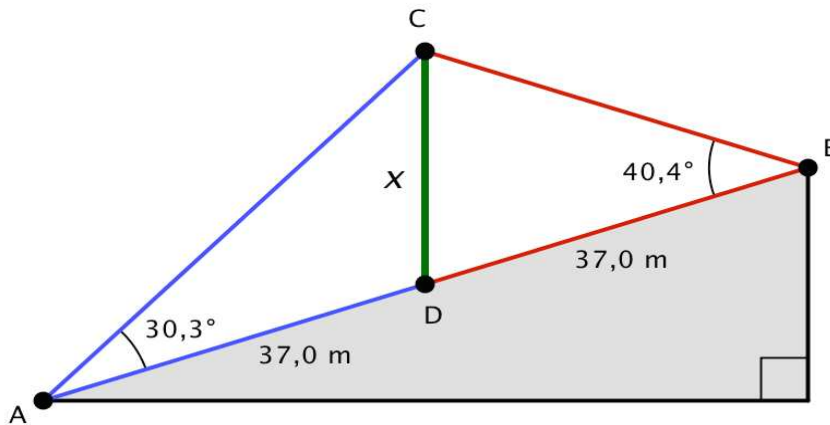
Majakka on 5,0 km tai 10,9 km etäisyydellä Robinsonista.

Vastaus 5,0 km tai 10,9 km

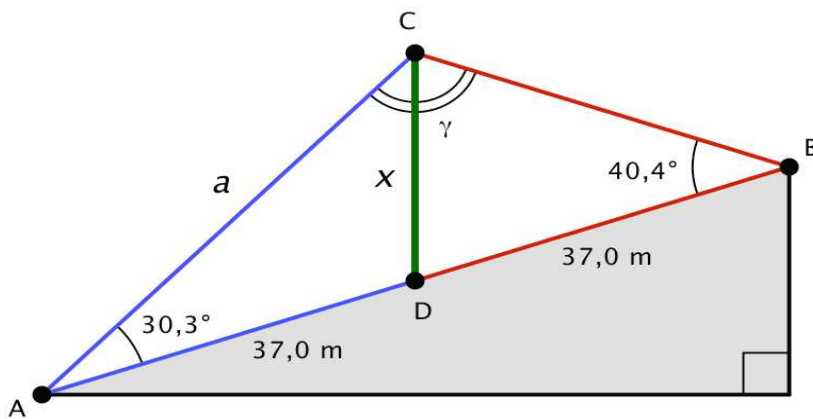
Huomautus: Yhtälön voi ratkaista myös laskimella.

153

Piirretään tilanteesta mallikuva.



Kysytty maston korkeus saadaan laskettua kolmiosta ADC käyttäen kosinilausetta. Tätä varten selvitetään ensin janan AC pituus sinilauseen avulla. Kolmiosta ABC tunnetaan kaikki kulmat, joten sinilauseen käyttö onnistuu.



$$\gamma = 180^\circ - 30,3^\circ - 40,4^\circ = 109,3^\circ$$

$$\frac{a}{\sin 40,4^\circ} = \frac{37,0 + 37,0}{\sin 109,3^\circ}$$

$$a = \frac{74,0 \cdot \sin 40,4^\circ}{\sin 109,3^\circ} = 50,816... \text{ (m)}$$

Ratkaistaan kysytty maston korkeus x kosinilauseella.

$$x^2 = a^2 + 37,0^2 - 2 \cdot a \cdot 37,0 \cdot \cos 30,3^\circ \quad | \quad a = 50,816...$$

$$= 50,816...^2 + 37,0^2 - 2 \cdot 50,816... \cdot 37,0 \cdot \cos 30,3^\circ$$

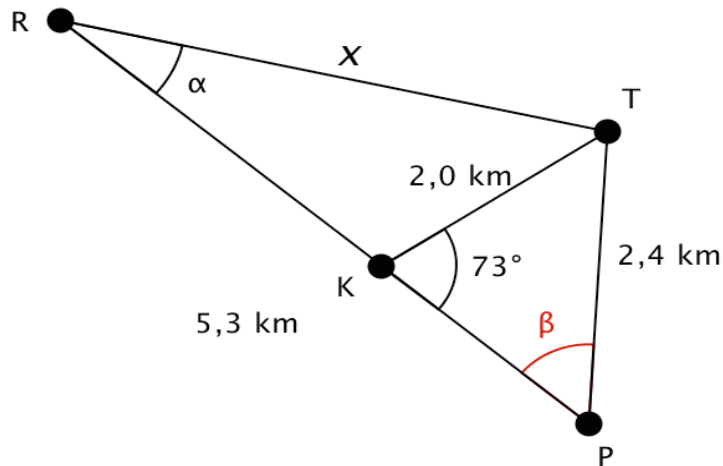
$$= 704,59...$$

$$x = (\pm)\sqrt{704,59...} = 26,54... \approx 26,5 \text{ (m)}$$

Maston korkeus on 26,5 metriä.

Vastaus 26,5 m

154



- Lasketaan ensin kulma β kolmiosta KPT sinilauseen avulla.

$$\frac{2,0}{\sin \beta} = \frac{2,4}{\sin 73^\circ}$$

$$2,0 \sin 73^\circ = 2,4 \sin \beta$$

$$\sin \beta = \frac{2,0 \sin 73^\circ}{2,4} = 0,796\dots$$

$$\beta = \sin^{-1} 0,796\dots = 52,83\dots^\circ$$

$$\text{tai } \beta = 180^\circ - 52,83\dots = 127,16\dots^\circ$$

Jos $\beta = 52,83\dots^\circ$, niin

$$\sphericalangle KTP = 180^\circ - 73^\circ - 52,83\dots^\circ = 54,16\dots^\circ \text{ (kelpaa)}$$

Jos $\beta = 127,16\dots^\circ$, niin

$$\sphericalangle KTP = 180^\circ - 73^\circ - 127,16\dots^\circ = -20,16\dots^\circ \text{ (ei kelpaa)}$$

Siis on oltava $\beta = 52,83\dots^\circ$.

- Lasketaan kosinilauseen avulla janan RT pituus x kolmiosta RPT .

$$x^2 = 5,3^2 + 2,4^2 - 2 \cdot 5,3 \cdot 2,4 \cdot \cos 52,83...^\circ$$

$$= 18,48...$$

$$x = (\pm)\sqrt{18,48...} = 4,29... \text{ (km)}$$

- Lasketaan kulma α kolmiosta RPT kosinilauseen avulla.

$$2,4^2 = 5,3^2 + 4,29...^2 - 2 \cdot 5,3 \cdot 4,29... \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{2,4^2 - 5,3^2 - 4,29...^2}{-2 \cdot 5,3 \cdot 4,29...} = 0,895...$$

$$\alpha = \cos^{-1} 0,895... = 26,41...^\circ$$

- a) Ruttulasta katsottaessa Pottulan ja Takkulan väli näkyy kulmassa

$$\alpha = 26,41...^\circ \approx 26^\circ.$$

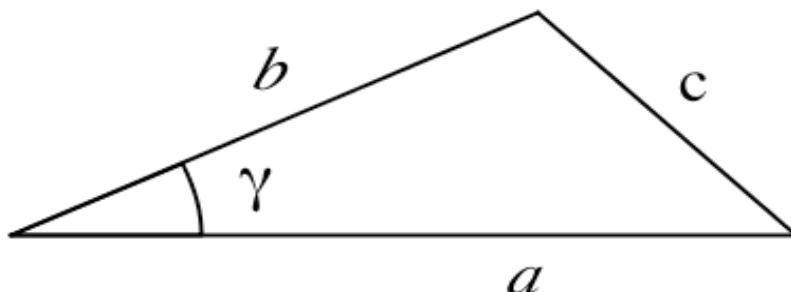
- b) Ruttulan ja Takkulan välinen etäisyys on

$$x = 4,29... \text{ km} \approx 4,3 \text{ km}.$$

Vastaus a) 26° b) 4,3 km

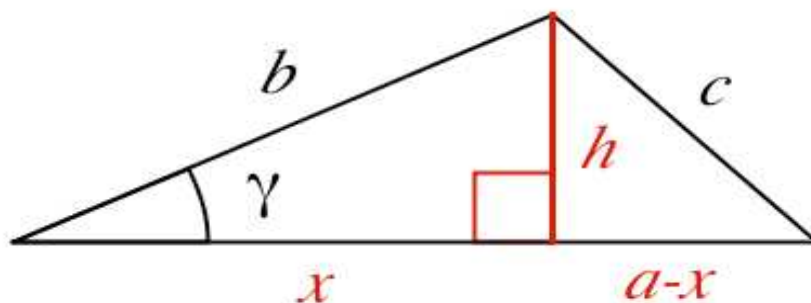
155

Piirretään kolmio, jossa on terävä kulma γ .



On osoitettava, että kosinilause $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ pätee, kun kulma γ on terävä.

Täydennetään kolmioon korkeusjana ja jaetaan kanta osiin, joiden pituudet ovat x ja $a - x$.



Kuvan merkinnöillä saadaan kosinin määritelmän ja Pythagoraan lauseen avulla seuraavat yhtälöt.

$$1) \cos\gamma = \frac{x}{b}$$

$$x = b\cos\gamma$$

$$2) b^2 = h^2 + x^2$$

$$3) \ c^2 = h^2 + (a - x)^2$$

$$= h^2 + a^2 + 2 \cdot a \cdot (-x) + (-x)^2$$

$$= h^2 + a^2 - 2ax + x^2$$

$$= h^2 + x^2 + a^2 - 2ax$$

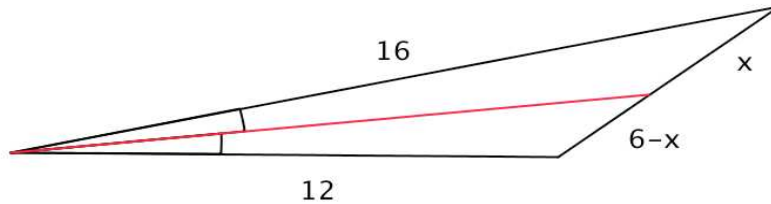
$$\left| \begin{array}{l} h^2 + x^2 = b^2 \\ x = b \cos \gamma \end{array} \right.$$

$$= b^2 + a^2 - 2ab \cos \gamma$$

$$= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Saatiin osoitettua, että kosinilause $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ pätee, kun kulma γ on terävä. $\square$

156



Pienin kulma on lyhimmän sivun vastainen kulma.

Muodostetaan yhtälö kulmanpuolittajalauseen avulla.

$$\frac{x}{6-x} = \frac{16}{12}$$

$$12x = 16 \cdot (6-x)$$

$$12x = 16 \cdot 6 - 16x$$

$$12x + 16x = 96$$

$$28x = 96$$

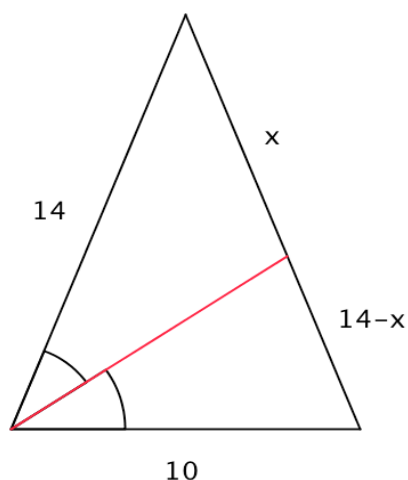
$$x = \frac{96}{28} \stackrel{(4)}{=} \frac{24}{7} = 3\frac{3}{7}$$

$$6-x = \frac{42}{7} - \frac{24}{7} = \frac{18}{7} = 2\frac{4}{7}$$

Osien pituudet ovat $3\frac{3}{7}$ ja $2\frac{4}{7}$.

Vastaus $3\frac{3}{7}$ ja $2\frac{4}{7}$

157



Muodostetaan yhtälö kulmanpuolittajalauseen avulla.

$$\frac{x}{14-x} = \frac{14}{10}$$

$$10x = 14(14-x)$$

$$10x = 14^2 - 14x$$

$$10x + 14x = 14^2$$

$$24x = 14^2$$

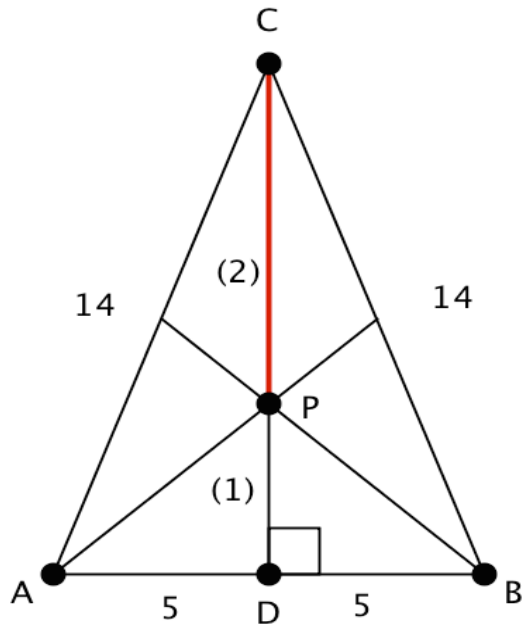
$$x = \frac{14^2}{24} = \frac{49}{6} = 8\frac{1}{6}$$

$$14-x = 14 - 8\frac{1}{6} = 5\frac{5}{6}$$

Osien pituudet ovat $8\frac{1}{6}$ ja $5\frac{5}{6}$.

Vastaus $8\frac{1}{6}$ ja $5\frac{5}{6}$

158



Kolmio on tasakylkinen, joten huipusta piirretty mediaani on samalla kolmion korkeusjana.

Lasketaan korkeusjanan CD pituus Pythagoraan lauseen avulla.

$$14^2 = |CD|^2 + 5^2$$

$$|CD|^2 = 14^2 - 5^2 = 171$$

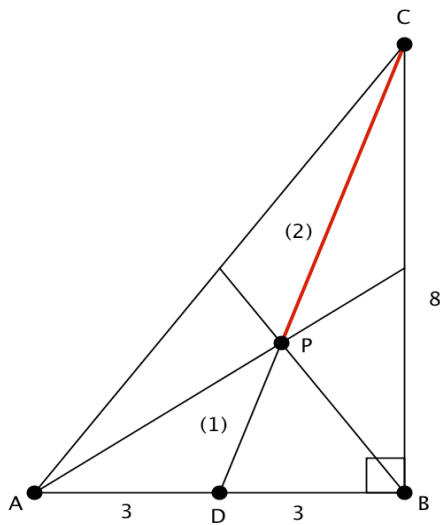
$$|CD| = (\pm)\sqrt{171} = \sqrt{9 \cdot 19} = 3\sqrt{19}$$

Mediaanien leikkauspiste jakaa mediaanin suhteessa 2 : 1 kärjestä lukien. Lasketaan kysytty etäisyys $|CP|$.

$$|CP| = \frac{2}{3}|CD| = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{19} = 2\sqrt{19}$$

Vastaus $2\sqrt{19}$

159



Kolmion pienin kulma on lyhimmän sivun eli lyhemmän kateetin vastainen kulma.

Lasketaan janan CD pituus Pythagoraan lauseen avulla suorakulmaisesta kolmiosta DBC .

$$|DC|^2 = 3^2 + 8^2$$

$$= 73$$

$$|DC| = (\pm)\sqrt{73} = \sqrt{73}$$

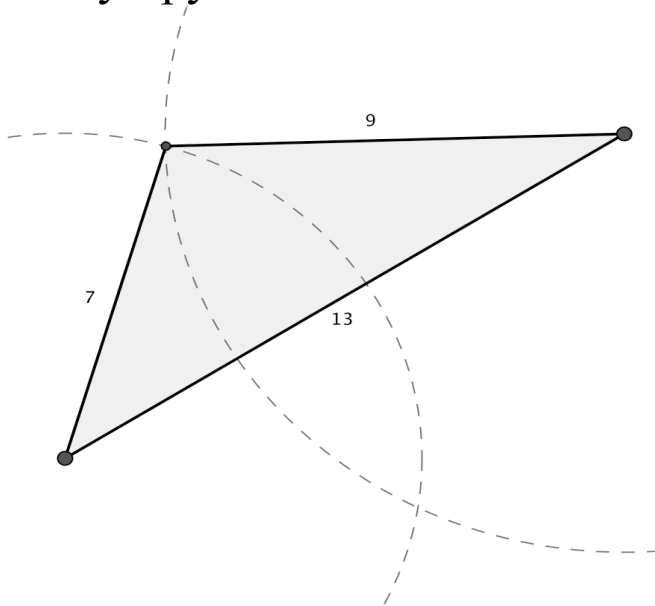
Mediaanien leikkauspiste jakaa mediaanin suhteessa 2 : 1 kärjestä lukien. Lasketaan kysytty etäisyys $|CP|$.

$$|CP| = \frac{2}{3}|CD| = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{73} = \frac{2\sqrt{73}}{3}$$

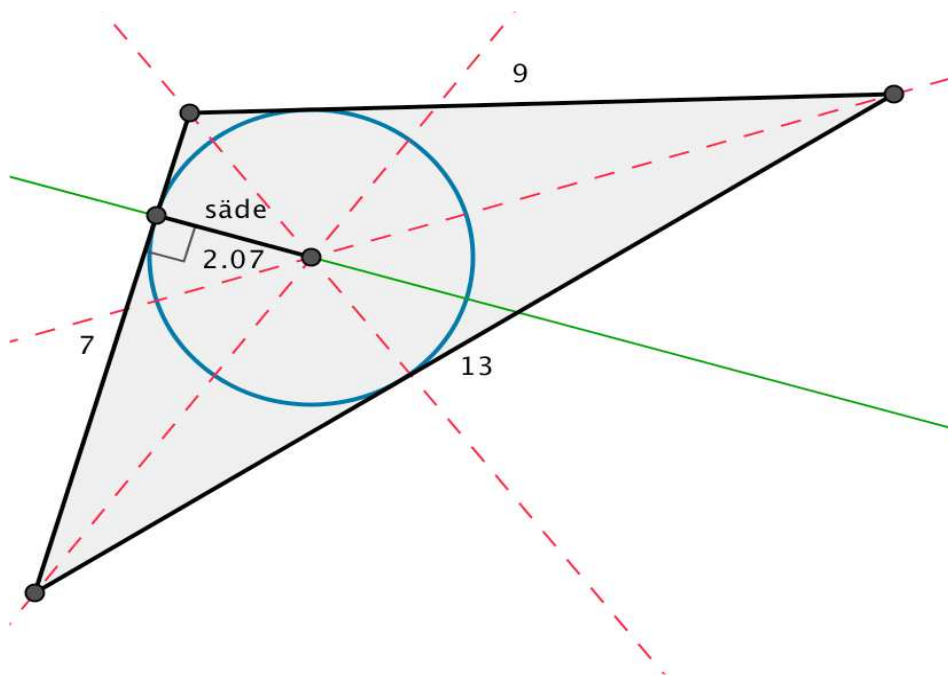
Vastaus Etäisyys on $\frac{2\sqrt{73}}{3}$.

160

Kolmioon saa piirrettyä halutun mittaiset sivut esimerkiksi tietyn säteisten ympyröiden avulla.

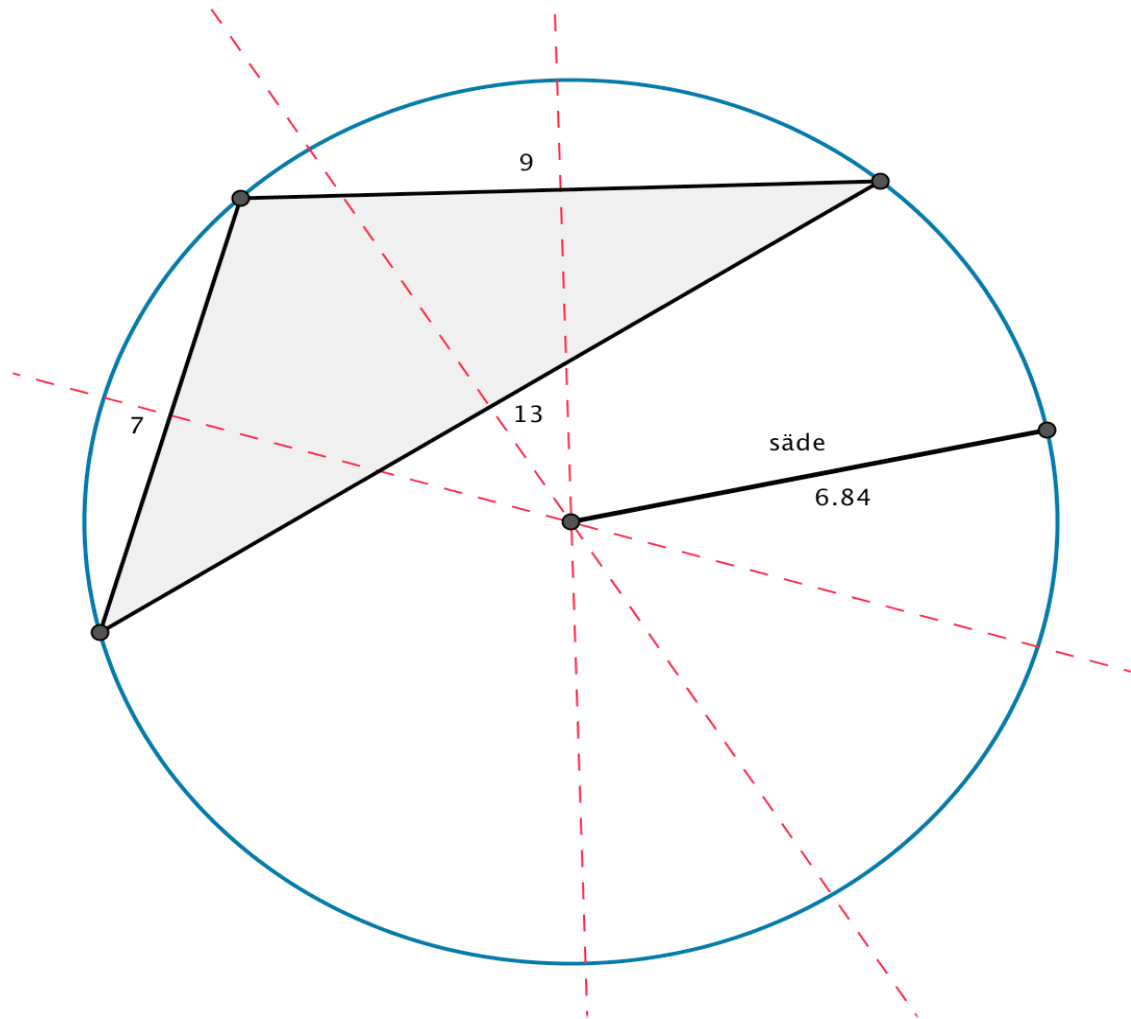


- a) Kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste on kulmanpuolittajien leikkauspiste. Säde on ympyrän keskipisteestä piirretyllä kolmion sivun normaalilla.



Kolmion sisään piirretyn ympyrän säde on 2,1.

- b) Kolmion ympäri voi piirtää ympyrän kolmen kärkipisteen avulla. Ympyrän keskipiste löytyy joko keskipistetyökalulla tai kolmion sivujen keskinormaalien leikkauspisteestä.

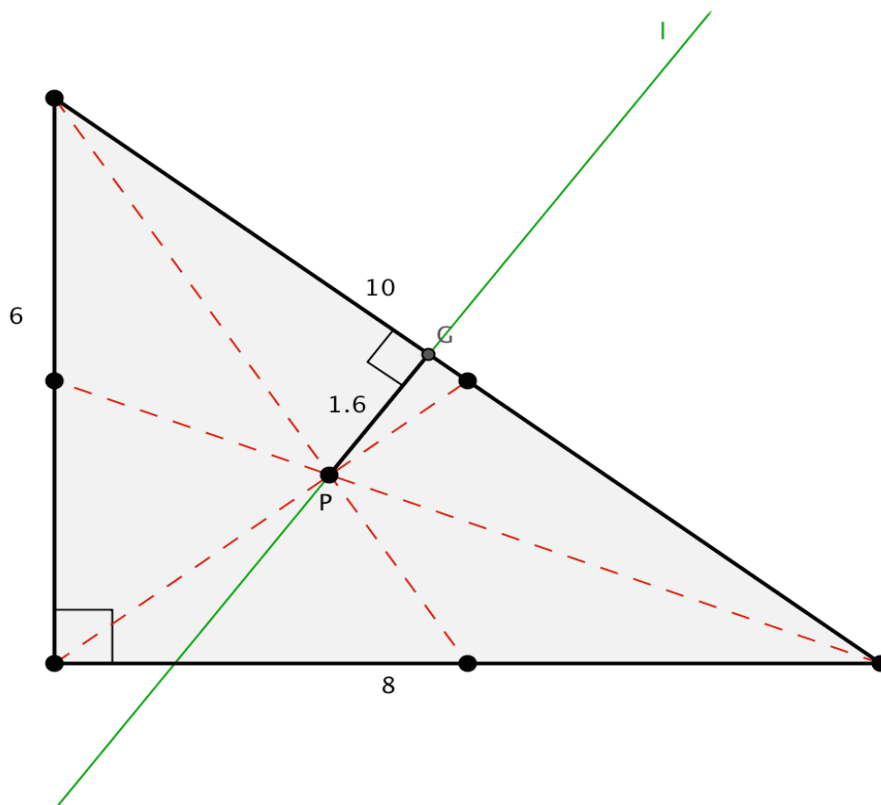
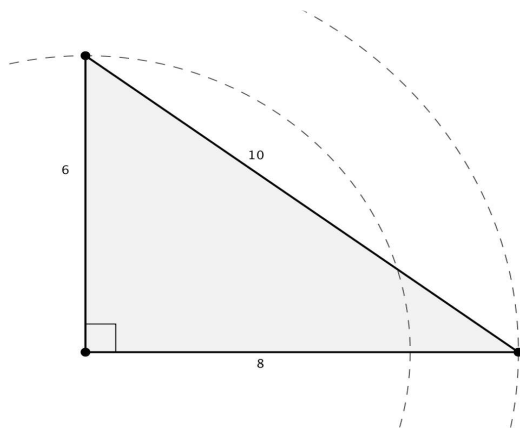


Kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde on 6,8.

Vastaus a) 2,1 b) 6,8

161

Kolmioon saa piirrettyä halutun mittaiset sivut esimerkiksi tietyn säteisten ympyröiden avulla.

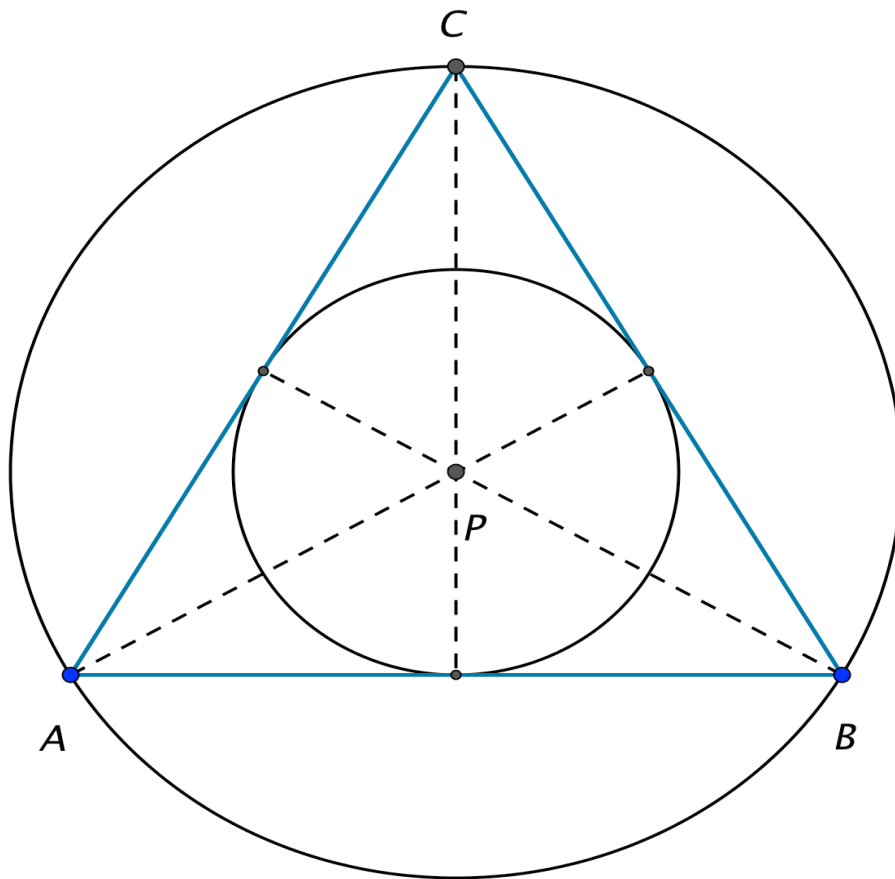


Kolmion painopiste on mediaanien leikkauspisteessä.
Kolmion painopisteen etäisyys hypotenuusasta on 1,6.

Vastaus 1,6

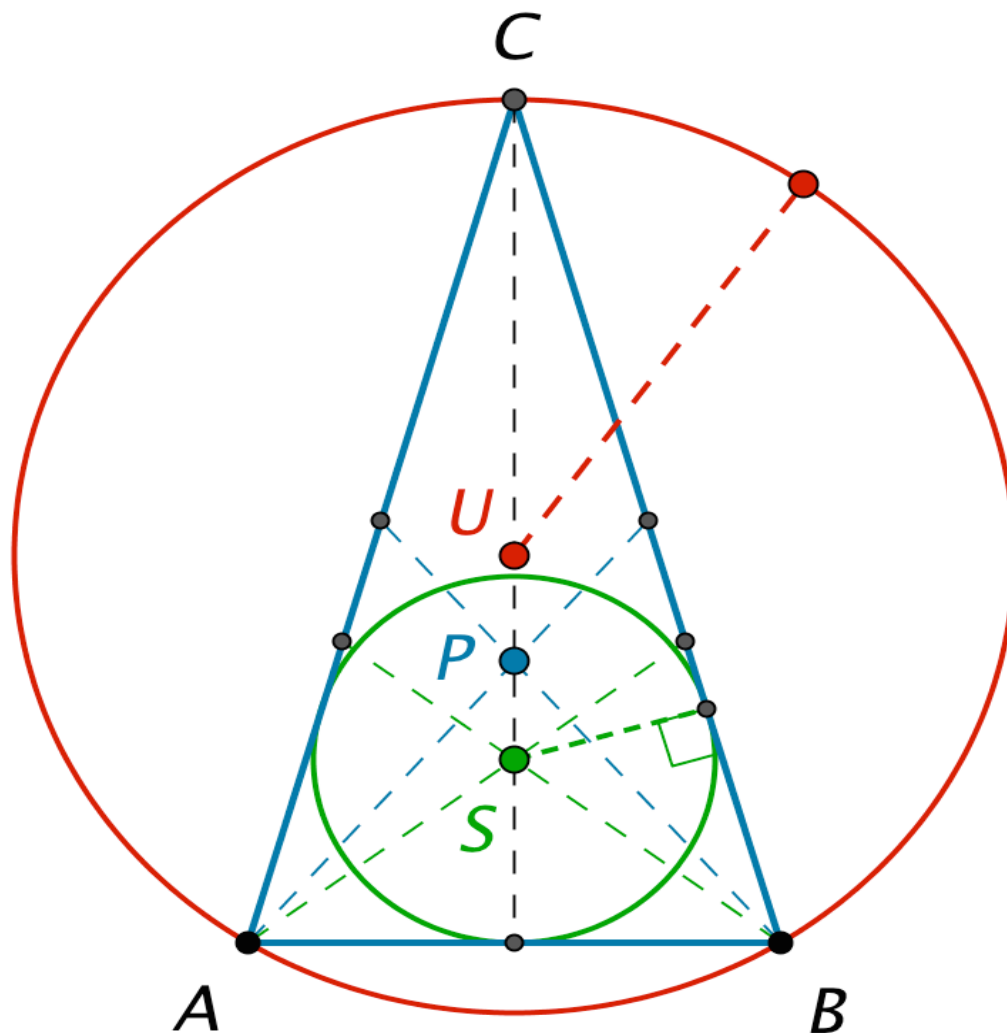
162

a)



Tasasivuisen kolmion painopiste sekä sisään ja ympäri piirrettyjen ympyröiden keskipisteet yhtyvät (piste P).

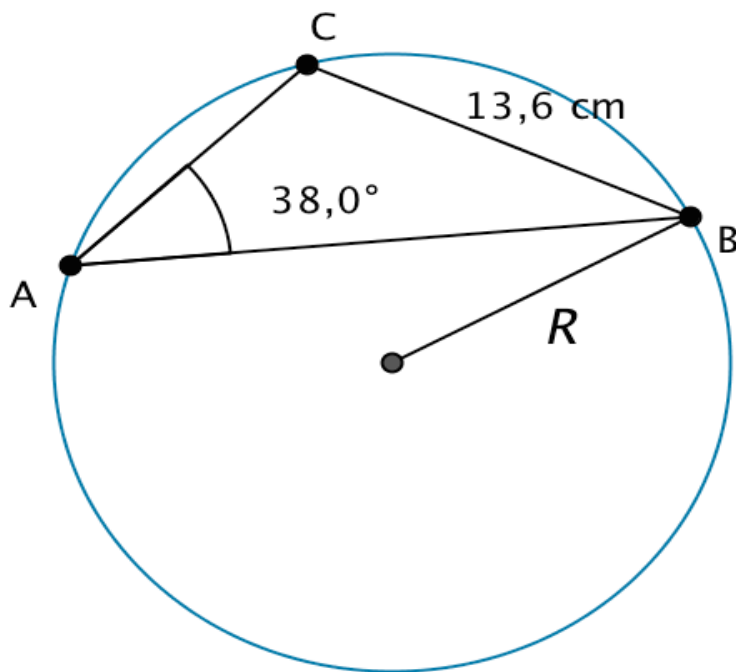
b)



Kolmion painopisteen P paikka säilyy.

Kolmion sisään piirretyn ympyrän painopiste S laskee, ympäri piirretyn ympyrän painopiste U nousee.

163



Ratkaistaan kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän säde laajennetun sinilauseen avulla.

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$$

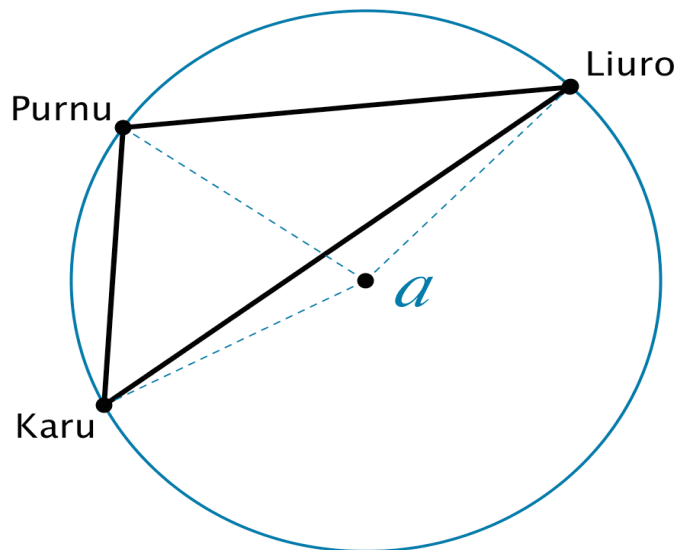
$$R = \frac{a}{2 \sin \alpha} = \frac{13,6}{2 \cdot \sin 38,0^\circ} = 11,045... \approx 11,0 \text{ (cm)}$$

Kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde on 11,0 cm.

Vastaus 11,0 cm

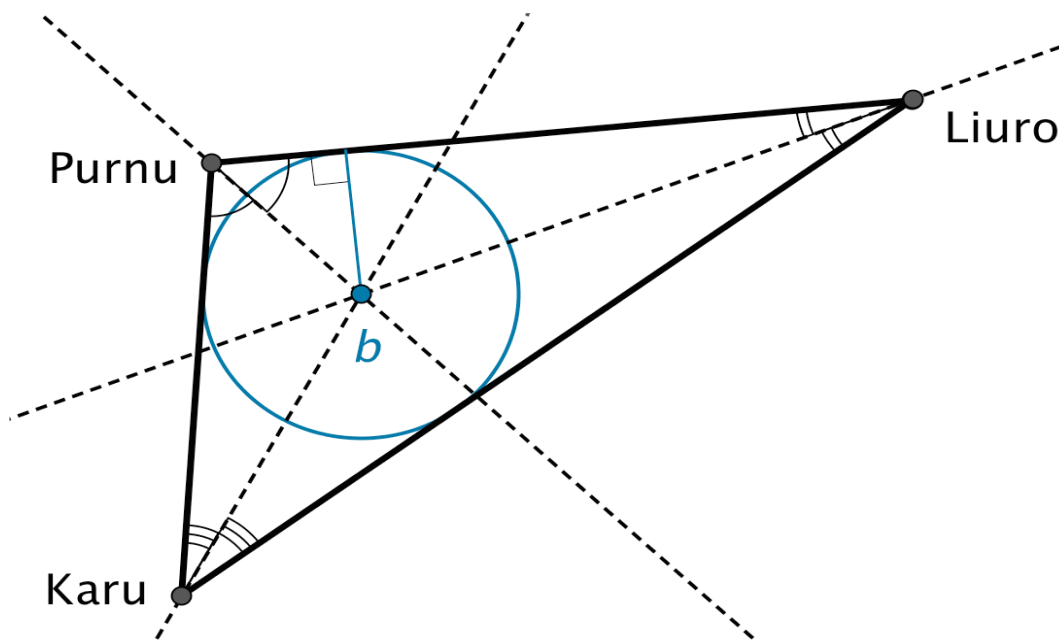
164

a)



Vesitorni sijaitsee kolmion sivujen keskinormaalien leikkauspisteessä. Piirtäminen onnistuu geometriaohjelmalla esimerkiksi kolmion kolmen kärkipisteen avulla.

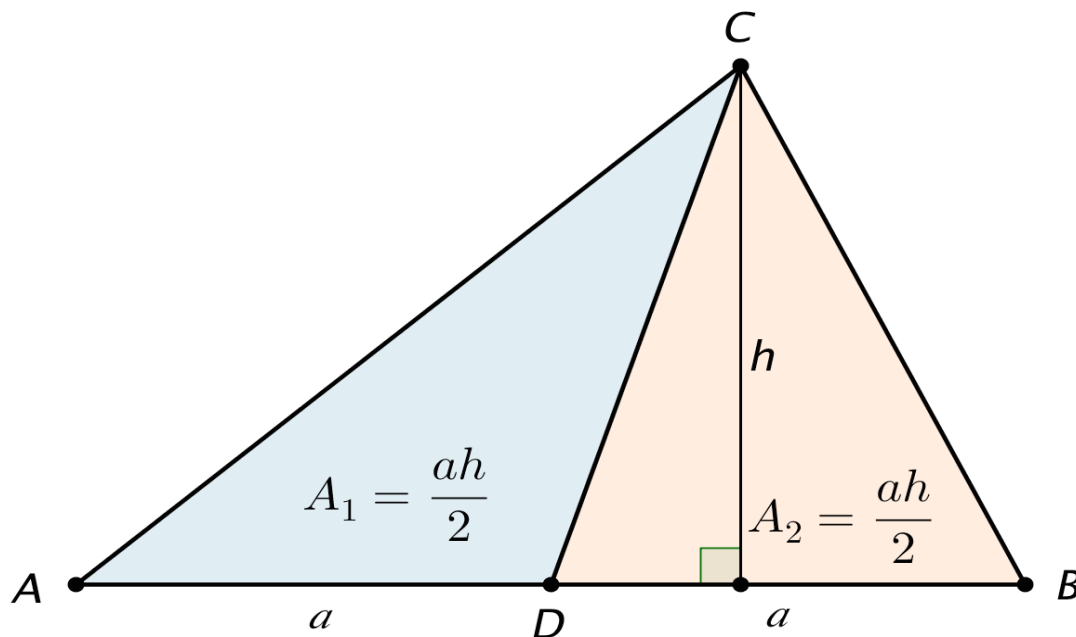
b)



Vesitorni sijaitsee kolmion kulmanpuolittajien leikkauspisteessä.

165

On osoitettava, että kolmion mediaani jakaa kolmion pinta-alan kahteen yhtä suureen osaan. Merkitään kolmion kannan pituutta $2a$:lla ja piirretään mediaani kolmion huipusta kannalle.



Huipusta piirretty mediaani (eli keskijana) jakaa kolmion kannan kahteen yhtä suureen osaan.

Mediaani jakaa kolmion kahteen pienempään kolmioon, joiden kummankin pinta-ala on $\frac{ah}{2}$.

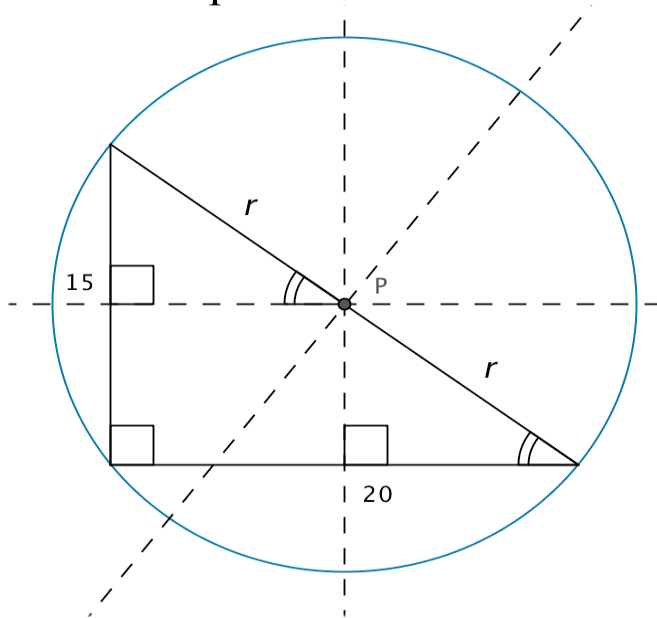
Siis mediaani puolittaa kolmion pinta-alan. $\square$

166

Kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste on kolmion sivujen keskinormaalien leikkauspisteessä.

Kateettien suuntaiset keskinormaalit erottavat suorakulmaisesta kolmiosta pienemmät suorakulmaiset kolmiot, jotka ovat alkuperäisen kolmion kanssa yhdenmuotoisia mittakaavassa 1 : 2.

Kateettien suuntaiset keskinormaalit siis leikkaavat hypotenuusan keskipisteessä. Kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde r on puolet hypotenuusan pituudesta.



$$\begin{aligned}
 (2r)^2 &= 15^2 + 20^2 & r &= (\pm)\sqrt{\frac{625}{4}} \\
 4r^2 &= 625 & &= \frac{25}{2} \\
 r^2 &= \frac{625}{4} & &= 12\frac{1}{2} = 12,5
 \end{aligned}$$

Vastaus

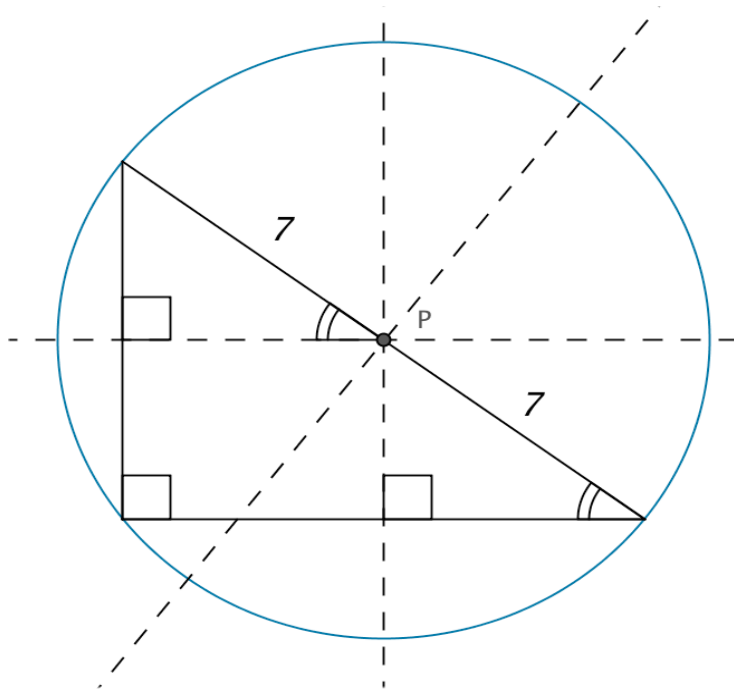
Säde on 12,5.

167

Kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste on kolmion sivujen keskinormaalien leikkauspisteessä.

Kateettien suuntaiset keskinormaalit erottavat suorakulmaisesta kolmiosta pienemmät suorakulmaiset kolmiot, jotka ovat alkuperäisen kolmion kanssa yhdenmuotoisia mittakaavassa 1 : 2.

Kateettien suuntaiset keskinormaalit leikkaavat hypotenuusan keskipisteessä. Kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde r on puolet hypotenuusan pituudesta.

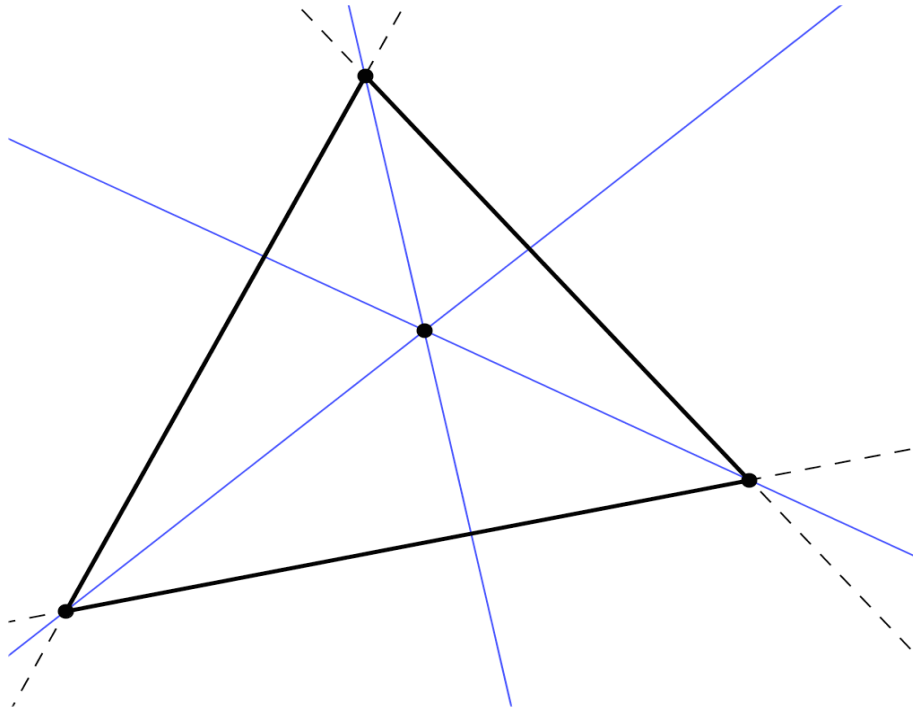


Hypotenuusan pituus on siis sama kuin ympyrän halkaisija d .

$$d = 2r = 2 \cdot 7 = 14$$

Vastaus Hypotenuusan pituus on 14.

168

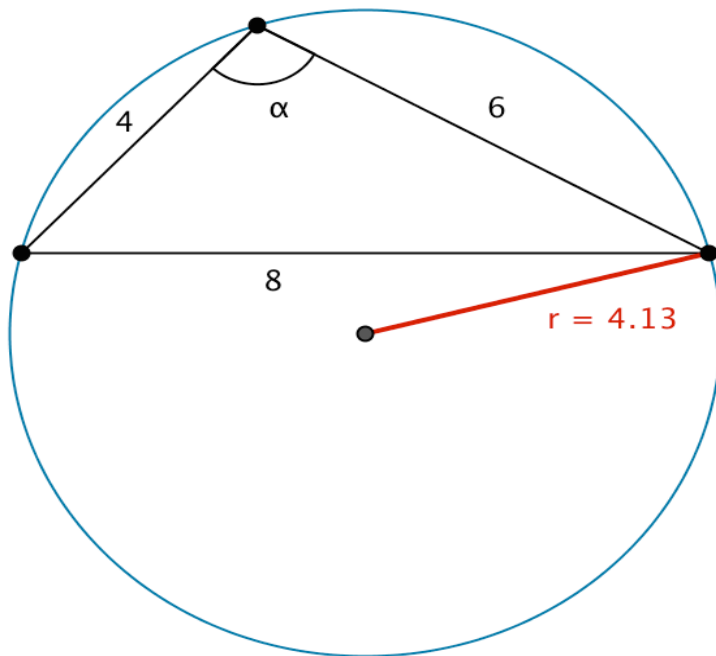


Siniset suorat kulkevat kolmion korkeusjanoja pitkin.

Mustat katkoviivat ovat kolmion sivuja pitkin kulkevia suoria, joita tarvitaan, mikäli korkeusjana ei osu kolmion sisään.

Kolmion muotoa voi muuttaa kärkipisteitä liikuttamalla, jolloin huomaa, että korkeusjanojen kautta kulkevat suorat leikkaavat aina samassa pisteessä, joka voi sijaita kolmion sisällä tai sen ulkopuolella.

169



Geometriaohjelman mukaan ympäri piirretyn ympyrän säde on 4,1.

Tarkistetaan tulos laajennetulla sinilauseella

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

Selvitetään tätä varten kulma α kosinilauseella.

$$8,0^2 = 4,0^2 + 6,0^2 - 2 \cdot 4,0 \cdot 6,0 \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{8,0^2 - 4,0^2 - 6,0^2}{-2 \cdot 4,0 \cdot 6,0} = -0,25$$

$$\alpha = \cos^{-1} -0,25 = 104,47...^\circ$$

Muodostetaan yhtälö säteen laskemiseksi.

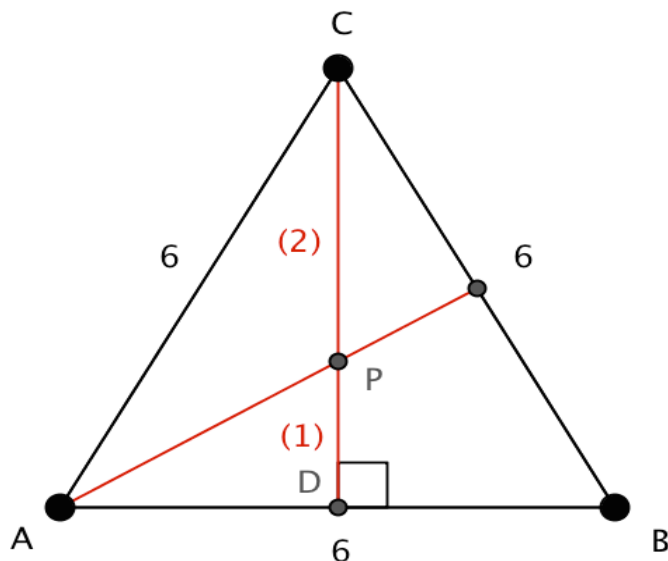
$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$$

$$R = \frac{a}{2 \sin \alpha} = \frac{8,0}{2 \cdot \sin 104,47...^{\circ}} = 4,13... \approx 4,1$$

Vastaus Säteen pituus on 4,1.

170

a)



Tasasivuisen kolmion mediaanit ovat samalla kolmion korkeusjanoja. Suorakulmaisesta kolmiosta ADC saadaan mediaanin CD pituus Pythagoraan lauseella.

$$|AC|^2 = |AD|^2 + |CD|^2$$

$$6^2 = 3^2 + |CD|^2$$

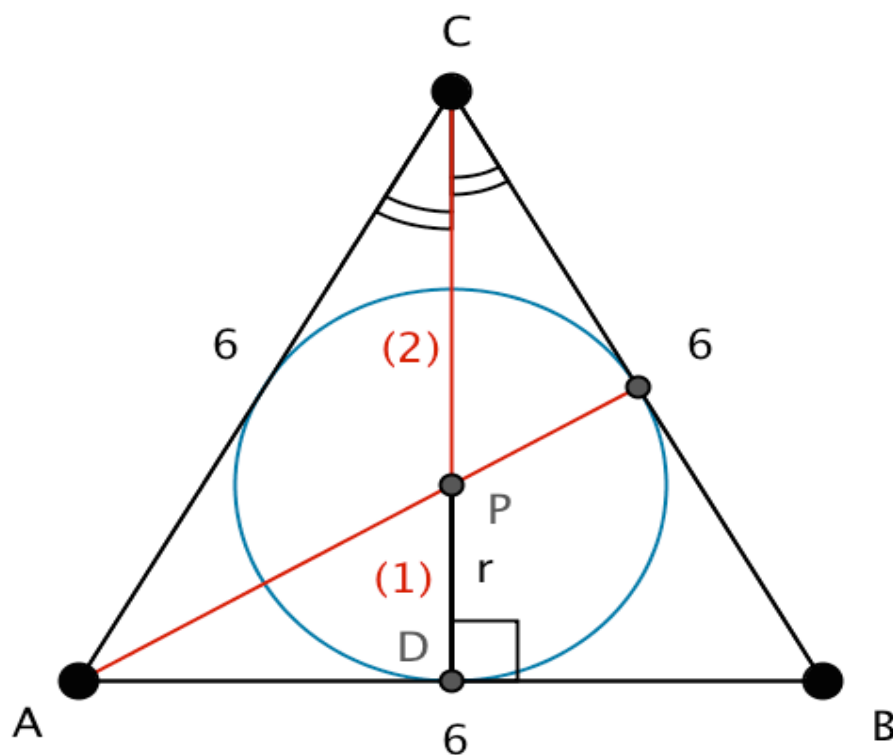
$$|CD| = (\pm)\sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = 3\sqrt{3}$$

Painopisteen P etäisyys kolmion kärjestä on

$$|CP| = \frac{2}{3} \cdot |CD| = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}.$$

- b) Kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste on kulmanpuolittajien leikkauspiste.

Tasasivuisen kolmion mediaanit ovat samalla kulmanpuolittajia, joten sisään piirretyn ympyrän keskipiste on myös mediaanien leikkauspiste.

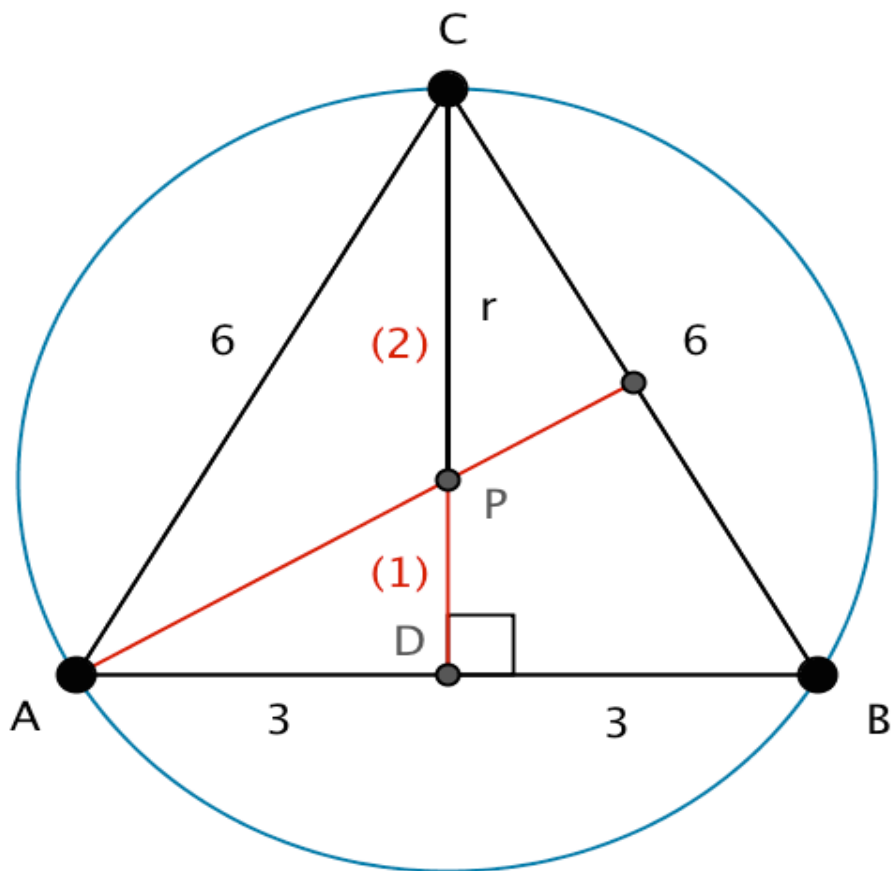


Sisään piirretyn ympyrän säde on

$$r = |PD| = \frac{1}{3} \cdot |CD| = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

- c) Kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste on kolmion sivujen keskinormaalien leikkauspiste.

Tasasivuisen kolmion mediaanit ovat samalla sivujen keskinormaaleja, joten sisään piirretyn ympyrän keskipiste on myös mediaanien leikkauspiste.

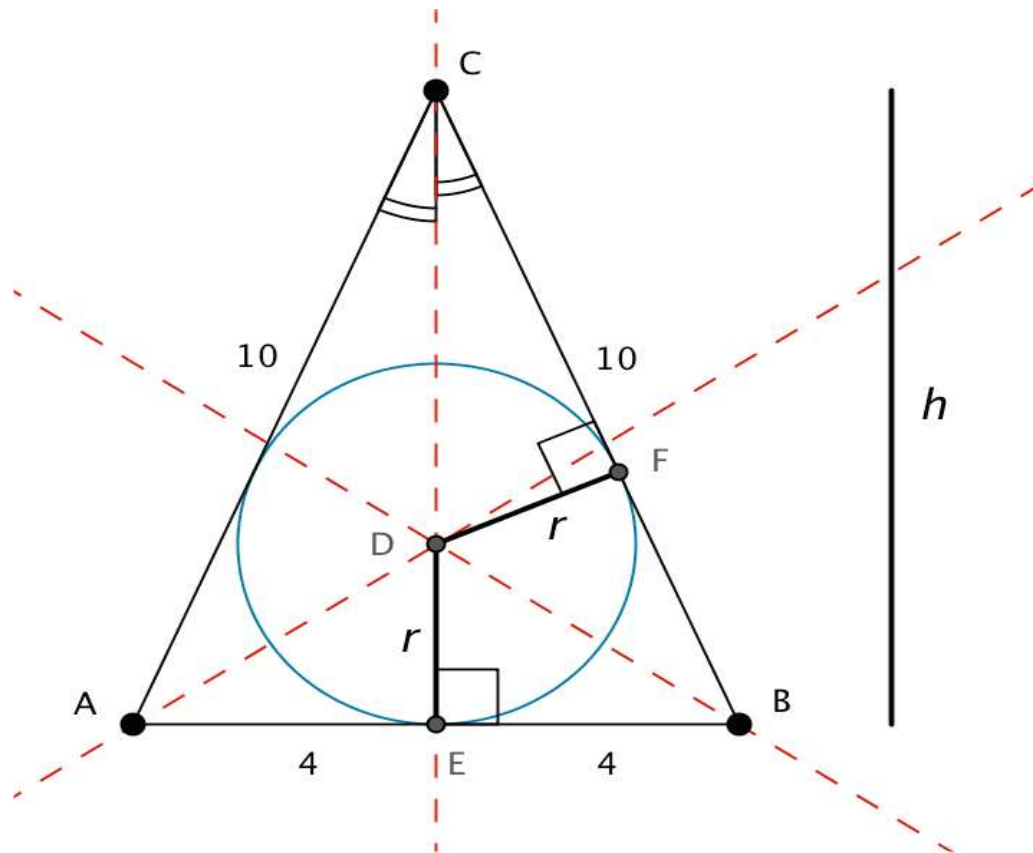


Ympäri piirretyn ympyrän säde on

$$r = |CP| = \frac{2}{3} \cdot |CD| = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

Vastaus a) $2\sqrt{3}$ b) $\sqrt{3}$ c) $2\sqrt{3}$

171



Kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste on kulmanpuolittajien leikkauspiste. Tasakylkisen kolmion huippukulman puolittaja on samalla myös kolmion korkeusjana.

Kolmiot BCE ja DFC ovat yhdenmuotoiset (kk), koska

- niissä on molemmissa suora kulma
- niillä on yhteisenä kulmana huippukulman puolikas $\angle DCF$.

Vastinjanojen suhde on vakio, joten voidaan muodostaa yhtälö.

$$\frac{|DF|}{|BE|} = \frac{|DC|}{|BC|} \quad \left| \begin{array}{l} |DF| = r, |BE| = 4 \\ |DC| = h - r, |BC| = 10 \end{array} \right.$$

$$\frac{r}{4} = \frac{h-r}{10} \quad \left| \begin{array}{l} 10^2 = h^2 + 4^2 \\ h^2 = 10^2 - 4^2 = 84 \\ h = (\pm)\sqrt{84} = 2\sqrt{21} \end{array} \right.$$

$$\frac{r}{4} = \frac{2\sqrt{21} - r}{10}$$

$$10r = 8\sqrt{21} - 4r$$

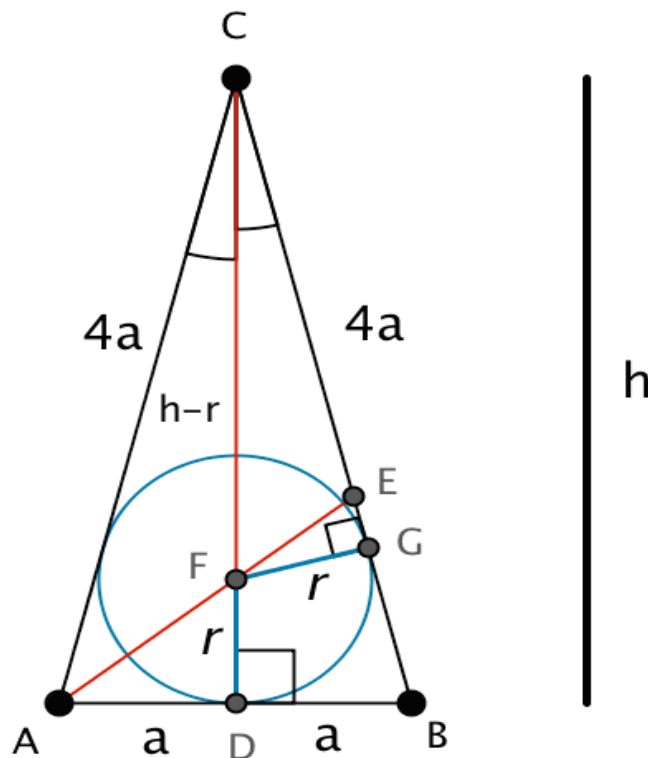
$$14r = 8\sqrt{21}$$

$$r = \frac{8\sqrt{21}}{14} = \frac{4\sqrt{21}}{7}$$

Kolmion sisään piirretyn ympyrän säde on $\frac{4\sqrt{21}}{7}$.

Vastaus $\frac{4\sqrt{21}}{7}$

172



Kolmion sisään piiretyn ympyrän keskipiste on kulmanpuolittajien leikkauspiste. Tasakylkisen kolmion huippukulman puolittaja on myös kolmion korkeusjana.

Kolmiot FGC ja DBC ovat yhdenmuotoiset (kk), koska

- molemmissa on suora kulma
- kolmioilla on yhteinen kulma $\sphericalangle FCG = \sphericalangle DCB$.

Vasinjanojen suhde on vakio. Muodostetaan yhtälö.

$$\frac{|FC|}{|BC|} = \frac{|FG|}{|BD|} \quad \left| \begin{array}{l} |FC| = h - r, |BC| = 4a \\ |FG| = r, |BD| = a \end{array} \right.$$

$$\frac{h - r}{4a} = \frac{r}{a} \quad | \cdot a (> 0)$$

$$\frac{h-r}{4} = \frac{r}{1}$$

$$h-r = 4r$$

$$5r = h$$

$$r = \frac{h}{5}$$

$$(4a)^2 = h^2 + a^2$$

$$h^2 = 16a^2 - a^2$$

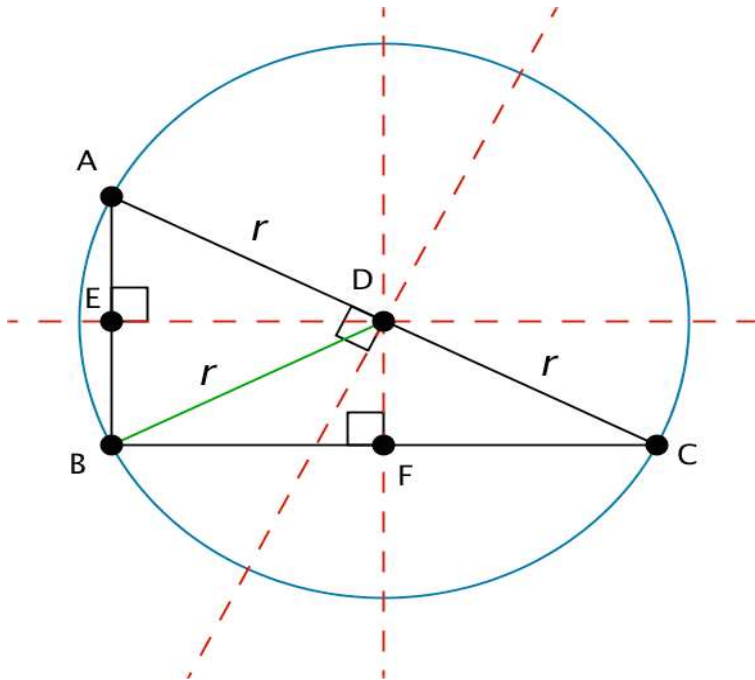
$$h = (\pm)\sqrt{15a^2} = \sqrt{15}|a| = \sqrt{15}a$$

$$= \frac{\sqrt{15}a}{5} = \frac{\sqrt{15}}{5}a$$

Kolmion sisään piirretyn ympyrän säde on $\frac{\sqrt{15}}{5}a$.

Vastaus $\frac{\sqrt{15}}{5}a$

173



Käytetään kuvan merkintöjä.

Oletuksena on, että kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän keskipiste on kolmion sivulla AC . On osoitettava, että kolmio ABC on suorakulmainen.

Kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste on kolmion sivujen keskinormaalien leikkauspiste. Koska ympyrän keskipiste D on kolmion sivulla AC , se on välttämättä samalla sivun AC keskipiste.

Ympyrän säde $r = |AD| = |DC| = |BD|$.

Alkuperäinen kolmio ABC jakautuu ympyrän säteen BD sekä keskinormaaleilla olevien janojen ED ja FD avulla neljään pienempään kolmioon.

Kolmioissa BDE ja AED on yhtä pitkät vastinsivut:

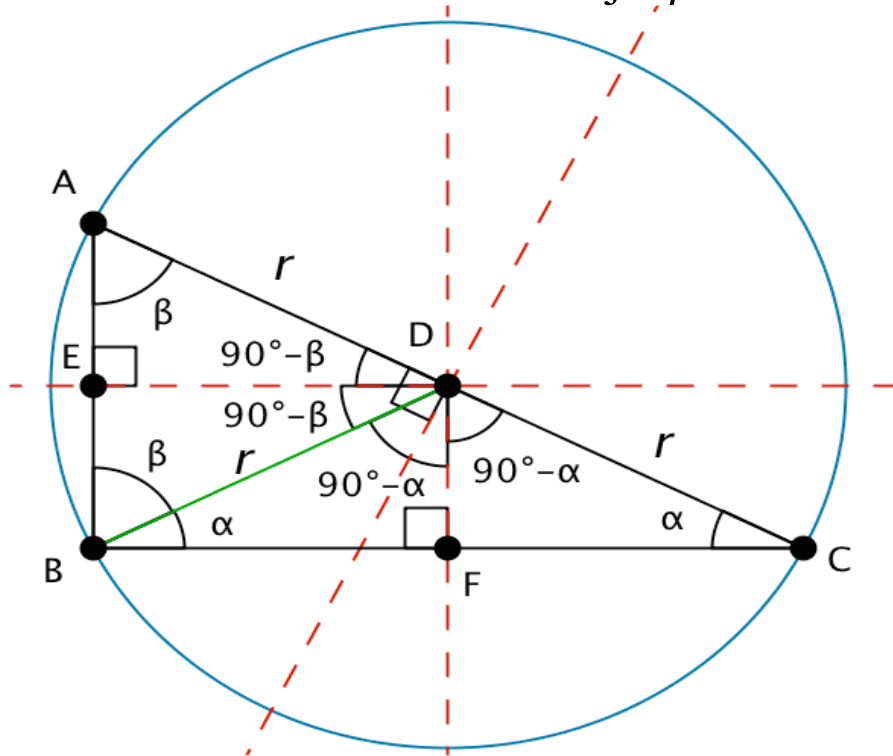
$|AD| = |BD|$, $|BE| = |EA|$ ja sivu ED on yhteinen.

Siis kolmiot BDE ja AED ovat yhdenmuotoiset mittakaavassa $1 : 1$ eli ne ovat yhtenevät.

Vastaavasti kolmioissa BFD ja CDF on yhtä pitkät vastinsivut:
 $|BF| = |FC|$, $|BD| = |DC|$ ja sivu FD on yhteinen.

Siis myös kolmiot BFD ja CDF ovat yhdenmuotoiset
 mittakaavassa 1 : 1 eli ne ovat yhtenevät.

Täydennetään kuvioon kulmat α ja β .



Kulmat ADB ja BDC ovat vieruskulmia, joten

$$\sphericalangle ADB + \sphericalangle BDC = 180^\circ$$

$$2 \cdot (90^\circ - \beta) + 2 \cdot (90^\circ - \alpha) = 180^\circ$$

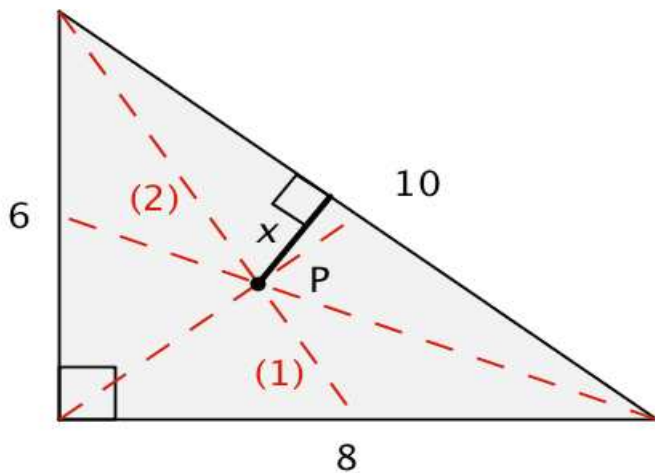
$$180^\circ - 2\beta + 180^\circ - 2\alpha = 180^\circ$$

$$180^\circ = 2\alpha + 2\beta \quad | :2$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

Siis kolmion ABC kulma $\sphericalangle CBA = \alpha + \beta = 90^\circ$, joten saatiin osoitettua kolmio ABC suorakulmaiseksi. $\square$

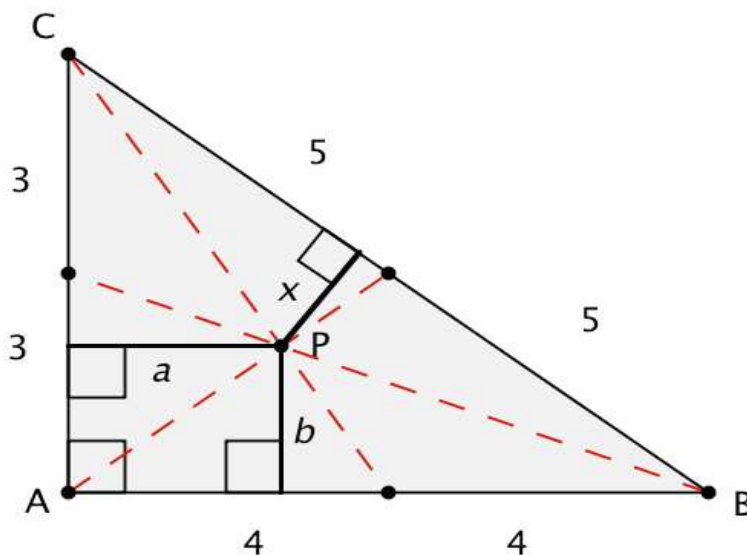
174



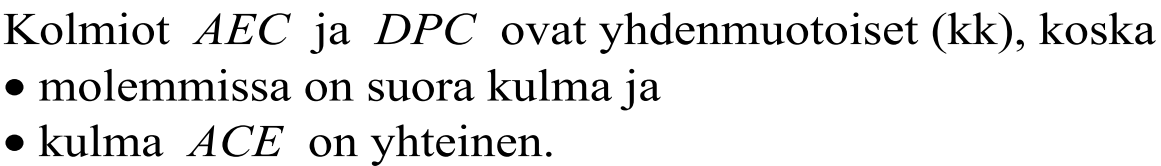
Painopiste P jakaa mediaanit 2 : 1 kärjestä lukien.
 Merkitään kysyttyä painopisteen P etäisyyttä hypotenuusasta kirjaimella x .

Huomaa, että mediaani jakaa kolmion sivut kahteen yhtä pitkään osaan. Tutkittava x :n pituinen jana ei ole osa mediaania, joten se ei jaa hypotenuusaa kahteen yhtä pitkään osaan.

Täydennetään kuviota.



Selvitetään kirjaimilla a ja b merkittyjen janojen pituudet yhdenmuotoisten kolmioiden avulla. Lasketaan tämän jälkeen kysytty x kolmion pinta-alan avulla.


$$\frac{a}{4} = \frac{2}{3} \quad \text{eli} \quad a = \frac{8}{3}$$


Saadaan yhtälö vastinjanojen suhteen avulla.

$$\frac{b}{3} = \frac{2}{3} \quad \text{eli} \quad b = \frac{6}{3}$$

Alkuperäisen kolmion ABC pinta-ala on

$$A = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24.$$

Toisaalta kolmion ABC pinta-ala on

$$A = \frac{6 \cdot a}{2} + \frac{8 \cdot b}{2} + \frac{10 \cdot x}{2} \quad \left| \begin{array}{l} a = \frac{8}{3} \\ b = \frac{6}{3} \end{array} \right.$$

$$= \frac{6 \cdot \frac{8}{3}}{2} + \frac{8 \cdot \frac{6}{3}}{2} + \frac{10x}{2}$$

$$= 8 + 8 + 5x$$

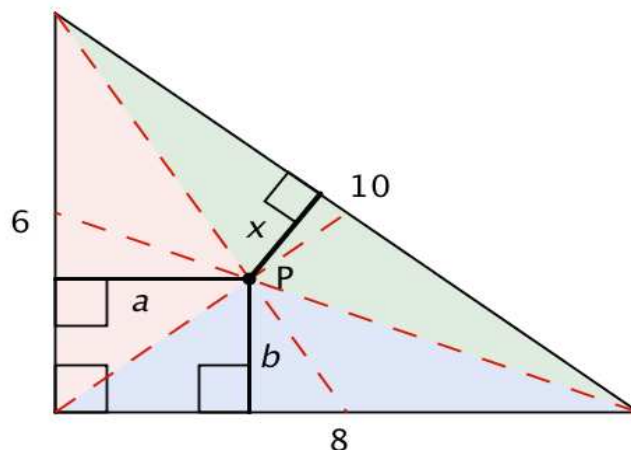
$$= 16 + 5x.$$

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x .

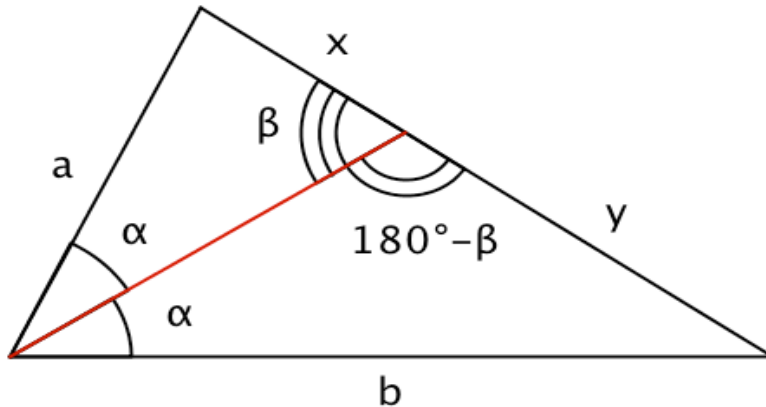
$$16 + 5x = 24 \quad \text{eli} \quad 5x = 8 \quad \text{eli} \quad x = \frac{8}{5}$$

Painopisteen etäisyys hypotenuusasta on $\frac{8}{5}$.

Vastaus $\frac{8}{5}$



175



On osoitettava, että kolmion kulmanpuolittaja jakaa kulman vastaisen sivun viereisten suhteessa eli $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$.

Tapa 1

Sovelletaan sinilausetta erikseen molempiin syntyneisiin osakolmioihin.

$$\begin{cases} \frac{x}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin \beta} \\ \frac{y}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin(180^\circ - \beta)} \end{cases} \quad \left| \sin(180^\circ - \beta) = \sin \beta \right.$$

$$\begin{cases} x \sin \beta = a \sin \alpha \\ y \sin \beta = b \sin \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \alpha = \frac{x \sin \beta}{a} \\ y \sin \beta = b \sin \alpha \end{cases} \quad \left| \text{Sijoitetaan alempaan yhtälöön.} \right.$$

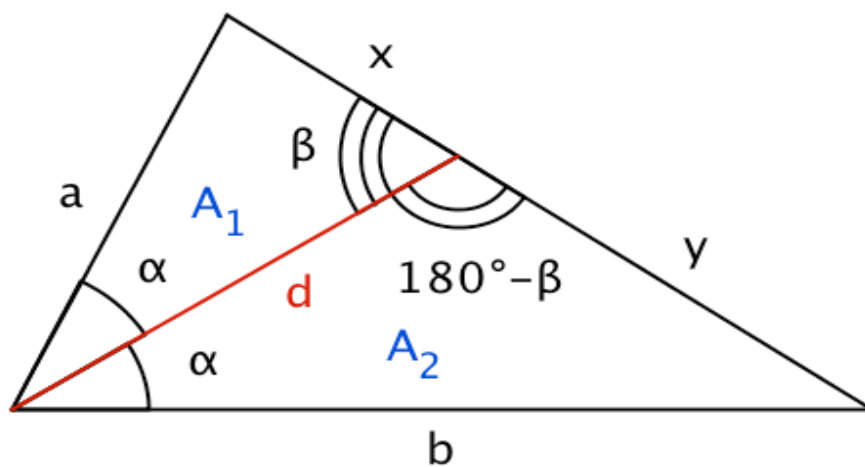
$$y \sin \beta = b \cdot \frac{x \sin \beta}{a} \quad \left| \cdot \frac{a}{\sin \beta} \right.$$

$$y \cdot a = b \cdot x \quad \left| : by \right.$$

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$$

Saatiin osoitettua, että $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$, joten väite on todistettu. $\square$

Tapa 2



Lasketaan osakolmioiden pinta-alat A_1 ja A_2 ja muodostetaan yhtälöpari.

$$(A_1 =) \frac{1}{2} ad \sin \alpha = \frac{1}{2} xd \sin \beta \quad \left| \cdot \frac{2}{d} \right.$$

$$a \sin \alpha = x \sin \beta$$

$$(A_2 =) \frac{1}{2} b d \sin \alpha = \frac{1}{2} y d \sin(180^\circ - \beta) \quad \left| \cdot \frac{2}{d} \right.$$

$$b \sin \alpha = y \sin(180^\circ - \beta) \quad \left| \sin(180^\circ - \beta) = \sin \beta \right.$$

$$b \sin \alpha = y \sin \beta$$

Muodostetaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} a \sin \alpha = x \sin \beta \\ b \sin \alpha = y \sin \beta \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Ratkaistaan ylemmästä } \sin \alpha \\ \text{ja sijoitetaan alempaan yhtälöön.} \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} \sin \alpha = \frac{x \sin \beta}{a} \\ b \sin \alpha = y \sin \beta \end{cases}$$

$$b \sin \alpha = y \sin \beta$$

$$b \cdot \frac{x \sin \beta}{a} = y \sin \beta \quad \left| : \sin \beta \right.$$

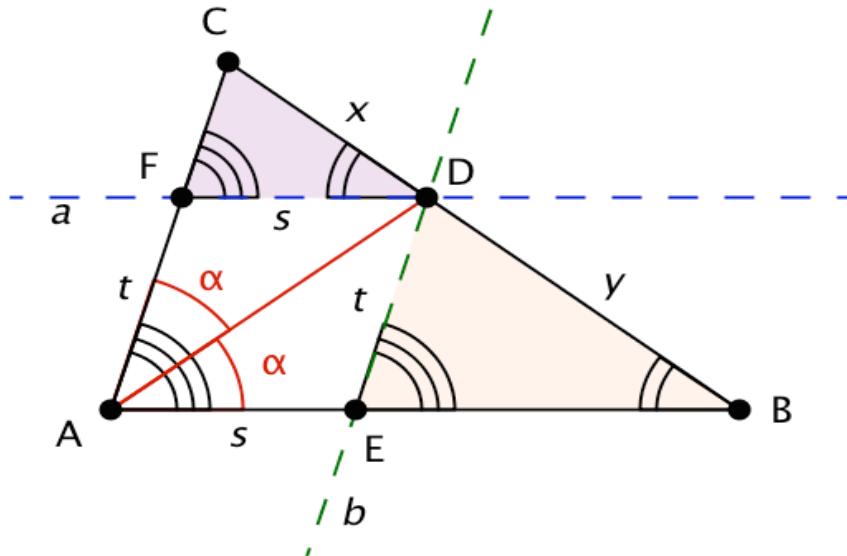
$$b \cdot \frac{x}{a} = y \quad \left| \cdot \frac{a}{by} \right.$$

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$$

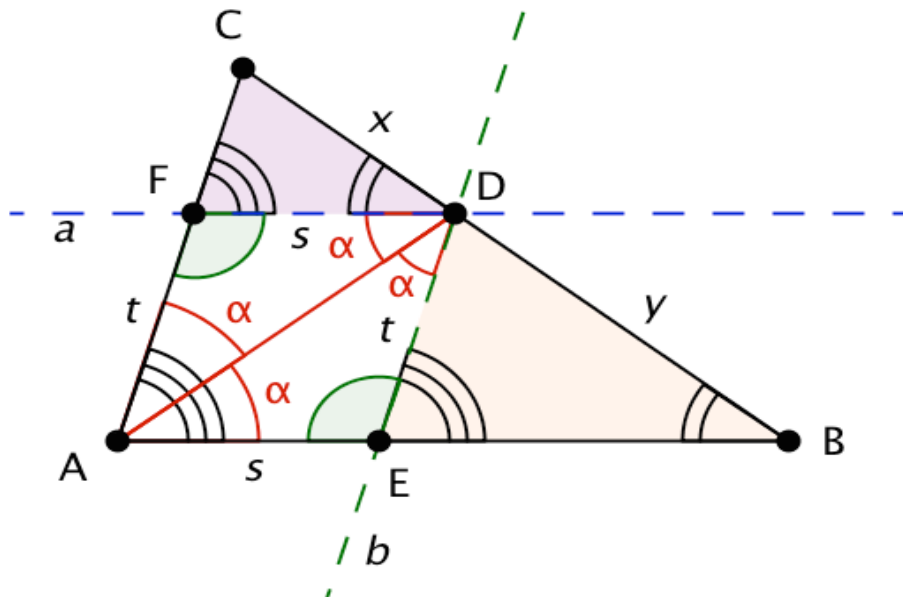
Saatiin osoitettua, että $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$, joten väite on todistettu. $\square$

Tapa 3

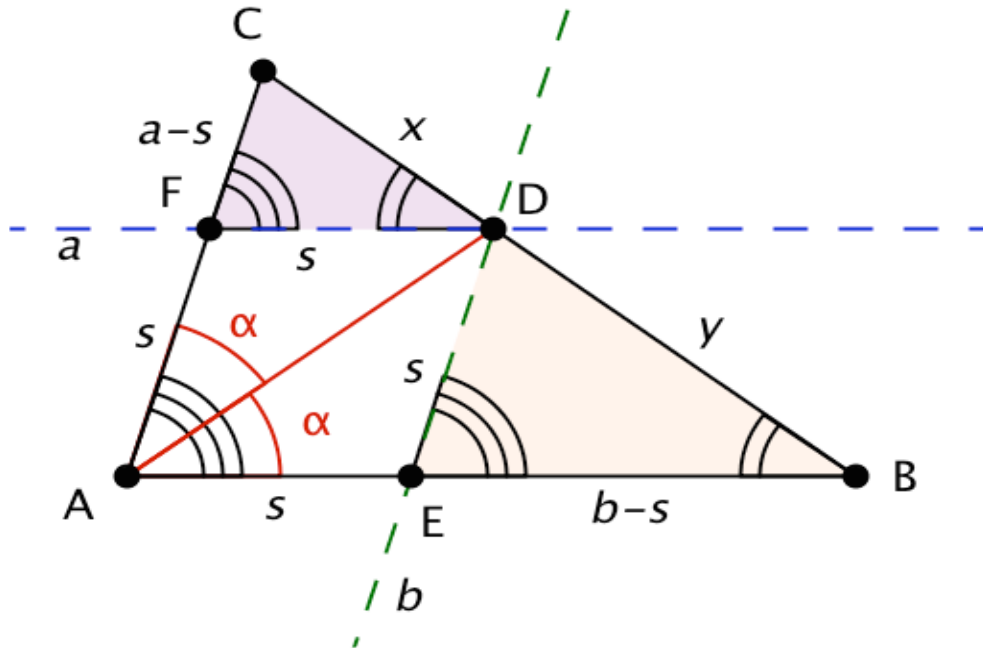
Piirretään kulmanpuolittajan ja sivun BC leikkauspisteeseen sivujen AC ja AB suuntaiset suorat. Syntyy kolme kolmiota: $\triangle ABC$, $\triangle EBD$ ja $\triangle FDC$.



Kolmiot $\triangle ABC$, $\triangle EBD$ ja $\triangle FDC$ ovat yhdenmuotoiset (kk), koska niissä on kaksi samaa vastinkulmaparia (samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuret, koska piirretyt suorat ovat yhdensuuntaisia kolmion sivujen kanssa).



Lisäksi havaitaan, että kolmiot AED ja AFD ovat tasakylkisiä, koska niiden kantakulmat ovat yhtäsuuret (α , punainen kaari), joten $s = t$.



Yhdenmuotoisissa kolmioissa vastinjanojen suhde on vakio.

Kolmioiden ABC ja EBD avulla saadaan yhtälö

$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|ED|}{|EB|}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{s}{b-s}$$

Toisaalta kolmioiden FDC ja EBD avulla saadaan yhtälö

$$\frac{|CD|}{|DB|} = \frac{|FD|}{|EB|}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{s}{b-s}$$

Siis $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$ ja väite on todistettu. $\square$

176

a)

$$p = 2\pi r \quad r = 4,5$$

$$= 2\pi \cdot 4,5$$

$$= 28,27\dots$$

$$\approx 28$$

piiri on 28 cm

$$A = \pi r^2 \quad r = 4,5$$

$$= \pi \cdot 4,5^2$$

$$= 63,617\dots$$

$$\approx 64$$

Ala on 64 cm²

b)

$$p = \pi d \quad d = 5,0$$

$$= \pi \cdot 5,0$$

$$= 15,7\dots$$

$$\approx 16$$

piiri on ≈ 16 cm

$$r = \frac{d}{2} = \frac{5,0}{2} = 2,5$$

$$A = \pi r^2 \quad r = 2,5$$

$$= \pi \cdot 2,5^2$$

$$= 19,63\dots$$

$$\approx 20$$

Ala on 20 cm²

Vastaus: a) $p \approx 28$ cm, $A \approx 64$ cm²
 b) $p \approx 16$ cm, $A \approx 20$ cm²

177

$$s = 200 \text{ m}$$

$$d = 26 \text{ ''} = 26 \cdot 2,54 \text{ cm} = 66,04 \text{ cm}$$

$$p = \pi \cdot d = \pi \cdot 66,04$$

$$\text{Pyörähdysten määrä } \frac{s}{p} = \frac{20000}{66,04 \cdot \pi} = 96,399... \approx 96$$

Vastaus 96 pyörähdystä

178

Sisempi kehätie $p_1 = 97$ km

$$2\pi r = 97 \quad |:2\pi$$

$$r = \frac{97}{2\pi}$$

Ulompi kehätie: säde $R = 97 + 8,5 = 105,5$

$$p_2 = 2\pi R = 2\pi \left(\frac{97}{2\pi} + 8,5 \right) = 97 + 2\pi \cdot 8,5 = 150,4\dots$$

Ulomman kehätien pituus on 150 km

Vastaus 150 km

179

$$A = \pi r^2$$

$$A = 18 \text{ cm}^2$$

Muodostetaan yhtälö

$$\pi r^2 = 18 \quad | : \pi$$

$$r^2 = \frac{18}{\pi}$$

$$r = \pm \sqrt{\frac{18}{\pi}} \quad r > 0$$

$$r = \sqrt{\frac{18}{\pi}} = 2,393... \approx 2,4 \text{ (cm)}$$

Vastaus 2, 4 cm

180

$$p = 270 \text{ m}$$

$$p = 2\pi r$$

$$r = \frac{p}{2\pi} = \frac{270}{2\pi}$$

$$A = \pi r^2$$

$$A = \pi \cdot \left(\frac{270}{2\pi} \right)^2$$

$$= 5801,197...(\text{m}^2) \quad 1 \text{ ha} = 10\,000 \text{ m}^2$$

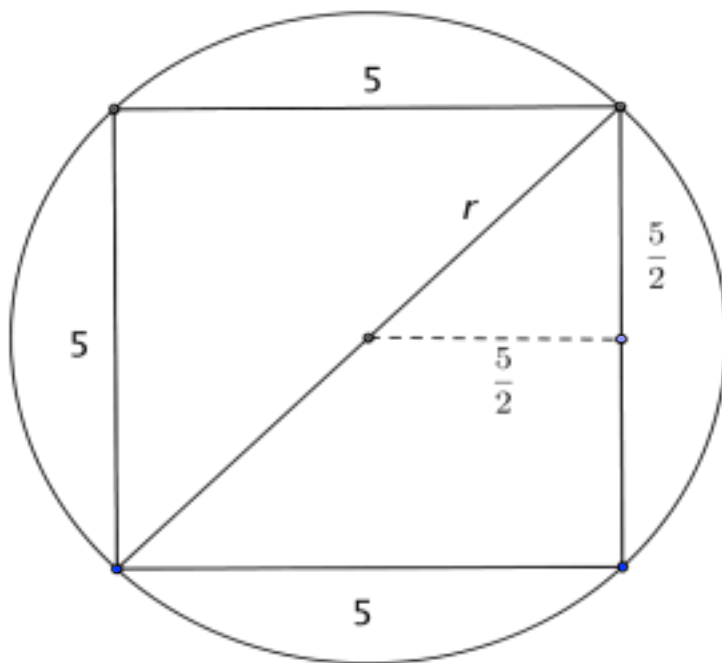
$$A = \frac{5801,197...}{10000} = 0,5801... \approx 0,58 \text{ ha}$$

Vastaus 0,58 ha

181

Piirrä ensin jana, jonka pituus on 5. Jatka piirtämistä valitsemalla säännöllinen monikulmio, jossa on sivujen lukumäärä on 4.

Piirrä ympyrä valitsemalla kolmen pisteen kautta kulkeva ympyrä. Valitse sitten nelion kärkipistettä.



$$A = \pi r^2$$

Ratkaistaan ympyrän säteen r neliö Pythagoraan lauseella.

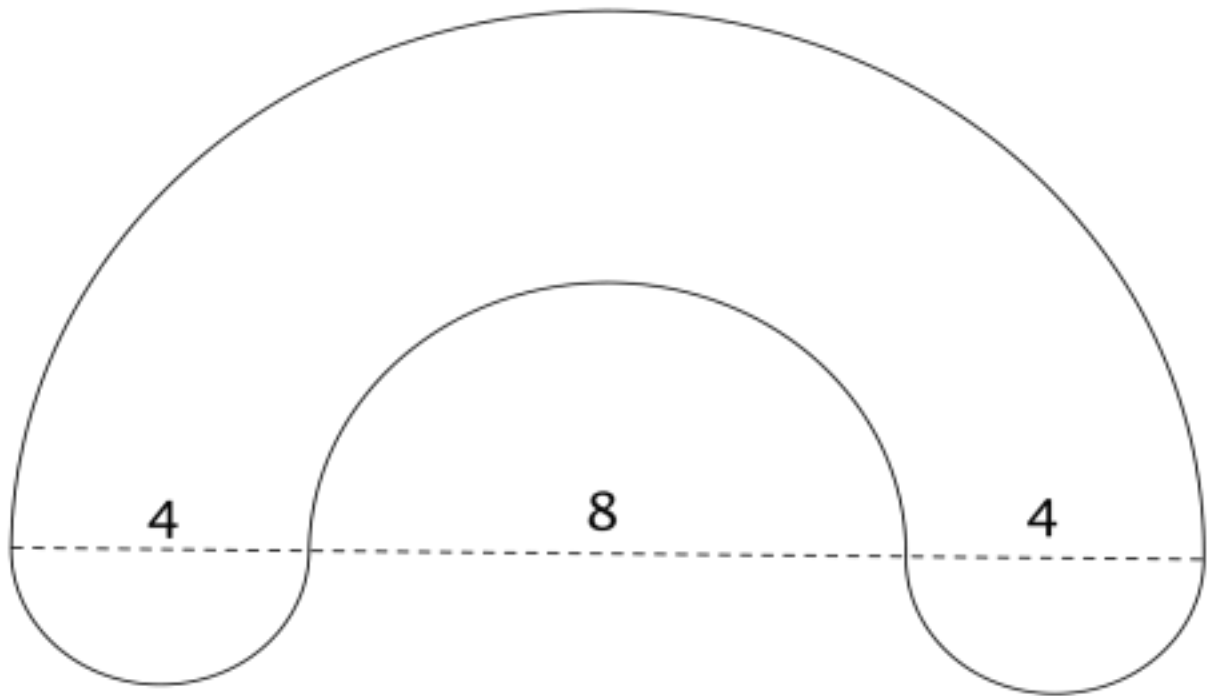
$$r^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$$

$$A = \pi \cdot \frac{25}{2} = \frac{25}{2} \pi$$

Vastaus

$$A = \frac{25}{2} \pi$$

182



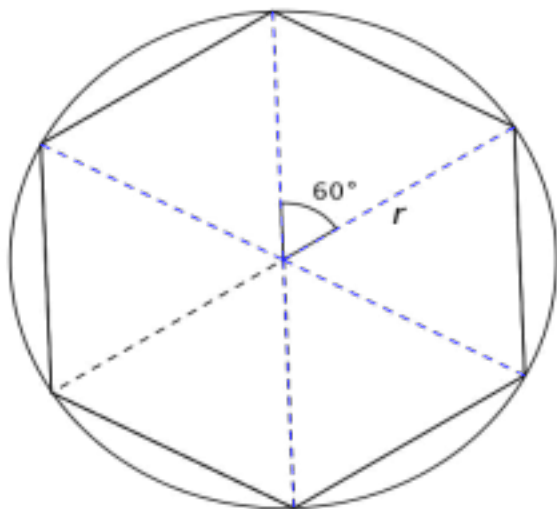
Alue koostuu puoliympyröistä, joiden säteet ovat 4, 8, 2 ja 2.

$$p = 2\pi \cdot 2 + \pi \cdot 4 + \pi \cdot 8 = 16\pi$$

$$A = \frac{1}{2}\pi \cdot 8^2 - \frac{1}{2}\pi \cdot 4^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}\pi \cdot 2^2 = 28\pi$$

Vastaus $p = 16\pi, A = 28\pi$

183



Säännöllinen kuusikulmio on muodostunut kuudesta tasasivuisesta kolmiosta, joiden sivun pituus on ympyrän säde r .

Kuusikulmion pinta-ala on

$$A_k = 6 \cdot \frac{r^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3r^2 \sqrt{3}}{2}.$$

Ympyrän pinta-ala on

$$A_y = \pi r^2.$$

Alojen suhde on

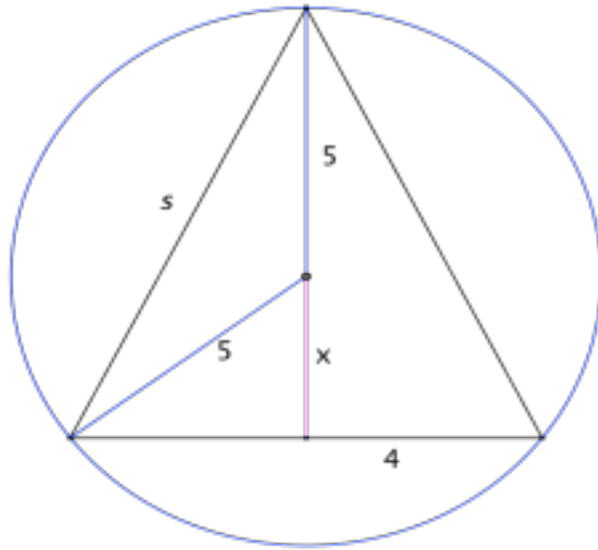
$$\frac{A_y}{A_k} = \frac{\pi r^2}{\frac{3r^2 \sqrt{3}}{2}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = 1,209... \approx 1,21$$

Ympyrän pinta-ala 1,21ertainen kuusikulmion pinta-alaan nähden. Ympyrän pinta-ala on 121 % kuusikulmion pinta-alasta.

Ympyrän pinta-ala on 21 % suurempi

Vastaus 21 %

184



Ratkaistaan x Pythagoraan lauseella.

$$x^2 + 4^2 = 5^2$$

$$x^2 = 5^2 - 4^2 = 9$$

$$x = \pm\sqrt{9} \quad x > 0$$

$$x = 3$$

Kolmion kyljen pituus voidaan ratkaista nyt Pythagoraan lauseella.

$$s^2 = 4^2 + (3+5)^2$$

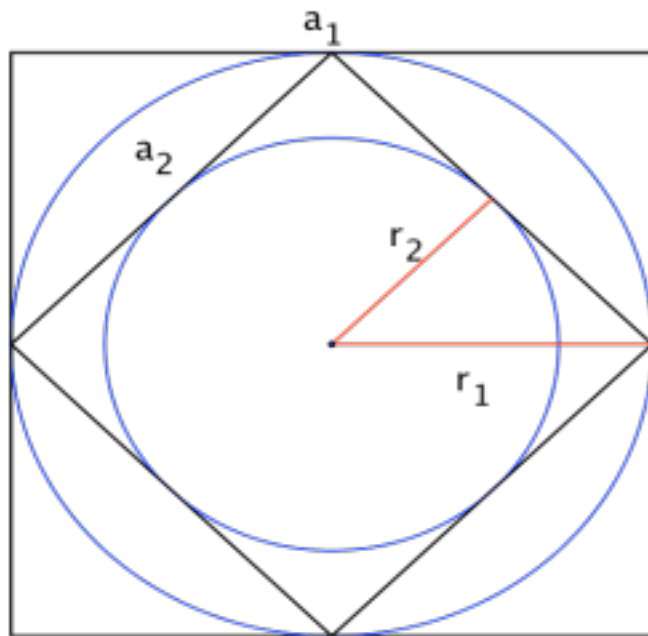
$$s^2 = 16 + 64 = 80$$

$$s = \pm\sqrt{80} \quad s > 0$$

$$s = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

Vastaus $4\sqrt{5}$

185



Ensimmäisen neliön sisään piirretyn ympyrän säde on
 $r_1 = \frac{32}{2} = 16$. Ympyrän sisään piirretyn neliön halkaisija on
 ympyrän halkaisija. Ratkaistaan toisen neliön sivun pituus.

$$a_2 \sqrt{2} = 2r_1 = 32$$

$$a_2 = \frac{32}{\sqrt{2}}$$

Toisen ympyrän säde on

$$\frac{a_2}{2} = \frac{32}{2\sqrt{2}} = \frac{16}{\sqrt{2}}$$

Ympyröiden säteet muodostavat geometrisen jonon: $16, \frac{16}{\sqrt{2}}, \dots$

Suhdeluku $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ympyröiden pinta-alojen suhdeluku $q^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$.

Ensimmäisen ympyrän pinta-ala $A_1 = \pi \cdot 16^2 = 256\pi$.

Alojen summa

$$S = \frac{A_1(1 - q^n)}{1 - q} \quad A_1 = 256\pi, \quad q = \frac{1}{2}$$

$$S = \frac{256\pi \left(1 - \frac{1}{2^{10}}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1023\pi}{2}$$

Vastaus $\frac{1023\pi}{2}$

186

$$r = 6400 \text{ km}$$

$$d = 2 \cdot r = 2 \cdot 6400 \text{ km} = 12800 \text{ km}$$

Maapallon radan pituus

$$p = 2\pi \cdot 150 \cdot 10^6 \text{ km}$$

Lasketaan Maapallon halkaisijan suhde radan pituuteen

$$\frac{12800}{2\pi \cdot 150 \cdot 10^6}$$

Maapallo kiertää yhden täyden kierroksen Auringon ympäri 365 päivässä.

Maapallo kulkee halkaisijansa pituisen matkan

$$\frac{12800}{2\pi \cdot 150 \cdot 10^6} \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 = 7,138... \text{ minuutissa.}$$

Vastaus

7,1 minuutissa

187

$$28'' = 28 \cdot 2,54 \text{ cm} = 71,12 \text{ cm} = 0,7112 \text{ m}$$

$$26'' = 26 \cdot 2,54 \text{ cm} = 66,04 \text{ cm} = 0,6604 \text{ m}$$

$$\text{Mittarin lukema } 23,5 \text{ km} = 23500 \text{ m}$$

Pyörähdysten määrä:

$$\frac{23500}{0,7112} = 33042,744\dots$$

Todellinen matka:

$$33042,744\dots \cdot 0,6604 \text{ m} = 2181,4\dots \text{ m} \approx 21,8 \text{ km}$$

Vastaus 21,8 km

188

Kartalla: $d = 2,1$ cm

$r = 1,05$ cm

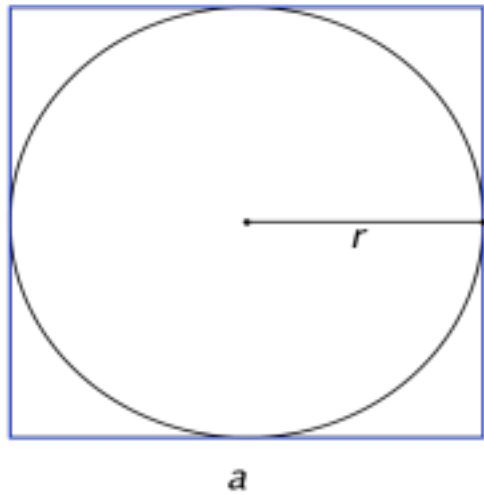
$$A = \pi r^2 = \pi \cdot 1,05^2 \text{ cm}^2$$

Todellinen pinta-ala:

$$\begin{aligned} A &= \pi \cdot 1,05^2 \cdot 400000^2 \text{ cm}^2 \\ &= \frac{\pi \cdot 1,05^2 \cdot 400000^2}{100000^2} = 55,417... \approx 55,4 \text{ (km}^2\text{)} \end{aligned}$$

Vastaus 55 km^2

189



Ympyrän säde on puolet neliön sivun pituudesta, $r = \frac{a}{2}$.

Neliön pinta-ala on $A_n = a^2$. Ympyrän pinta-ala on

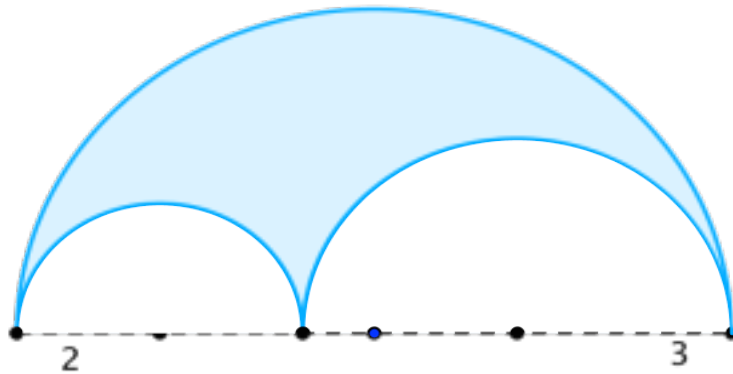
$$A_y = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{4}.$$

$$\text{Alojen suhde: } \frac{A_y}{A_n} = \frac{\frac{\pi a^2}{4}}{a^2} = \frac{\pi}{4} = 0,785\dots$$

Ympyrän pinta-ala on 79 % neliön pinta-alasta.

Vastaus 79 %

190



Ison puoliympyrän säde $R = 2 + 3 = 5$.

Varjostetun kuvion piiri $p = 5\pi + 2\pi + 3\pi = 10\pi$.

Ison puoliympyrän pinta-ala $A_1 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 5^2 = \frac{25}{2} \pi$.

Pienten puoliympyröiden pinta-alat ovat $A_2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 2^2 = 2\pi$ ja

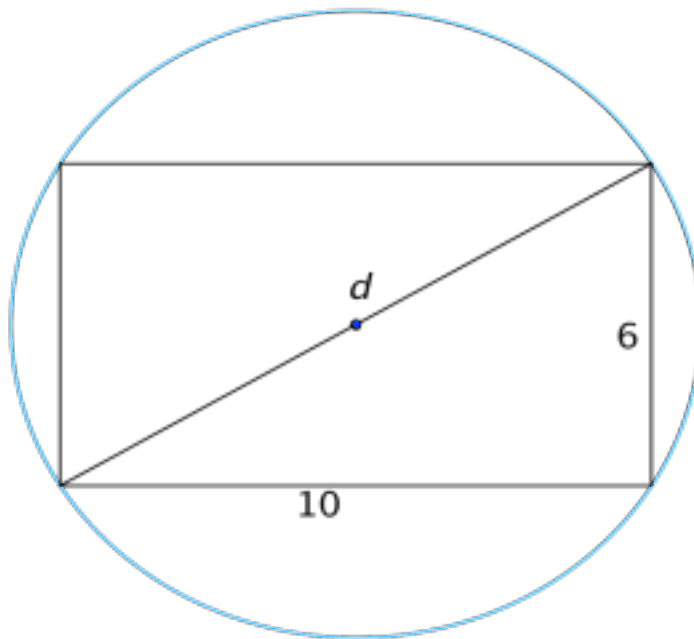
$$A_3 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 3^2 = \frac{9}{2} \pi.$$

Varjostetun kuvion pinta-ala

$$A = A_1 - A_2 - A_3 = \frac{25}{2} \pi - 2\pi - \frac{9}{2} \pi = 6\pi.$$

Vastaus $p = 10\pi$ ja $A = 6\pi$

191



Suorakulmion lävistäjä d on ympyrän halkaisija. Ratkaistaan d Pythagoraan lauseella.

$$d^2 = 10^2 + 6^2 = 136$$

$$d = \sqrt{136} = 2\sqrt{34}$$

$$\text{Ympyrän säde } r = \frac{d}{2} = \sqrt{34}.$$

$$\text{Ympyrän pinta-ala } A_y = \pi r^2 = 34\pi.$$

$$\text{Suorakulmion pinta-ala } A_{sk} = 10 \cdot 6 = 60.$$

Ympyrän pinta-alasta on suorakulmion ulkopuolella

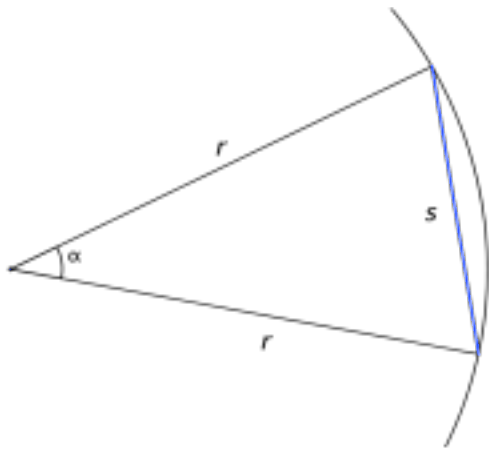
$$A_y - A_{sk} = 34\pi - 60.$$

$$\text{Lasketaan suhde } \frac{34\pi - 60}{34\pi} = 0,438\dots$$

Ympyrän pinta-alasta on 44 % suorakulmion ulkopuolella,

Vastaus 44 %

192



a) 96-kulmion keskuskulma $\alpha = \frac{360^\circ}{96} = 3,75^\circ$

Pinta-ala $96 \cdot \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \sin 3,75^\circ = 48r^2 \sin 3,75^\circ$

Ympyrän pinta-ala $A_y = \pi r^2$

Ratkaistaan luku π yhtälöstä $\pi r^2 = 48r^2 \sin 3,75^\circ$.

$$\pi = \frac{48r^2 \sin 3,75^\circ}{r^2} = 48 \cdot \sin 3,75^\circ = 3,1393\dots$$

$$\pi \approx 3,14$$

b) Ratkaistaan 96-kulmion sivun pituus kosinilauseella,

$$s^2 = r^2 + r^2 - 2 \cdot r \cdot r \cdot \cos 3,75^\circ$$

$$s = r \sqrt{2 - 2 \cos 3,75^\circ}$$

96-kulmion piiri on $96s = 96r \sqrt{2 - 2 \cos 3,75^\circ}$.

Ympyrän piiri $p = 2\pi r$.

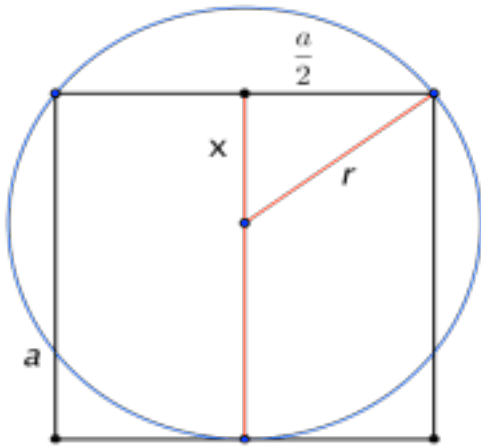
Ratkaistaan luku π yhtälöstä $2\pi r = 96r \sqrt{2 - 2 \cos 3,75^\circ}$

$$\pi = \frac{96r \sqrt{2 - 2 \cos 3,75^\circ}}{2r} = 48 \sqrt{2 - 2 \cos 3,75^\circ} = 3,1410\dots$$

$$\pi \approx 3,14$$

Vastaus a) $3,13935 \approx 3,14$ b) $3,14103 \approx 3,14$

193



Ratkaistaan ympyrän säde r , käytetään kuvan merkintöjä.

$$x^2 = r^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad x > 0$$

$$x = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}$$

$$r + x = a \quad \text{Sijoitetaan } x = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}$$

$$r + \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}} = a$$

$$\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}} = a - r$$

$$\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}^2 = (a - r)^2$$

$$r^2 - \frac{a^2}{4} = a^2 - 2ar + r^2$$

$$2ar = \frac{5a^2}{4}$$

$$r = \frac{5a}{8}$$

a) Ympyrän piiri $p_y = 2\pi r = 2\pi \cdot \frac{5a}{8} = \frac{5\pi}{4}a = 3,9269...a$

Neliön piiri $p_n = 4a$

Neliön piiri on pidempi.

$$\frac{p_n}{p_y} = \frac{4a}{3,9269...a} = 1,01859... \approx 1,019$$

Neliön piiri on 1,9 % suurempi.

b) Ympyrän pinta-ala $A_y = \pi r^2 = \pi \cdot \left(\frac{5a}{8}\right)^2 = \frac{25\pi}{64}a^2 = 1,2271...a^2$

Neliön pinta-ala $A_n = a^2$

Ympyrän pinta-ala on suurempi.

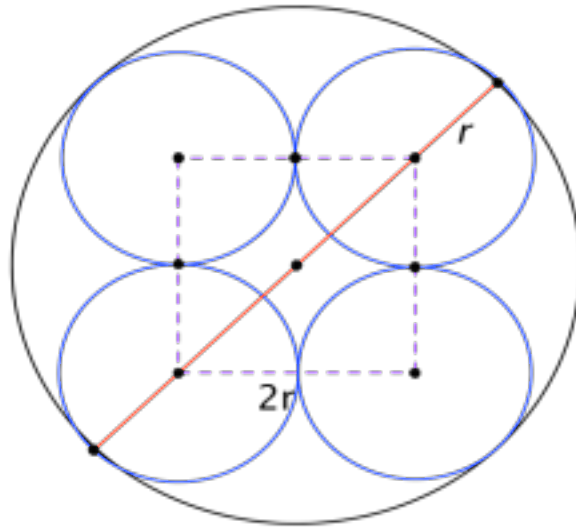
$$\frac{A_y}{A_n} = \frac{1,227...a^2}{a^2} = 1,2271... \approx 1,227$$

Ympyrän pinta-ala on 22,7 % suurempi

Vastaus a) Neliön piiri on 1,9 % pidempi.

b) Ympyrän pinta-ala on 22,7 % suurempi

194



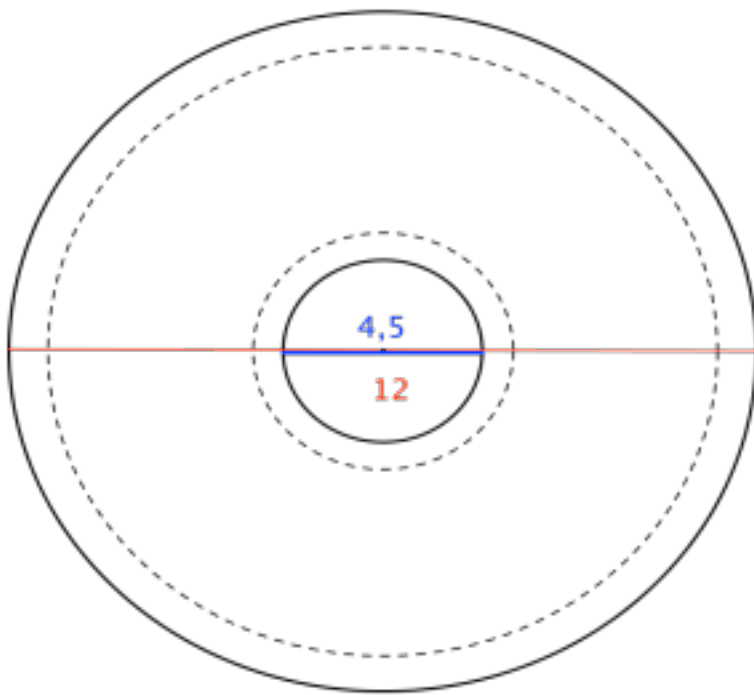
Olkoon pienen ympyrän säde r . Pienten ympyröiden keskipisteet muodostavat neliön, jonka sivun pituus on $2r$. Tämän neliön lävistäjän pituus on $2r\sqrt{2}$.

Ison ympyrän halkaisija on $2R = 2r + 2r\sqrt{2}$. Ratkaistaan r .

$$r = \frac{2R}{2 + 2\sqrt{2}} = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} R$$

Vastaus $\frac{1}{1 + \sqrt{2}} R$

195



- a) Sisimmän paperikerroksen pituus $p_1 = \pi \cdot 4,5 = 4,5\pi$
 Seuraavan paperikerroksen pituus
 $p_2 = \pi \cdot (4,5 + 2 \cdot 0,01) = 4,52\pi$
 Jokaisella kierroksella paperikerroksen halkaisija kasvaa kaksi kertaa paperin paksuuden verran ja siten kerroksen pituus kasvaa $0,02\pi$ edelliseen kerrokseen verrattuna. Kahden peräkkäisen paperikerroksen pituuden erotus on siten vakio. Siis kyseessä on aritmeettinen jono: $p_1 = 4,5\pi$, $d = 0,02\pi$.
- b) Ensimmäisen paperikerroksen pituus $p_1 = 4,5\pi$ ja viimeisen paperikerroksen pituus on $p_n = 12\pi$
 Aritmeettisen jonon n . jäsen $p_n = p_1 + (n-1)d$. Ratkaistaan kerrosten lukumäärä n .

$$p_1 + (n-1)d = 12\pi$$
 $p_1 = 4,5\pi, d = 0,02\pi$

$$4,5\pi + (n-1)0,02\pi = 12\pi$$

$$n-1 = \frac{12\pi - 4,5\pi}{0,02\pi}$$

$$n = 375$$

Paperin pituus on aritmeettinen summa: $n = 375$, $p_1 = 4,5\pi$, $p_n = 12\pi$

$$S = 375 \cdot \frac{4,5\pi + 12\pi}{2} = 9719,3... \text{ (cm)}$$

Vastaus a) Peräkkäisten kerrosten pituuksien erotus on vakio
 $0,02\pi$ cm
 b) 97 m

196

Paperikerrosten pituudet muodostavat aritmeettisen jonon.

1. kerroksen pituus $p_1 = 13\pi$ (mm), n . kerroksen pituus

$$p_n = 40\pi \text{ (mm)}$$

Merkitään paperin paksuutta kirjaimella x . Paperikerroksen pituus kasvaa jokaisella kierroksella $d = 2\pi x$, tämä on paperikerrosten pituuksien muodostaman aritmeettisen jonon peräkkäisten termien erotusluku. Ratkaistaan x aritmeettisen jonon n . termin avulla

$$p_n = p_1 + (n-1)d$$

$$13\pi + (n-1)2\pi x = 40\pi$$

$$x = \frac{27}{2n}$$

Paperin pituus on paperikerrosten pituuksien muodostama aritmeettinen summa. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan n .

$$S = 19000 \text{ mm}$$

$$S = n \frac{p_1 + p_n}{2}$$

$$n \frac{13\pi + 40\pi}{2} = 19000$$

$$n = \frac{2 \cdot 19000}{53\pi}$$

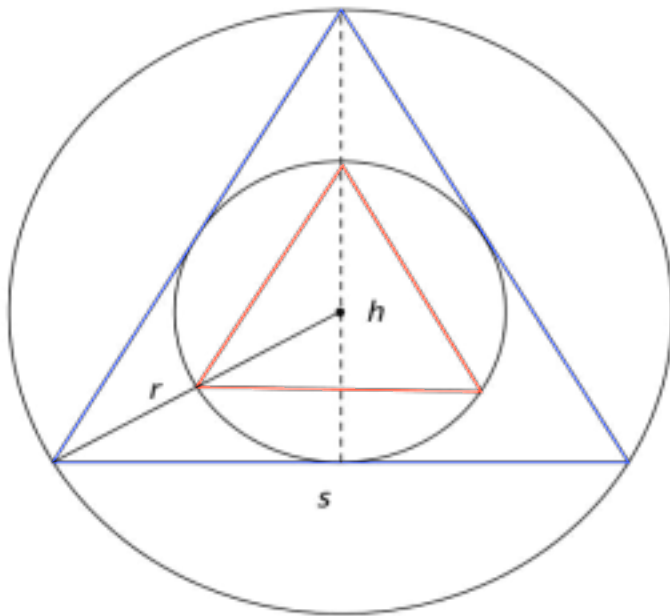
Ratkaistaan x .

$$x = \frac{27}{\frac{38000}{53\pi}} = 0,059...$$

Vastaus

0,059 mm

197



Olkoon uloimman ympyrän säde r_1 ja kolmion sivun pituus s_1 .
Tasasivuisen kolmion korkeus

$$h = \frac{s_1 \sqrt{3}}{2}$$

Kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste on keskijanojen leikkauspiste, joka jakaa keskijanan suhteessa 2 : 1 kärjestä lukien. Tasasivuisella kolmiolla keskijana on samalla kolmion korkeusjana.

Ilmaistaan ympyrän säde korkeusjanan avulla.

$$r_1 = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3} \cdot \frac{s_1 \sqrt{3}}{2} = \frac{s_1 \sqrt{3}}{3}$$

Toisen ympyrän säde $r_2 = \frac{1}{3}h = \frac{s_1 \sqrt{3}}{6}$. Ympyrät ovat keskenään

yhdenmuotoiset, yhdenmuotoisuussuhde $q = \frac{r_2}{r_1} = \frac{1}{2}$.

Jatkamalla menettelyä saadaan jono ympyröitä, joiden säteiden pituudet muodostavat geometrisen jonon suhdelukuna $q = \frac{1}{2}$.

Vastaavasti ympyröiden pinta-alat muodostavat geometrisen jonon, jonka suhdeluku $q^2 = \frac{1}{4}$.

Ympyröiden alojen summa

$$S_y = \frac{\pi r_1^2 \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{12}\right)}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4\pi \left(\frac{s_1 \sqrt{3}}{3}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{4^{12}}\right)}{3} = 1,396... s_1^2$$

Toisen kolmion sivun pituus s_2 saadaan ensimmäisen kolmion sivun pituudella yhtälöstä

$$r_2 = \frac{s_2 \sqrt{3}}{3} \qquad r_2 = \frac{1}{3}h = \frac{s_1 \sqrt{3}}{6}$$

$$\frac{s_2 \sqrt{3}}{3} = \frac{s_1 \sqrt{3}}{6}$$

$$s_2 = \frac{1}{2}s_1$$

Tasasivuiset kolmiot. Jatkamalla edellä olevaa menettelyä saadaan tasasivuisia kolmioita, joista aina seuraavan kolmion sivun pituus on puolet edellisen kolmion sivun pituudesta. Kolmioiden sivujen pituudet muodostavat geometrisen jonon, jossa suhdeluku $q = \frac{1}{2}$. Vastaavasti kolmioiden pinta-alojen

muodostama jono on geometrinen, suhdeluku on $q^2 = \frac{1}{4}$.

Ensimmäisen kolmion pinta-ala on $\frac{s_1^2\sqrt{3}}{4}$. Kolmioiden pinta-alojen summa on

$$S_k = \frac{s_1^2\sqrt{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{11}\right)}{4\left(1-\frac{1}{4}\right)} = \frac{s_1^2\sqrt{3}\left(1-\frac{1}{4^{11}}\right)}{3} = 0,5773...s_1^2$$

$$\frac{S_k}{S_y} = \frac{0,5773...s_1^2}{1,3962...s_1^2} \approx 0,41$$

Vastaus 41 %

198

a) Keskuskulma $\alpha = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$

b) $b = \frac{1}{5} \cdot 2\pi \cdot 5 = 2\pi$

c) $A = \frac{1}{5} \cdot \pi \cdot 5^2 = 5\pi$

Vastaus a) 72° b) 2π c) 5π

199

Kaaren pituus $b = \frac{80^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 12 = \frac{16}{3}\pi$

Piiri $p = \frac{16}{3}\pi + 2 \cdot 12 = 40,755\dots$

Pinta-ala $A = \frac{80^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 12^2 = 100,53\dots$

Vastaus piiri $p = 41$ cm, pinta-ala $A = 100$ cm²

200

$$A = 1$$

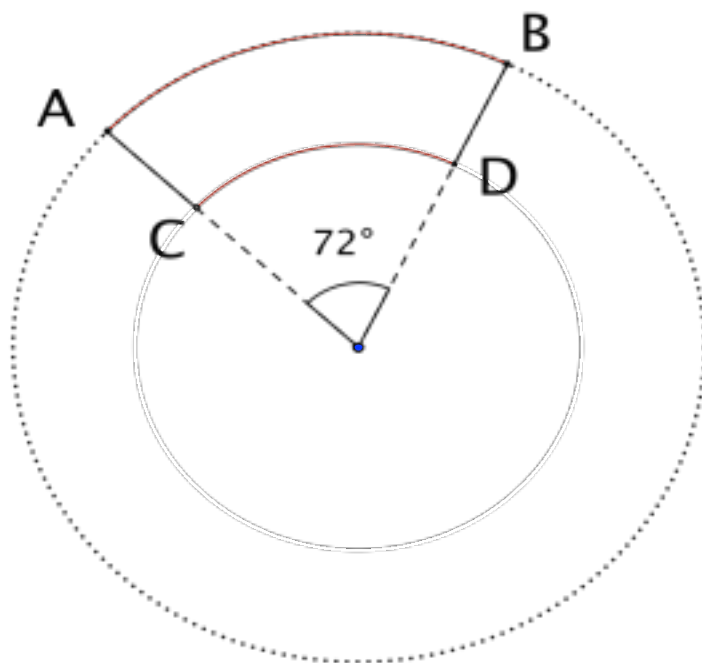
Olkoon keskuskulma α

$$\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi 1,5^2 = 1$$

$$\alpha = \frac{360^\circ}{\pi 1,5^2} = 50,92...^\circ$$

Vastaus 51°

201

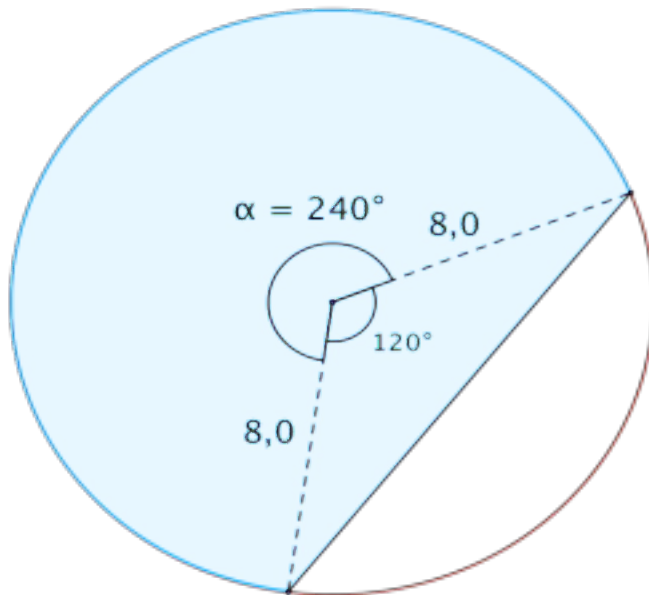


Kaarten väliin jäävä alue on kahden sektorin erotus.

$$A = \frac{72}{360} \cdot \pi \cdot 12^2 - \frac{72}{360} \cdot \pi \cdot (12 - 5)^2 = 19\pi = 59,69\dots$$

Vastaus $A = 60 \text{ cm}^2$

202



Segmentti muodostuu sektorista, jonka keskuskulma on 240° ja tasakylkisestä kolmiosta, jonka huippukulma on 120°

$$\text{Kolmion pinta-ala } A_k = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \sin 120^\circ = 16\sqrt{3}$$

$$\text{Sektorin pinta-ala } A_s = \frac{240}{360} \cdot \pi \cdot 8^2 = \frac{128}{3} \pi$$

$$\text{Segmentin pinta-ala } A = A_k + A_s = 16\sqrt{3} + \frac{128}{3} \pi = 161,75\dots$$

Vastaus 160 cm^2

203

Kaaren pituus $b = \frac{100}{360} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 5,6 = \frac{28\pi}{9}$

Merkitään jängteen pituutta kirjaimella x . Ratkaistaan x kosinilauseella.

$$x^2 = 5,6^2 + 5,6^2 - 2 \cdot 5,6 \cdot 5,6 \cdot \cos 100^\circ$$

$$x^2 = 62,72 - 62,72 \cos 100^\circ$$

$$x = \pm \sqrt{62,72 - 62,72 \cos 100^\circ} \quad x > 0$$

$$x = \sqrt{62,72 - 62,72 \cos 100^\circ}$$

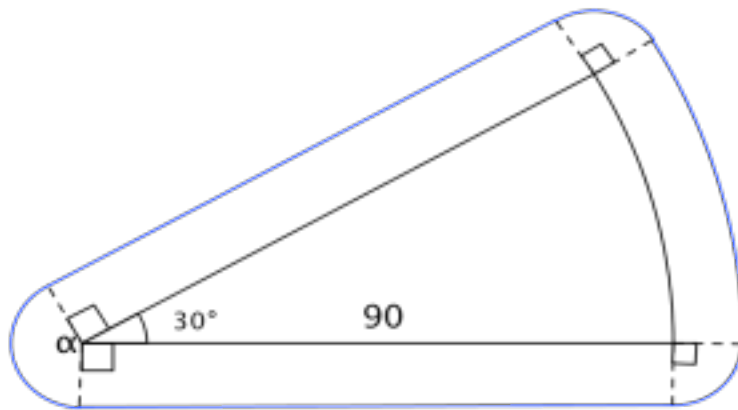
Piirin pituus $p = b + x = \frac{28\pi}{9} + \sqrt{62,72 - 62,72 \cos 100^\circ}$

$$p = 18,35 \dots$$

Pinta-ala $A = \frac{100}{360} \cdot \pi \cdot 5,6^2 - \frac{1}{2} \cdot 5,6^2 \sin 100^\circ = 11,92 \dots$

Vastaus $p \approx 18 \text{ cm} \quad A \approx 12 \text{ cm}^2$

204



Reitti koostuu kahdesta janasta joiden pituudet ovat 90,0 m, 30 asteen kaaresta, jonka säde on 91 m, kahdesta 90 asteen kaaresta, joiden säde on 1 m, ja kaaresta, jonka asteluku $\alpha = 360^\circ - 2 \cdot 90^\circ - 30^\circ = 150^\circ$ ja säde 1 m.

Reitin pituus

$$p = 2 \cdot 90 + \frac{30}{360} \cdot 2\pi \cdot 91 + 2 \cdot \frac{90}{360} \cdot 2\pi \cdot 1 + \frac{150}{360} \cdot 2\pi \cdot 1 = 233,407...$$

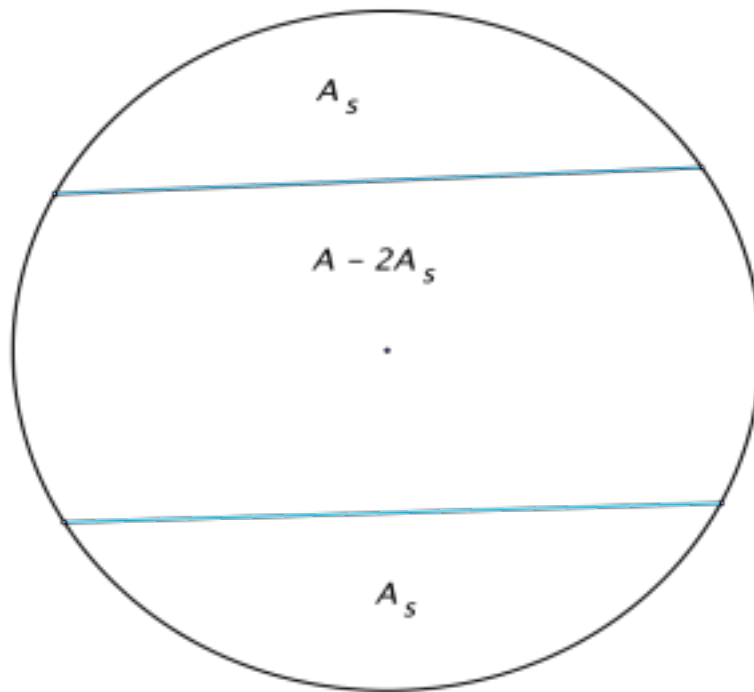
Vastaus

233 m

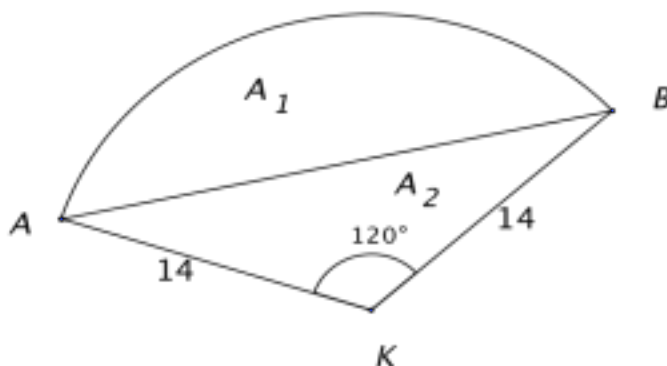
205

Pizza jakaantuu kahdeksi samanlaisiksi segmentiksi ja niiden väliin jääväksi alueeksi.

Merkitään segmentin alaa A_s ja ympyrän alaa A .



Koska viipaleissa on jokaisessa yhtä paljon reunaa, on yhden segmentin kaaren pituus kolmasosa kehän pituudesta, joten sitä vastaava keskuskulma on kolmasosa täysikulmasta eli 120° .



Ympyrän säde $r = \frac{28}{2} \text{ cm} = 14 \text{ cm}$

Lasketaan sektorin pinta-ala A_1 .

$$A_1 = \frac{120^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 14^2 = \frac{196\pi}{3}$$

Lasketaan keskuskolmion pinta-ala A_2 .

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 14 \cdot \sin 120^\circ = 49\sqrt{3}$$

$$A = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$$

Segmentin pinta-ala on sektorin pinta-alan ja kolmion pinta-alan erotus. $A_s = A_1 - A_2 = \frac{196\pi}{3} - 49\sqrt{3} \approx 120$

Reunaviipaleen pinta-ala on 120 cm^2 .

Lasketaan vielä keskimmäisen viipaleen pinta-ala.

Koko ympyrän ala $A = \pi \cdot 14^2 = 196\pi$

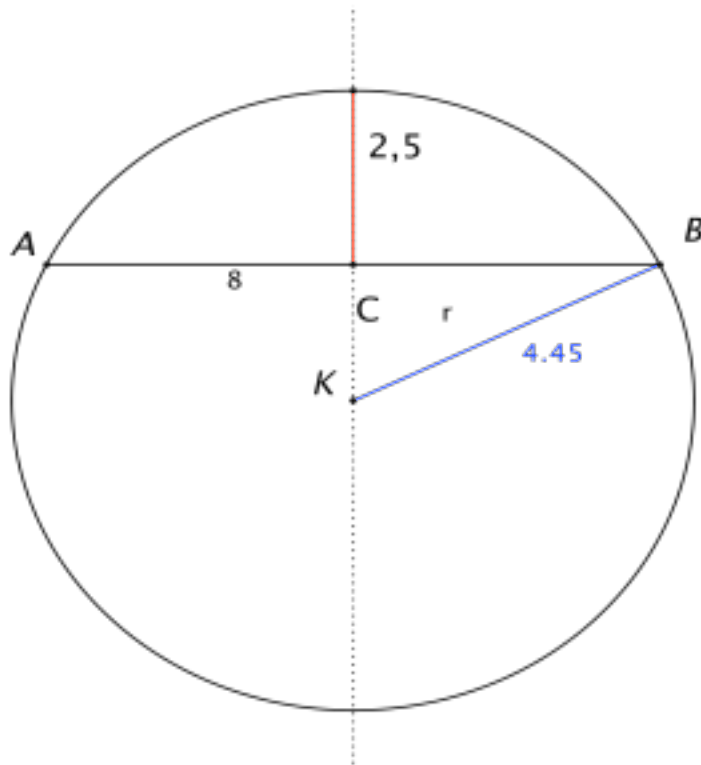
Vähennetään ympyrän pinta-alasta segmenttien pinta-alat.

$$A - 2A_s = 196\pi - 2\left(\frac{196\pi}{3} - 49\sqrt{3}\right) = 374,991\dots$$

Keskimmäisen viipaleen pinta-ala on 370 cm^2 .

Vastaus Viipaleiden pinta-alat ovat 120 cm^2 , 370 cm^2 ja 120 cm^2

206



1. Piirrä jana, jonka pituus on 8.
2. Määritä tämän jängteen keskipiste.
3. Piirrä jängteelle keskinormaali apuviivaksi.
4. Piirrä jana, jonka pituus on 2,5. Jos tämä ei ole kohtisuorassa jängnettä vastaan, niin käännä se kulkemaan pitkin jängteen keskinormaalia.
4. Piirrä kolmen pisteen kautta kulkeva ympyrä jängteen päätepisteiden ja janan päätepisteiden kautta,
5. Määritä ympyrän keskipiste.
6. Piirrä ympyrälle säde esimerkiksi jängteen toiseen päätepisteeseen ja mittaa säteen pituus.

Jos ympyrän säde on r , sen pituus voidaan ratkaista Pythagoraan lauseella.

$$r^2 = (r - 2,5)^2 + 4^2$$

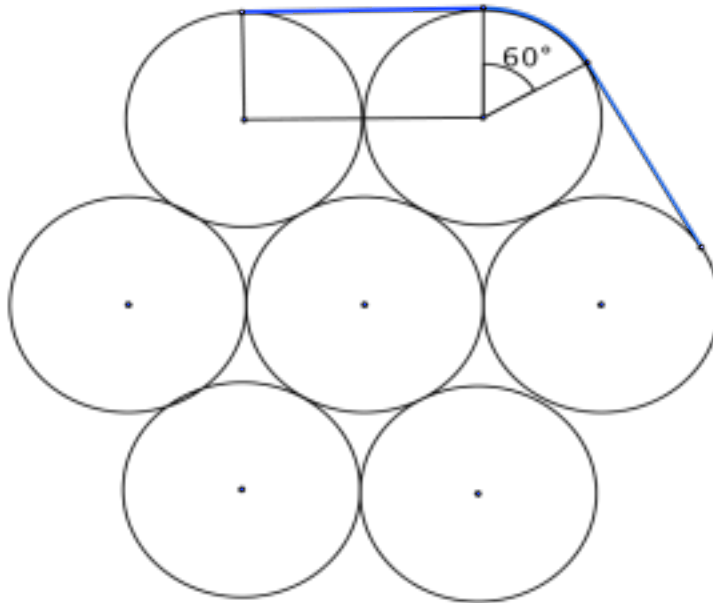
$$r^2 = r^2 - 5r + 6,25 + 16$$

$$5r = 22,25$$

$$r = \frac{22,25}{5} = 4,45 \approx 4,5$$

Vastaus 4,5 cm

207

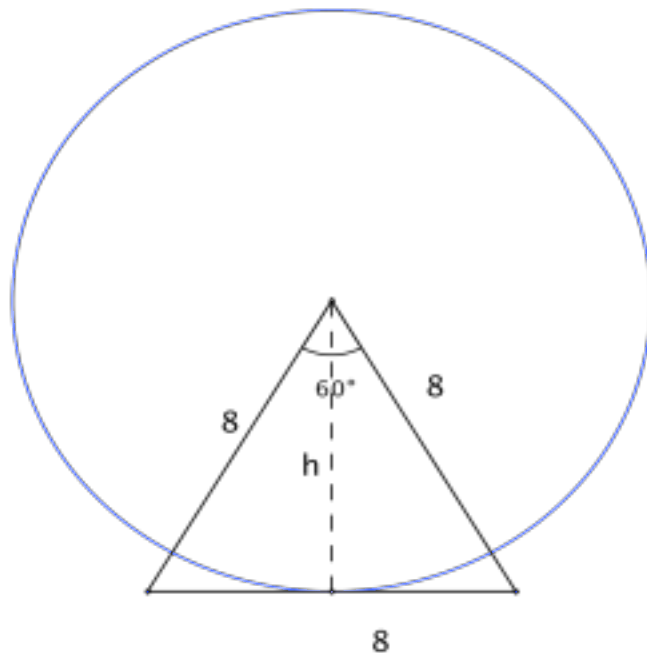


Vaijerin pituus muodostuu suorista osista, joiden pituus on kaksi kertaa tukin säde eli on yhtä suuri kuin tukin halkaisija. Vaijeri kiertää kaikkiaan täyden kierroksen ympäri eli jokaisen tukin kohdalle tulee 60 asteen kaari, jonka säde on tukin säde.

Vaijerin pituus on siten
 $6 \cdot 20 + \pi \cdot 20 = 182,831\dots$ (cm)

Vastaus 183 cm

208



Tasasivuisen kolmion korkeus on $h = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ ja ala

$$A_k = \frac{8^2\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3}$$

Piirretyn ympyrän säde $r = h$. Kolmion sisälle jää ympyrän sektori, jonka keskuskulma on 60° .

$$\text{Sektorin } A_s = \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot \pi (4\sqrt{3})^2 = 8\pi .$$

Kolmiosta ympyrän ulkopuolelle jäävä osuus on

$$\frac{A_k - A_s}{A_k} = \frac{16\sqrt{3} - 8\pi}{16\sqrt{3}} = 1 - \frac{\pi}{2\sqrt{3}} = 0,09310\dots$$

Vastaus 9,3 %

209

Kaaren pituus $b = \frac{\alpha}{360} \cdot 2\pi r$, missä r on ympyrän säde ja α on keskuskulma.

Sektorin piirin pituus $p_s = \frac{\alpha}{360} \cdot 2\pi r + 2r$ ja ympyrän kehän pituus $p_y = 2\pi r$. Merkitään nämä yhtä suuriksi ja ratkaistaan kulma α .

$$\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r + 2r = 2\pi r \quad |:2r$$

$$\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi + 1 = \pi$$

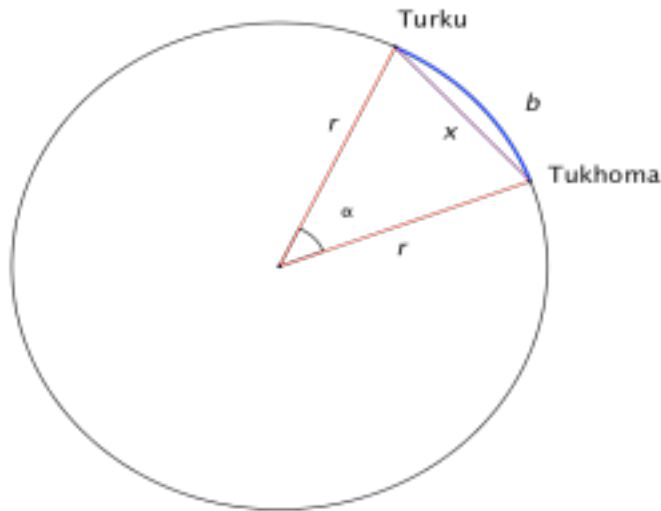
$$\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi = \pi - 1 \quad | \cdot \frac{360^\circ}{\pi}$$

$$\alpha = \frac{(\pi - 1)360^\circ}{\pi}$$

$$\alpha = 245,40\dots$$

Vastaus 245°

210



Turun ja Tukholman välisen paaren pituus $b = 265$ (km)
Ratkaistaan kaaren asteluku.

$$\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 6370 = 265$$

$$\alpha = 265 \cdot \frac{360^\circ}{2 \cdot \pi \cdot 6370} = 2,383...^\circ$$

Ratkaistaan suora etäisyys x kosinilauseella.

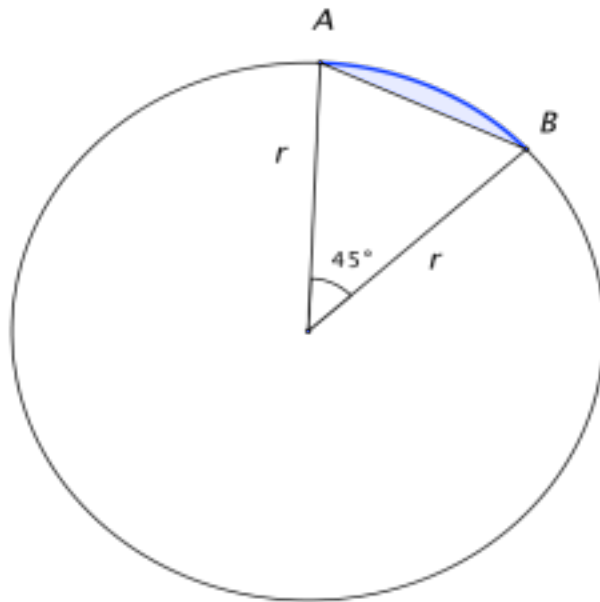
$$x^2 = 6370^2 + 6370^2 - 2 \cdot 6370 \cdot 6370 \cdot \cos \alpha = 70214,872...$$

$$x = \pm \sqrt{70214,872...} \quad | x > 0$$

$$x = 264,980...$$

Vastaus $264,980 \text{ km} \approx 265 \text{ km}$

211



Ympyrän kehä jakautuu kahteen kaareen joiden asteluvut ovat

$$\frac{1}{8} \cdot 360^\circ = 45^\circ \text{ ja } \frac{7}{8} \cdot 360^\circ = 315^\circ.$$

Pienen segmentin ala saadaan, kun 45° sektorin alasta vähennetään tasasivuisen kolmion, jonka huippukulma on 45° .

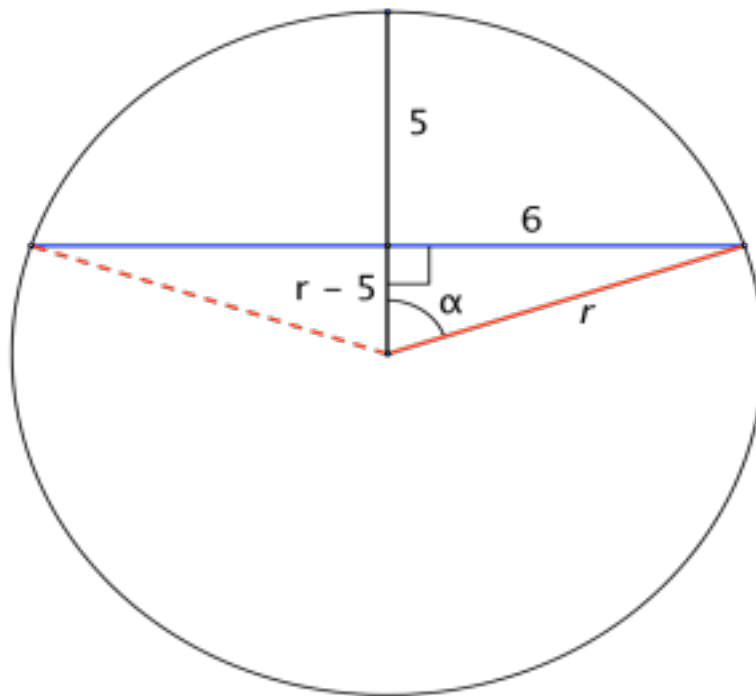
$$A_1 = \frac{45^\circ}{360^\circ} \cdot \pi r^2 - \frac{1}{2} r^2 \sin 45^\circ = \frac{\pi r^2}{8} - \frac{\sqrt{2}}{4} r^2 = \frac{(\pi - 2\sqrt{2}) r^2}{8}$$

Lasketaan pienen segmentin ja ympyrän alojen suhde.

$$\frac{A_1}{A} = \frac{\frac{(\pi - 2\sqrt{2}) r^2}{8}}{\pi r^2} = \frac{\pi - 2\sqrt{2}}{8\pi} = 0,01246...$$

Vastaus 1,2 %

212



Jännettä vastaan kohtisuoraan piirretty säde puolittaa säteen.
Ratkaistaan säde Pythagoraan lauseella.

$$r^2 = (r-5)^2 + 6^2$$

$$r^2 = r^2 - 10r + 25 + 36$$

$$10r = 61$$

$$r = 6,1$$

Kaaren asteluku on 2α .

$$\sin \alpha = \frac{6}{6,1}$$

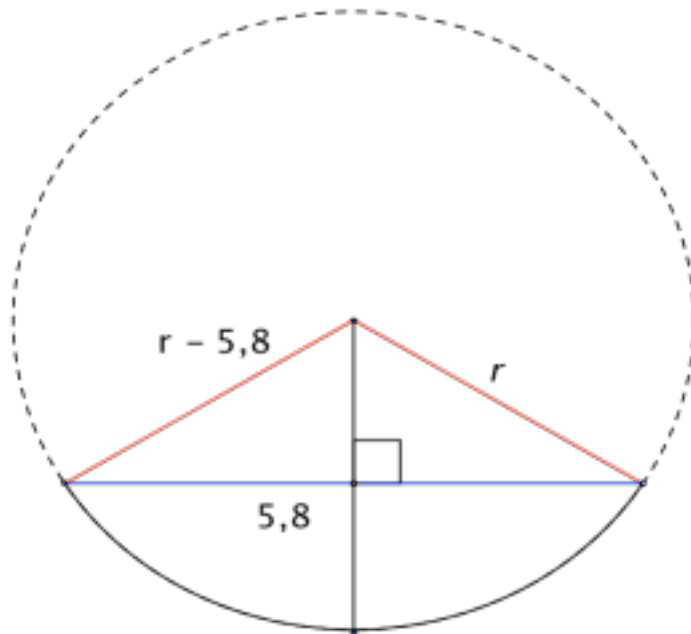
$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{6}{6,1}\right) = 79,611\dots^\circ$$

$$2\alpha = 159,22\dots^\circ$$

Vastaus

Säde 6,1 cm, kaaren asteluku 159°

213



Kuopan reunan säde on $\frac{18,6}{2} = 9,3$

Pallon keskipisteen etäisyys kuopan pinnasta on $r - 5,8$, missä r on pallon säde.

$$r^2 = (r - 5,8)^2 + 9,3^2$$

$$r^2 = r^2 - 11,6r + 33,64 + 86,49$$

$$11,6r = 120,13$$

$$r = \frac{120,13}{11,6} = 10,536...$$

$$d = 2r = 20,712...$$

Vastaus 20,7 cm

214

Sektorin pinta-alan kaava $A = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$ voidaan kirjoittaa

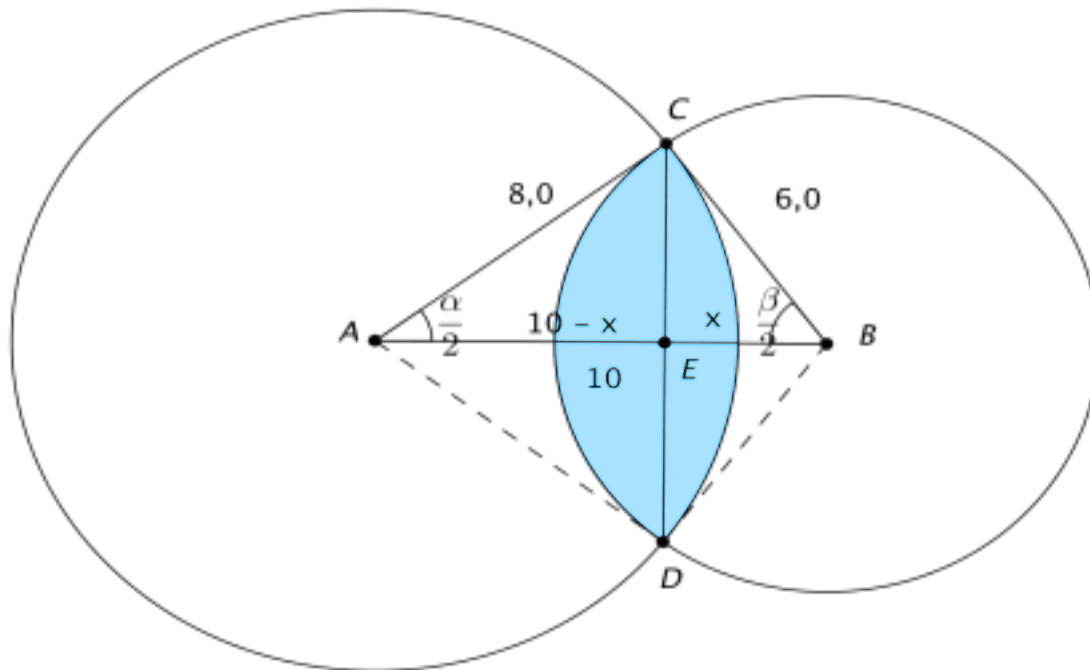
muotoon $A = \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r \cdot r$. Sijoitetaan tähän kaaren

pituuden lauseke $b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$, jolloin saadaan sektorin

pinta-alaksi $A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot r$.

Siis sektorin pinta-ala on $A = \frac{br}{2}$. $\square$

215



Yhteinen alue muodostuu kahdesta ympyräsegmentistä. Ympyröiden yhteinen jänne CD on kohtisuorassa keskipisteiden yhdysjanaa AB vastaan.

Merkitään kirjaimella x janan EB pituutta. Jana CE on molemmille ympyröille yhteinen.

Ratkaistaa CE Pythagoraan lauseella kolmioista AEC ja EBC .
 $CE^2 = 8^2 - (10 - x)^2$ ja $CE^2 = 6^2 - x^2$

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x .

$$64 - (100 - 20x + x^2) = 36 - x^2$$

$$64 - 100 + 20x - x^2 = 36 - x^2$$

$$20x = 72$$

$$x = \frac{18}{5}$$

$$10 - x = \frac{32}{5}$$

Ratkaistaan keskuskulma α .

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{32}{5}}{8} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{\alpha}{2} = 36,86...^\circ$$

$$\alpha = 73,739...^\circ$$

Ratkaistaan keskuskulma β .

$$\cos \frac{\beta}{2} = \frac{\frac{18}{5}}{6} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{\beta}{2} = 53,13...^\circ$$

$$\beta = 106,260...^\circ$$

Segmenttien pinta-alat:

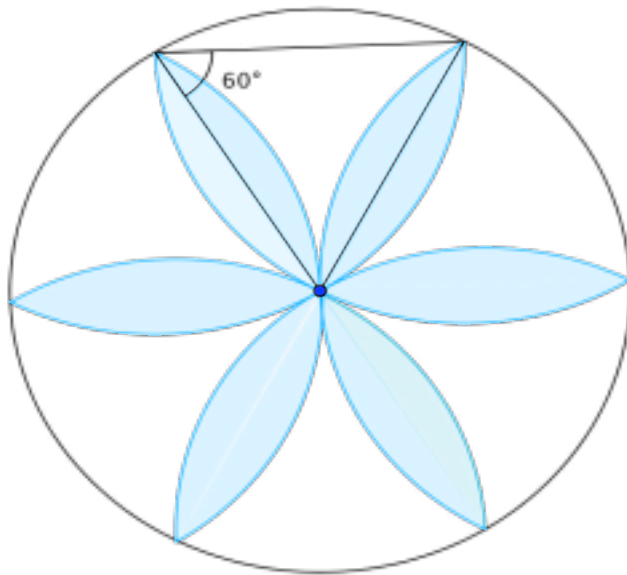
$$A_1 = \frac{73,739...^\circ}{360} \cdot \pi \cdot 8^2 - \frac{1}{2} \cdot 8^2 \cdot \sin 73,739...^\circ = 10,464...$$

$$A_2 = \frac{106,260...^\circ}{360} \cdot \pi \cdot 6^2 - \frac{1}{2} \cdot 6^2 \cdot \sin 106,260...^\circ = 16,102...$$

$$\text{Kysytty pinta-ala } A = A_1 + A_2 = 26,56...$$

Vastaus $26,6 \text{ cm}^2$

216



Terälehti muodostuu kahdesta 60° kaarta vastaavasta segmentistä. Olkoon ympyrän säde r .

Sementin pinta-ala:

$$A_s = \frac{60}{360} \cdot r^2 - \frac{1}{2} r^2 \sin 60^\circ = r^2 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$$

Yhden terälehdhen pinta-ala on $2A_s$. Kukka koostuu kuudesta terälehddestä, kukan pinta-ala on

$$12A_s = 12r^2 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = r^2 (2\pi - 3\sqrt{3}).$$

Ympyrän pinta-ala on $A_y = \pi r^2$.

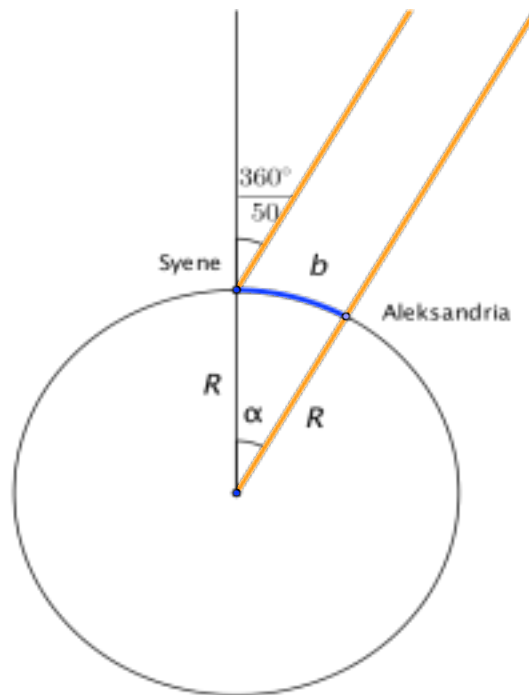
Lasketaan suhde.

$$\frac{A_s}{A_y} = \frac{r^2 (2\pi - 3\sqrt{3})}{\pi r^2} = \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{\pi} = 0,346...$$

Vastaus

35 %

217



Auringonsäteet ovat yhdensuuntaiset. Koska auringonsäteiden ja pystysuoran välinen kulma Syenessä on $\frac{360^\circ}{50} = 7,2^\circ$, on Aleksandrian ja Syenen välisen kaarta vastaava keskuskulma $7,2^\circ$. Kaaren pituus on 5000 stadionia, tämä on $\frac{1}{50}$ maapallon ympärysmittasta. Merkitään maapallon ympärysmittaa kirjaimella p ja ratkaistaan se kaaren pituuden avulla.

$$\frac{1}{50}p = 5000$$

$$p = 50 \cdot 5000 = 25000$$

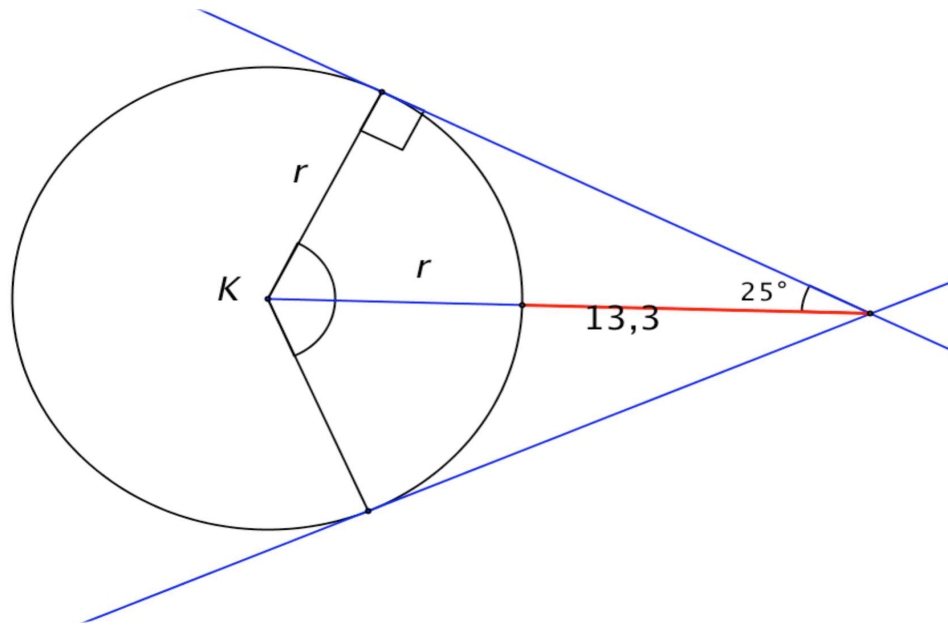
Maapallon ympärysmitta on 250 000 stadionia,

1 stadion = 0,157 km.

$$p = 250000 \cdot 0,157 \text{ km} = 39\,250 \text{ km}$$

Vastaus 39 300 km

218



Ympyrän keskipisteestä tangenttien leikkauspisteeseen piirretty jana puolittaa tangenttien välisen kulman, $\frac{50^\circ}{2} = 25^\circ$.

$$\frac{r}{r+13,3} = \sin 25^\circ$$

$$r = \sin 25^\circ (r + 13,3)$$

$$r = \sin 25^\circ r + 13,3 \sin 25^\circ$$

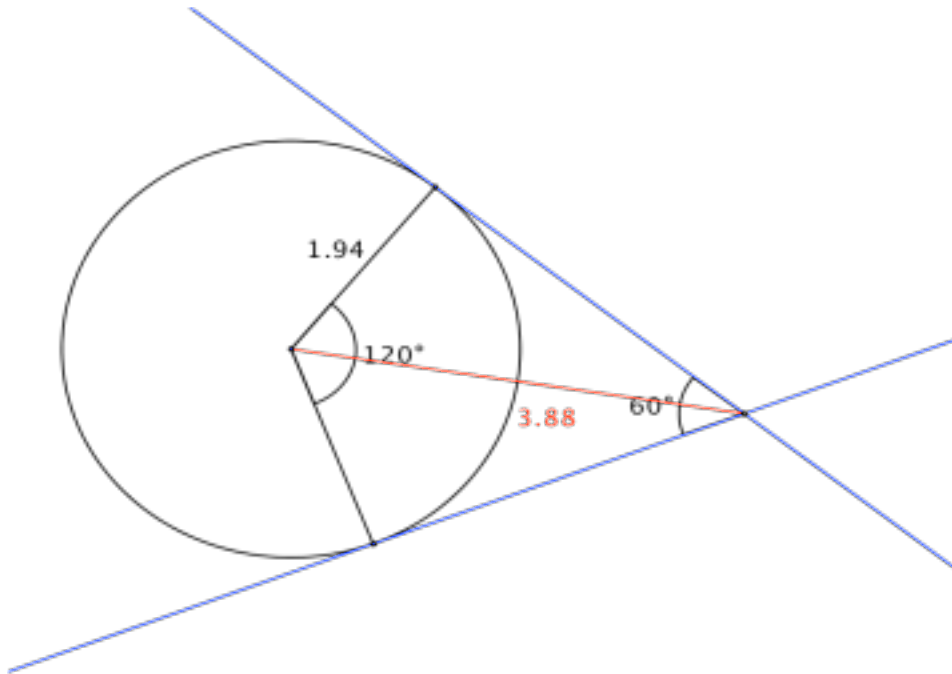
$$(1 - \sin 25^\circ)r = 13,3 \sin 25^\circ$$

$$r = \frac{13,3 \sin 25^\circ}{1 - \sin 25^\circ} = 9,730\dots$$

Vastaus 9,7 cm

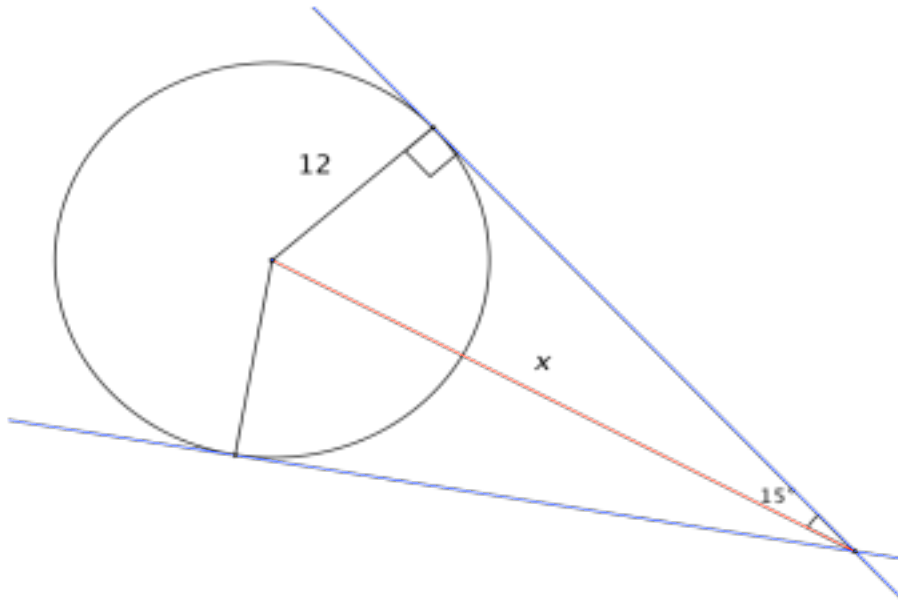
219

Kuva on esimerkiksi seuraavanlainen.



1. Piirrä ympyrä, merkitse piste ympyrän kehälle ja piirrä tämän pisteen kautta kulkeva tangentti. Piirrä myös säde sivuamispisteeseen.
2. Toisen tangentin piirtäminen onnistuu, kun määrität tangenttien välistä 60 asteen kulmaa vastaavan keskuskulman 120° . Piirrä toinen tangentti.
3. Mittaa mittatyökalulla säteen pituus ja tangenttien leikkauspisteen etäisyys ympyrän keskipisteestä.
4. Laske suhde. Tulokseksi pitäisi tulla $1 : 2$.

220



Ympyrän keskipisteestä tangenttien leikkauspisteeseen piirretty jana puolittaa tangenttien välisen kulman, $\frac{30^\circ}{2} = 15^\circ$

Ratkaistaan x suorakulmaisesta kolmiosta.

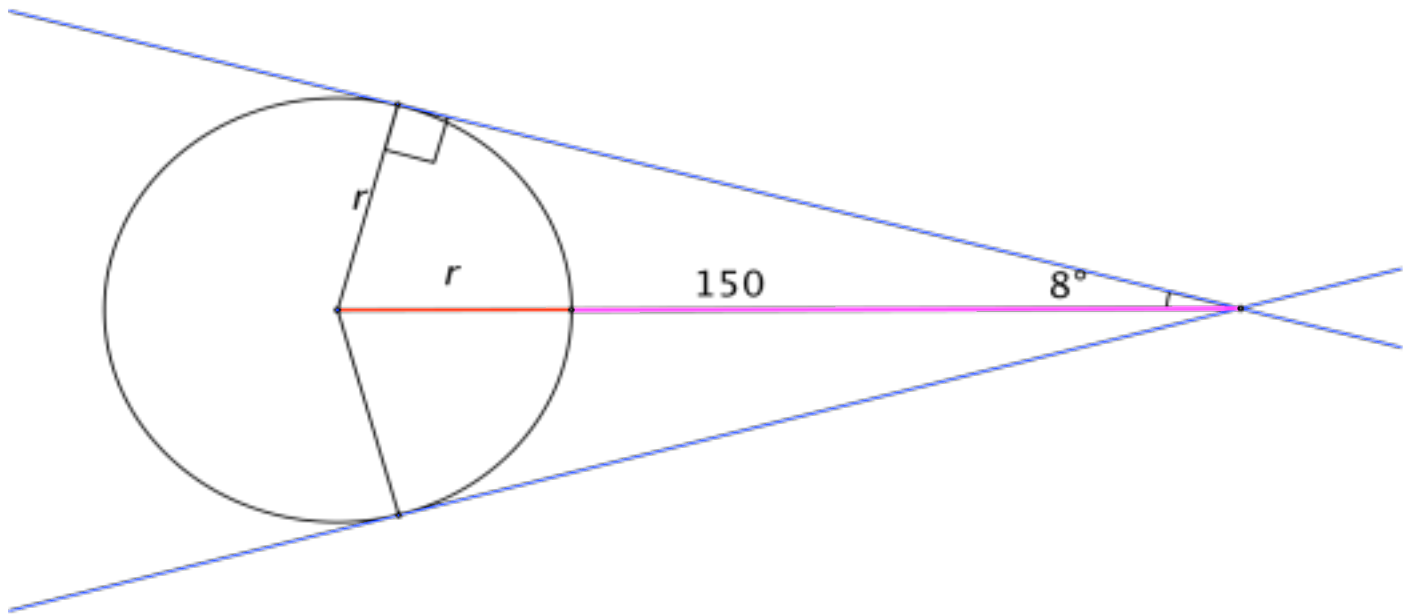
$$\frac{12}{x} = \sin 15^\circ$$

$$x = \frac{12}{\sin 15^\circ} = 46,36\dots$$

Vastaus

46 cm

221



Rakennuksen pohjan keskipisteestä katselupisteeseen piirretty jana puolittaa katselukulman, $\frac{16^\circ}{2} = 8^\circ$.

Ratkaistaan rakennuksen pohjan säde suorakulmaisesta kolmiosta.

$$\frac{r}{r+150} = \sin 8^\circ$$

$$r = (r+150)\sin 8^\circ$$

$$r = \sin 8^\circ \cdot r + 150\sin 8^\circ$$

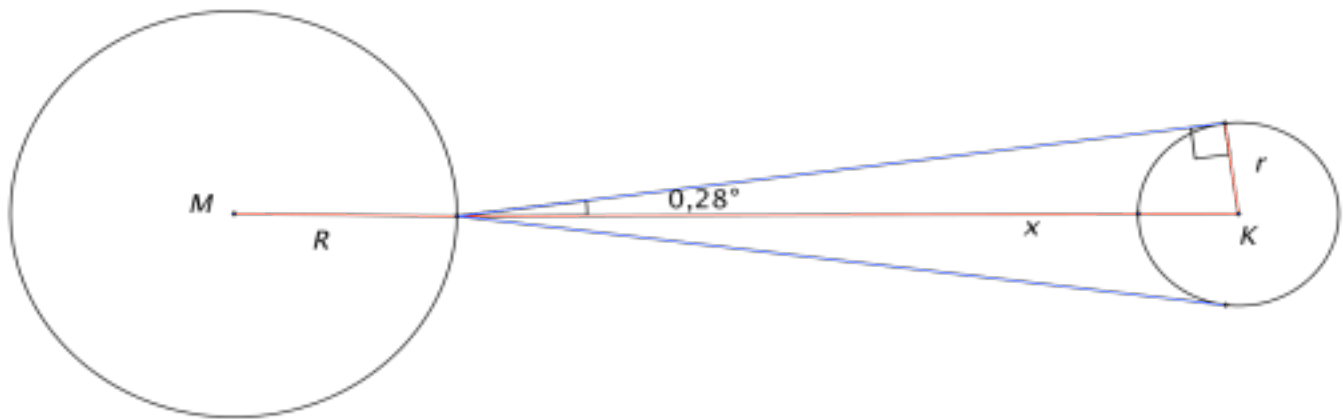
$$(1 - \sin 8^\circ)r = 150\sin 8^\circ$$

$$r = \frac{150\sin 8^\circ}{1 - \sin 8^\circ} = 24,251\dots$$

$$\text{halkaisija } d = 2r = 2 \cdot 24,251\dots = 48,502\dots$$

Vastaus 49 m

222



$$R = 6370 \text{ km}, r = 1737 \text{ km}$$

Maan pinnan katselupisteestä Kuun keskipisteeseen piirretty jana puolittaa katselukulman, $\frac{0,56^\circ}{2} = 0,28^\circ$.

Merkitään Maan pinnan katselupisteen ja Kuun keskipisteen välistä etäisyyttä kirjaimella x .

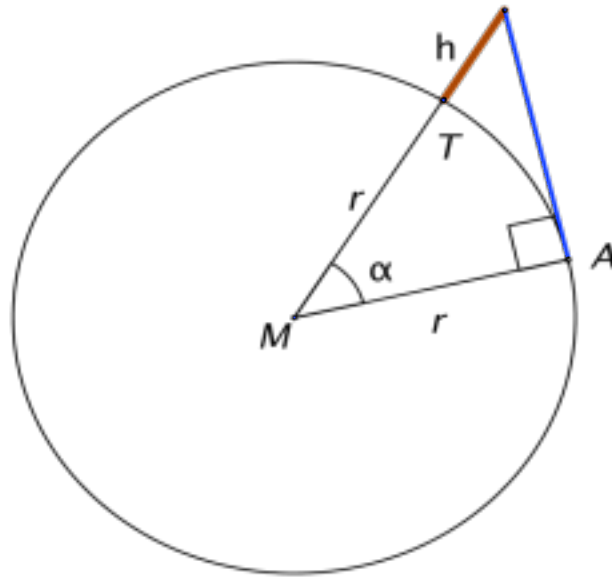
$$\frac{1737}{x} = \sin 0,28^\circ$$

$$x = \frac{1737}{\sin 0,28^\circ} = 355439,87\dots$$

Maan ja Kuun keskipisteiden välinen etäisyys on
 $x + R = 6370 + 355439,87\dots = 361809,87\dots$

Vastaus 361800 km

223



$$r = 6370 \text{ km}, h = 3,718 \text{ km}$$

Kaaren TA pituus on Teiden etäisyys Afrikasta Maapallon pintaa pitkin mitattuna.

Määritetään kulman α suuruus trigonometrisesti.

$$\cos \alpha = \frac{r}{r+h} = \frac{6370}{6373,718}$$

$$\alpha = 1,957...^\circ$$

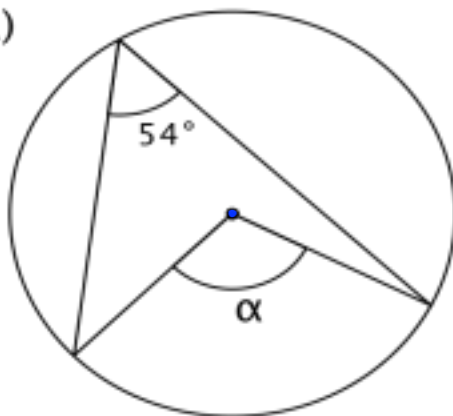
Lasketaan kaaren TA pituus.

$$TA = \frac{1,957...^{\circ}}{360^{\circ}} \cdot 2\pi \cdot 6370 = 217,58...$$

Vastaus 218 km

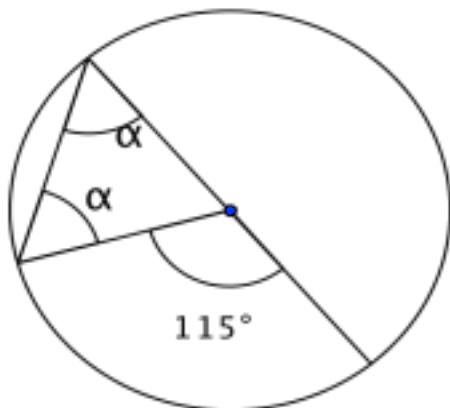
224

a)



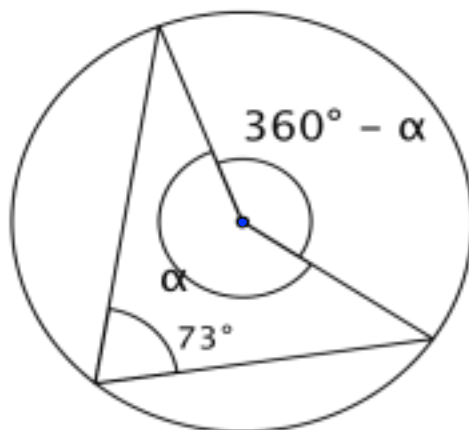
$$\alpha = 2 \cdot 54^\circ = 108^\circ$$

b)



$$\alpha = 115^\circ : 2 = 57,5^\circ$$

c)



$$360^\circ - \alpha = 2 \cdot 73^\circ$$

$$\alpha = 360^\circ - 2 \cdot 73^\circ = 214$$

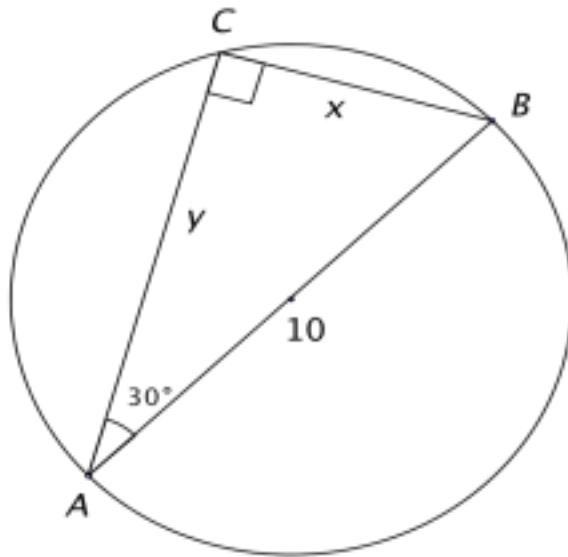
Vastaus

a) 108°

b) $57,5^\circ$

c) 214°

225



Kolmio on suorakulmainen, koska kulma C on puoliympyrää vastaava kehäkulma. Kolmion hypotenuusa on ympyrän halkaisija $2r = 2 \cdot 5 = 10$.

Ratkaistaan kateetit x ja y trigonometrisesti.

$$\frac{x}{10} = \sin 30^\circ$$

$$x = 10 \cdot \sin 30^\circ = 5$$

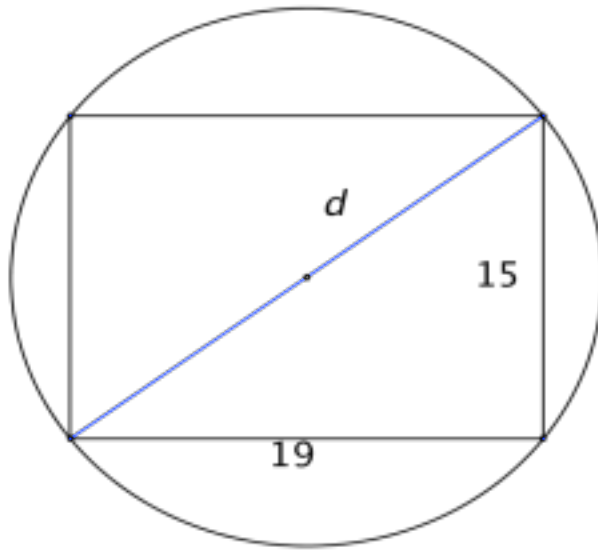
$$\frac{y}{10} = \cos 30^\circ$$

$$y = 10 \cdot \cos 30^\circ = 5\sqrt{3}$$

Kolmion pinta-ala $A = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5\sqrt{3} = \frac{25\sqrt{3}}{2} = 21,650\dots$

Vastaus 22 cm^2

226



Suorakulmion lävistäjä on puukiekon halkaisija. Ratkaistaan lävistäjä Pythagoraan lauseella.

$$d^2 = 19^2 + 15^2$$

$$d^2 = 586$$

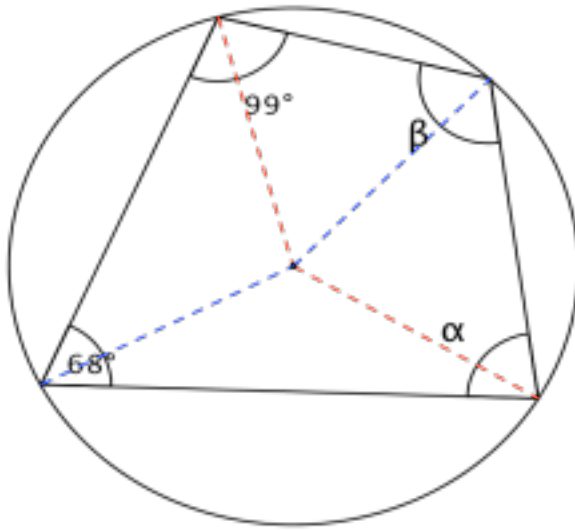
$$d = \pm\sqrt{586} \quad |d > 0$$

$$d = 24,207\dots$$

Puukiekon säde on $\frac{d}{2} = 12,103\dots$

Vastaus 12,1 cm

227



Kulmaa α vastaava keskuskulma on $360^\circ - 2 \cdot 99^\circ = 162^\circ$.

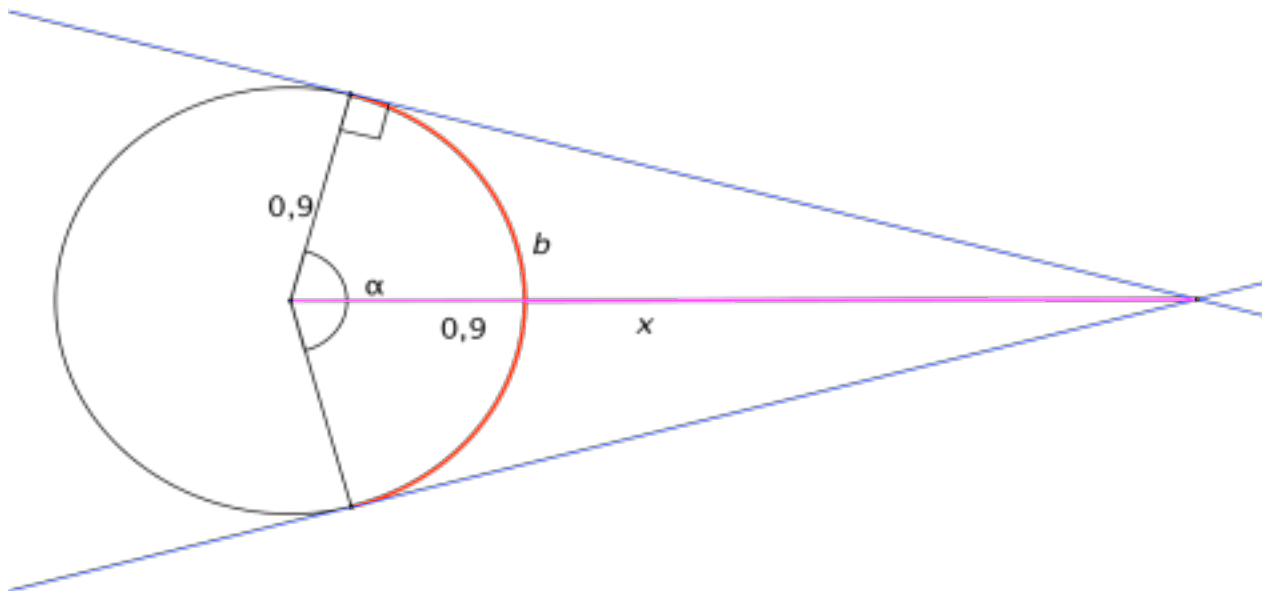
$$\alpha = \frac{162^\circ}{2} = 81^\circ$$

Kulmaa β vastaava keskuskulma on $360^\circ - 2 \cdot 68^\circ = 224^\circ$.

$$\beta = \frac{224^\circ}{2} = 112^\circ$$

Vastaus $\alpha = 81^\circ$ ja $\beta = 112$

228



Mainostelineen säde $r = \frac{1,8}{2} = 0,9$

Julisteen leveyttä vastaava kaaren pituus $b = 2,6$.

Ratkaistaan kulma α .

$$2,6 = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 0,9$$

$$\alpha = \frac{2,6 \cdot 360^\circ}{2\pi \cdot 0,9} = 165,52\dots^\circ$$

Olkoon x pienin etäisyys, mistä mainoksen voi nähdä kokonaan.

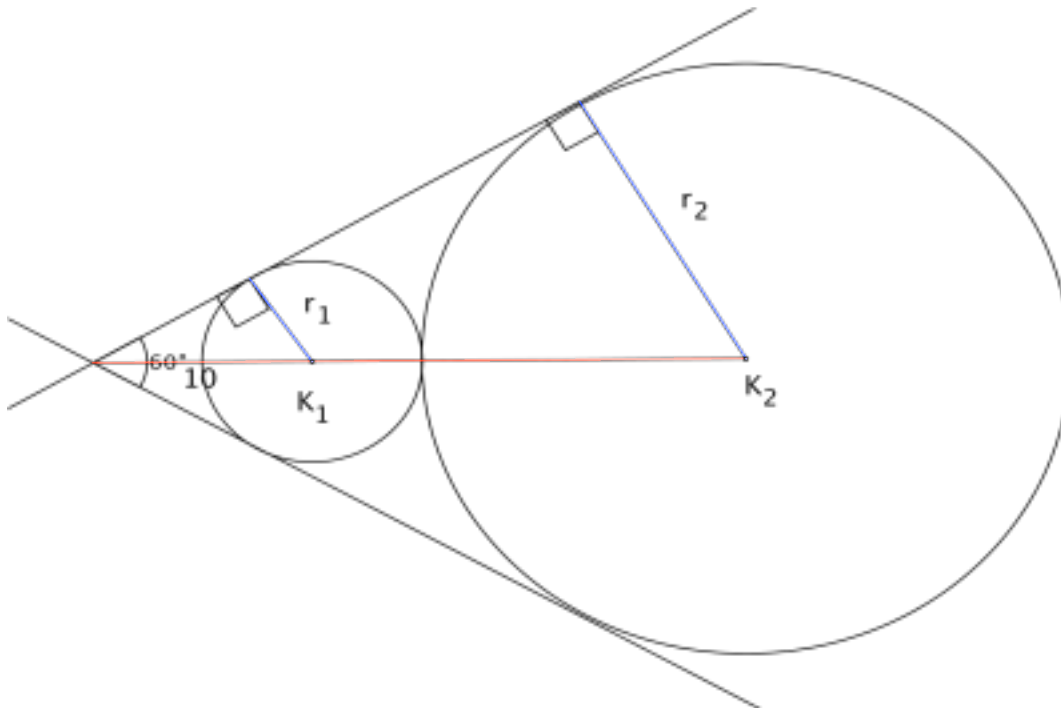
$$\frac{0,9}{0,9+x} = \cos \frac{165,52\dots^\circ}{2}$$

$$x = \frac{0,9 - 0,9 \cos \frac{165,52\dots^\circ}{2}}{\cos \frac{165,52\dots^\circ}{2}} = 6,2\dots > 4$$

Vastaus

Ei voi

229



Ympyröiden keskipisteiden ja tangenttien leikkauspisteen kautta kulkeva suora puolittaa tangenttien välisen kulman, $\frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$.

$$\frac{r_1}{10} = \sin 30^\circ$$

$$r_1 = 5$$

Muodostuneet suorakulmaiset kolmiot ovat yhdenmuotoiset.

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{10 + r_1 + r_2}{10}$$

$$\frac{r_2}{5} = \frac{15 + r_2}{10}$$

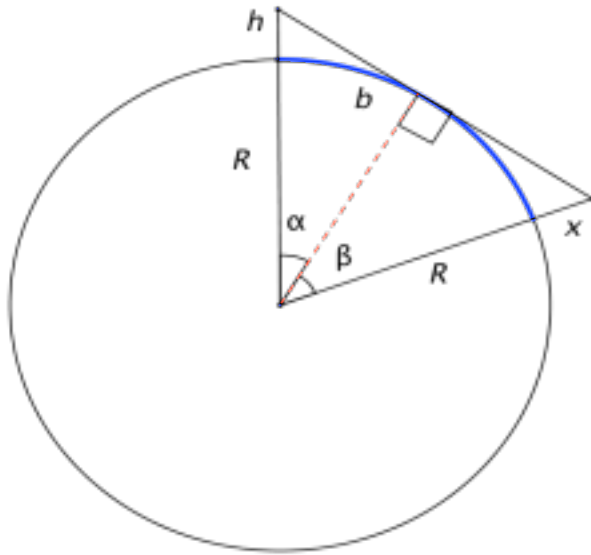
$$10r_2 = 75 + 5r_2$$

$$5r_2 = 75$$

$$r_2 = 15$$

Vastaus 5 ja 15

230



$$p = 2\pi R = 40\,000 \text{ (km)}$$

$$h = 190 \text{ (m)} = 0,19 \text{ (km)}$$

$$b = 110 \text{ (km)}$$

$$R = \frac{40000}{2\pi}$$

$$\cos \alpha = \frac{R}{R+h} = \frac{\frac{40000}{2\pi}}{\frac{40000}{2\pi} + 0,19}$$

$$\alpha = 0,44265...^\circ$$

$$\frac{\alpha + \beta}{360^\circ} \cdot 40000 = 110$$

$$\beta = \frac{110 \cdot 360^\circ}{40000} - 0,4465...^\circ = 0,547...^\circ$$

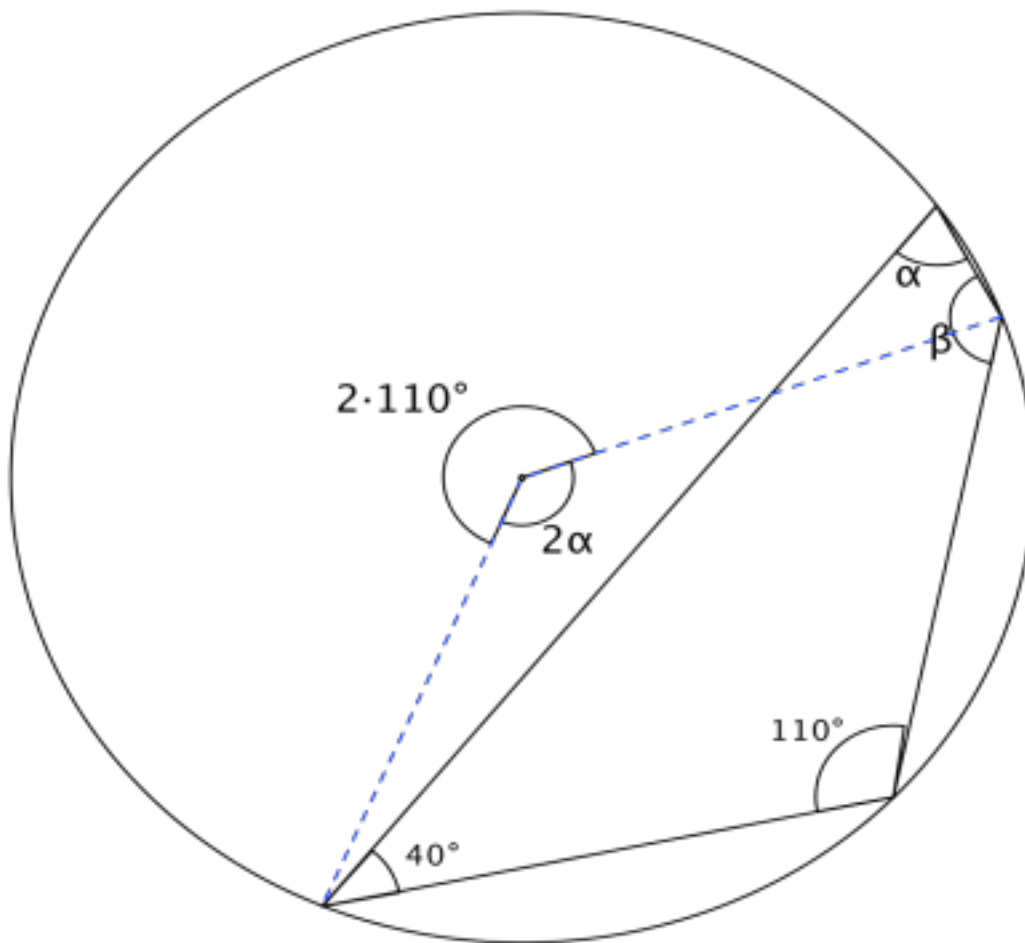
$$\frac{R}{R+x} = \cos \beta$$

$$\frac{\frac{40000}{2\pi}}{\frac{40000}{2\pi} + x} = \cos 0,547...^\circ$$

$$x = 0,2908....$$

Vastaus 290 m

231



Kulmaa α vastaavan keskuskulman ja 110 asteen kehäkulmaa vastaavan keskuskulman summa on 360° .

$$2\alpha + 220^\circ = 360^\circ$$

$$2\alpha = 140^\circ$$

$$\alpha = 70^\circ$$

Vastaavasti saadaan kulmalle β yhtälö:

$$2\beta + 2 \cdot 40^\circ = 360^\circ$$

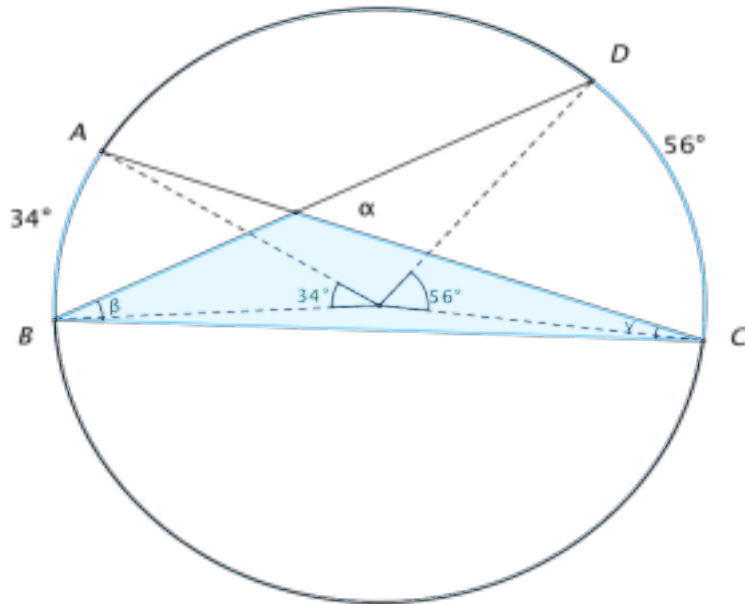
$$\beta = 140^\circ$$

Vastaus

70° ja 140°

232

a)



Kulma β on 56 asteen keskuskulmaa vastaava kehäkulma.

$$\beta = \frac{56^\circ}{2} = 28^\circ$$

Vastaavasti $\gamma = \frac{34^\circ}{2} = 17^\circ$.

Kolmion kulmien summan avulla voidaan ratkaista kulma δ .

$$\beta + \gamma + \delta = 180^\circ$$

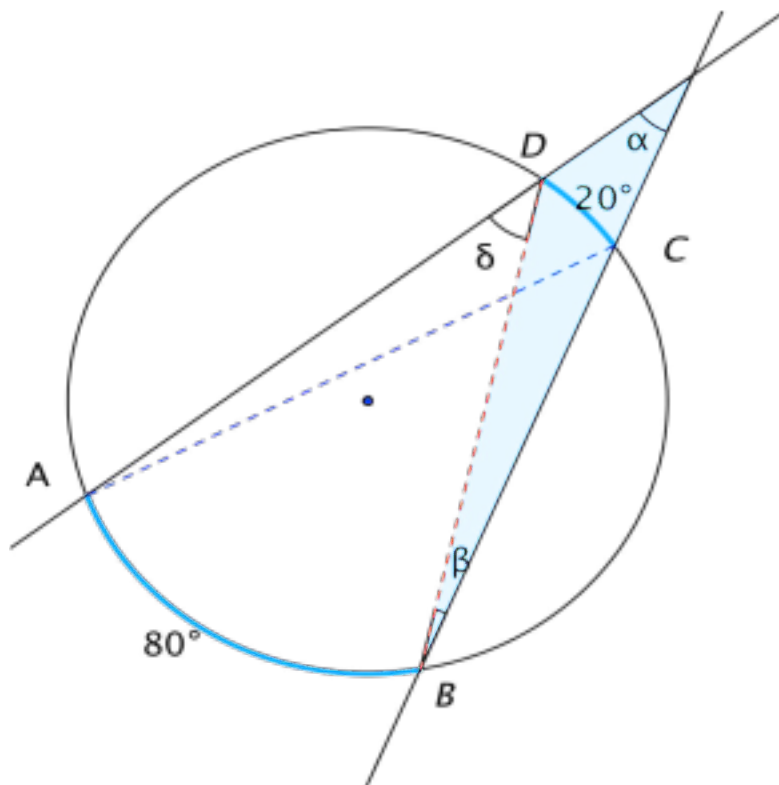
$$28^\circ + 17^\circ + \delta = 180^\circ$$

$$\delta = 135^\circ$$

Kulma α on kulman δ vieruskulma.

$$\alpha = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$$

b)



Kulma β on 20 asteen keskuskulmaa vastaava kehäkulma.

$$\beta = \frac{20^\circ}{2} = 10^\circ$$

Vastaavasti $\delta = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$.

Kulman δ vieruskulma on $180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$.

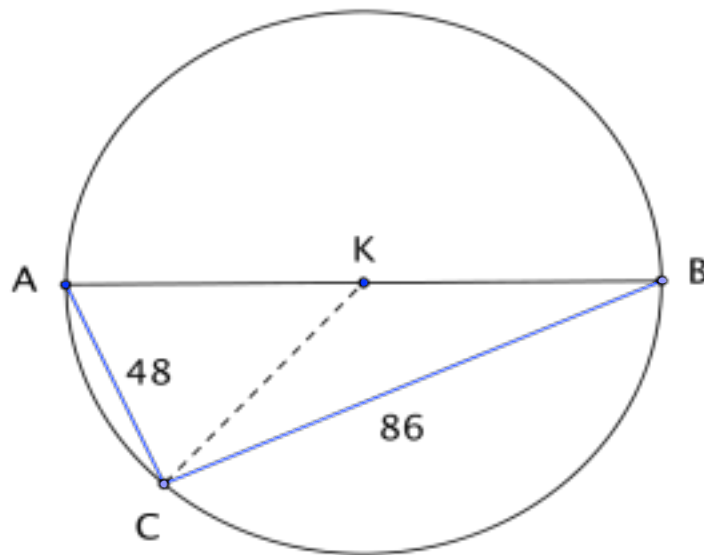
$$\alpha = 180^\circ - 10^\circ - 140^\circ = 30^\circ$$

Vastaus

a) 45°

b) 30°

233



Merkitään kalastajan istuinpaikkaa kirjaimella C , saaren päätepisteitä kirjaimilla A ja B sekä saaren keskellä olevaa kiveä kirjaimella K .

Koska kiven etäisyydet saaren päistä ja kalastajasta ovat yhtäsuuret, pisteet A , B ja C ovat K -keskisen ympyrän kehällä. Jana AB on ympyrän halkaisija, kulma C on puoliympyrän sisältämä kehäkulma, joten kulma C on suora kulma.

a) Kalastaja näkee saaren 90° kulmassa.

b) AB on suorakulmaisen kolmion hypotenuusa

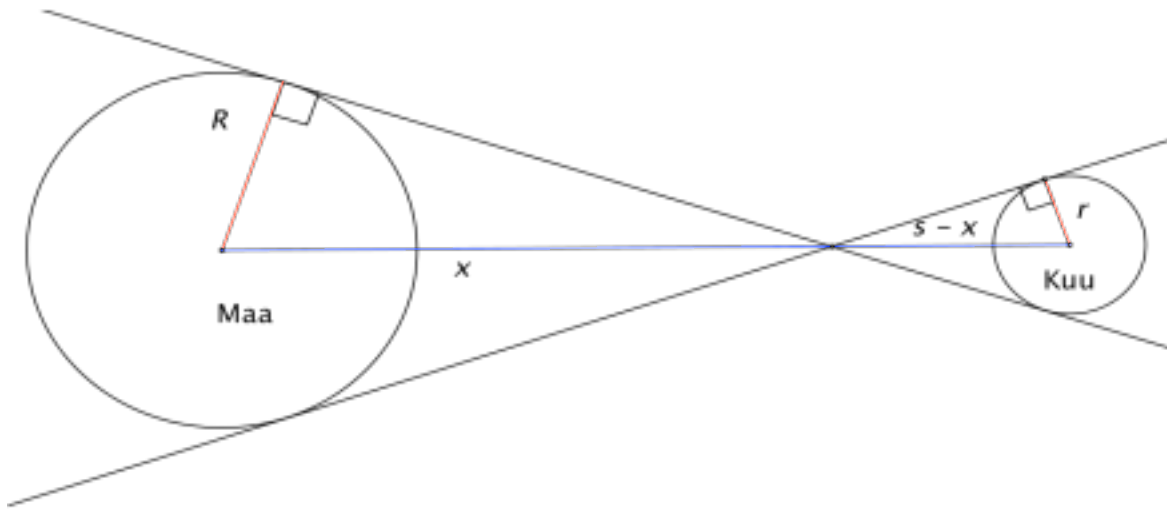
$$AB = \sqrt{48^2 + 8^2} = 10\sqrt{97} = 98,4885\dots$$

Vastaus

a) 90°

b) 98 m

234



$$R = 6370 \text{ (km)}, r = 1737 \text{ (km)}$$

$$s = 384\,000 \text{ (km)}$$

Olkoon x avaruusaluksen etäisyys Maan keskipisteestä.

Ratkaistaan x yhdenmuotoisista suorakulmaisista kolmioista.

$$\frac{R}{r} = \frac{x}{s-x} \quad \left| \text{kerrotaan ristiin} \right.$$

$$Rs - Rx = rx$$

$$(r + R)x = Rs$$

$$x = \frac{Rs}{r + R}$$

$$x = \frac{6370 \cdot 384\,000}{6370 + 1737}$$

$$x = 301\,724,43\dots$$

Avaruusaluksen etäisyys Maan pinnalta on

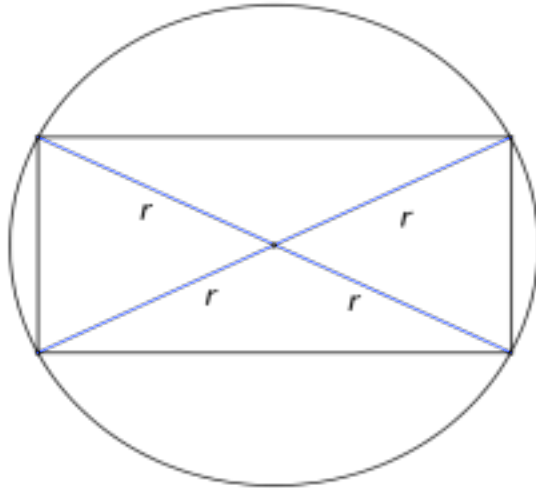
$$x - R = 301\,724,43\dots - 6370 = 295\,354,4\dots \text{ (km)}$$

Vastaus

295 000 km

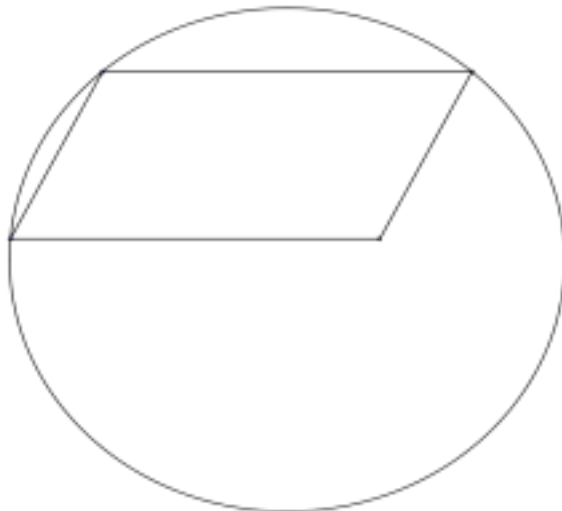
235

a)



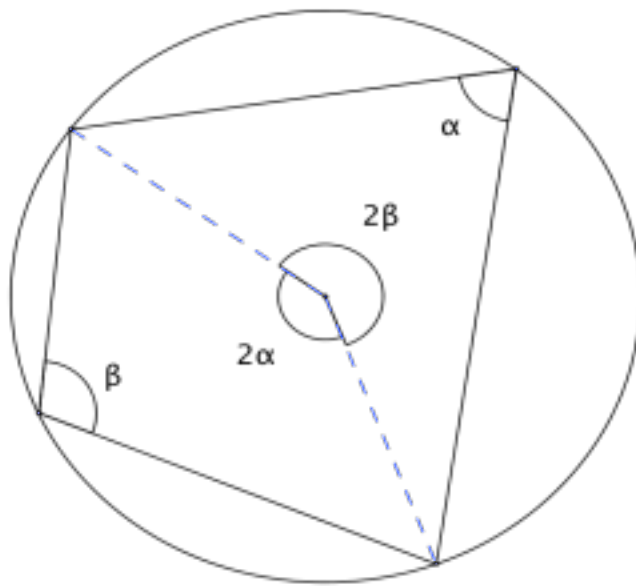
Suorakulmion lävistäjät ovat yhtä pitkät ja puolittavat toisensa. Lävistäjien leikkauspisteen etäisyys on yhtä suuri jokaisesta kärjestä. Suorakulmion lävistäjien leikkauspiste on ympäri piirretyn ympyrän keskipiste ja ympyrän säde on puolet lävistäjän pituudesta.

b)



Ympyrää ei voida piirtää, koska suunnikkaan keskipisteen etäisyys jokaisesta kärkipisteestä ei ole yhtäsuuri.

c)



$$2\alpha + 2\beta = 360^\circ$$

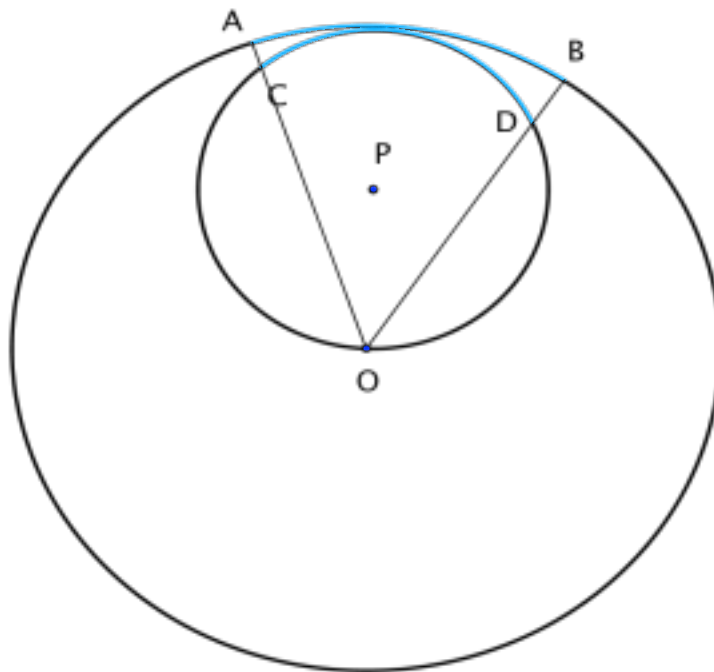
$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

Vastakkaiset kulmat ovat supplementtikulmia.

Vastaus

a) Voidaan b) Ei voida
c) Vastakkaiset kulmat ovat
suplementtikulmia.

236



Olkoon O -keskisen ympyrän säde r . Tällöin P -keskisen ympyrän säde on $\frac{1}{2}r$.

Olkoon kaarta AB vastaava keskuskulma α .

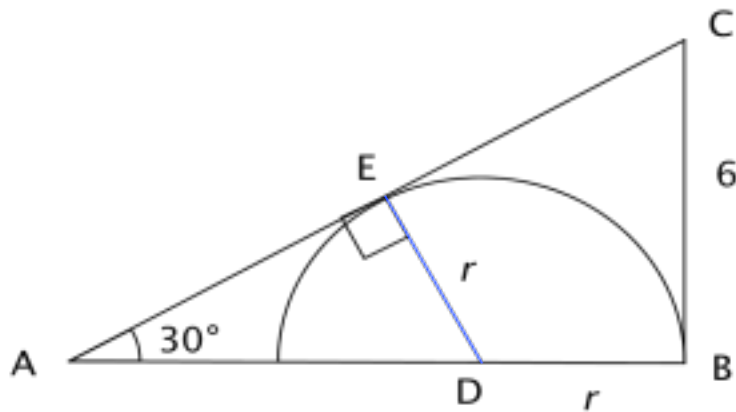
Kaaren AB pituus on $\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$.

Kulma α on kaarta CD vastaava kehäkulma, kaaren CD asteluku on 2α .

Kaaren CD pituus on $\frac{2\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot \frac{r}{2} = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$.

Siis kaaret AB ja CD ovat yhtä pitkät. $\square$

237



$$\frac{r}{AD} = \sin 30^\circ$$

$$AD = 2r$$

$$AB = 2r + r = 3r$$

$$\frac{6}{3r} = \tan 30^\circ$$

$$3r = \frac{6}{\tan 30}$$

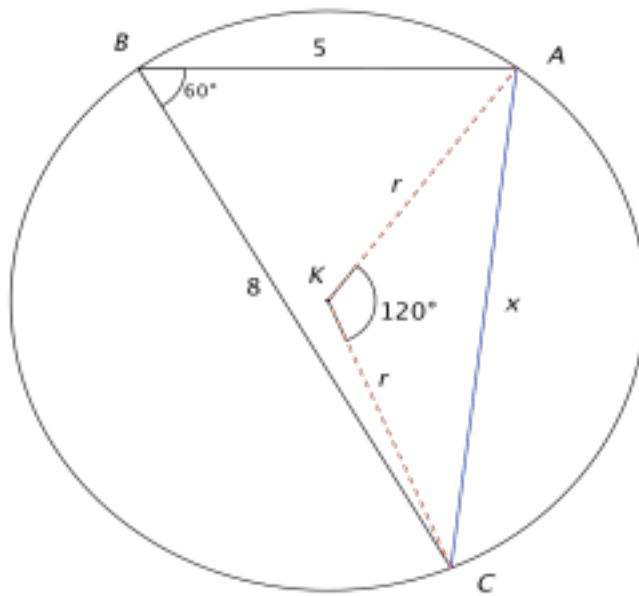
$$3r = \frac{6}{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$r = \frac{6}{\sqrt{3}}$$

Puoliympyrän ala $A = \frac{1}{2} \cdot \pi \left(\frac{6}{\sqrt{3}} \right)^2 = 6\pi$

Vastaus 6π

238



Lasketaan jängten AC pituus kosinilauseella.

$$x^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos 60^\circ$$

$$x^2 = 49$$

$$x = \pm \sqrt{49} \quad | x > 0$$

$$x = 7$$

Kaarta AC vastaava keskuskulma on 120° . Ratkaistaan ympyrän säde kosinilauseella.

$$x^2 = r^2 + r^2 - 2r \cdot r \cdot \cos 120^\circ$$

$$49 = 3r^2$$

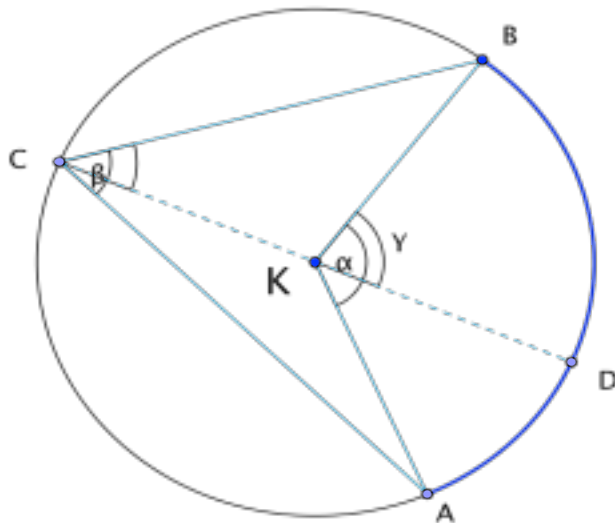
$$r = \pm \sqrt{\frac{49}{3}} \quad r > 0$$

$$r = \frac{7}{\sqrt{3}}$$

Vastaus $\frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$

239

Tapaus1. Ympyrän keskipiste on kehäkulman aukeamassa



Kehäkulman DCB toinen kylki on ympyrän halkaisija.
Merkitään keskuskulmaa DKB kirjaimella γ .

$$\sphericalangle DCB = \frac{\gamma}{2}$$

$$\sphericalangle ACB = \frac{\alpha - \gamma}{2}$$

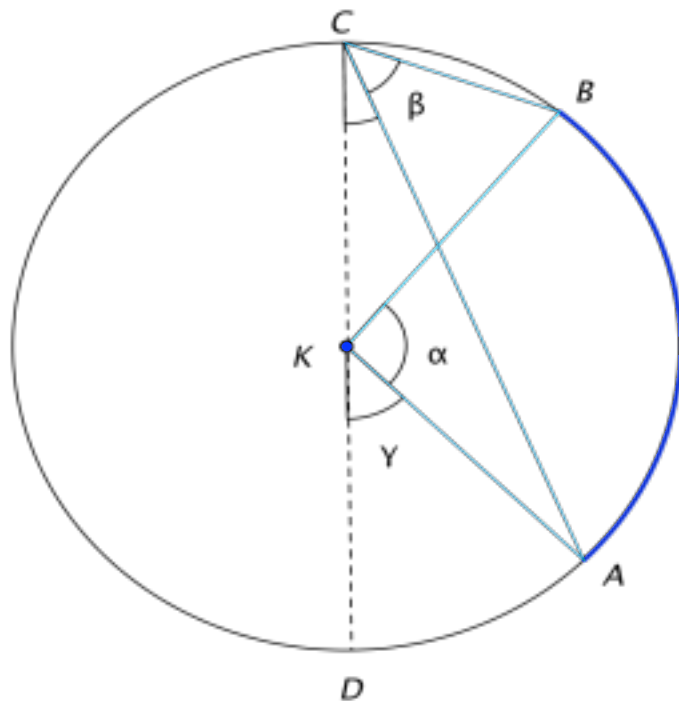
Kehäkulma, jonka toinen kylki on ympyrän halkaisija, on puolet vastaavasta keskuskulmasta.

Määritetään kehäkulman ACB suuruus kulmien α ja γ avulla.

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\gamma}{2} + \frac{\alpha - \gamma}{2} \\ &= \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

Siis kehäkulma on puolet vastaavasta keskuskulmasta myös, kun ympyrän keskipiste on kehäkulman aukeamassa.

Tapaus 2. Ympyrän keskipiste on kehäkulman aukeaman ulkopuolella.



Kehäkulmien DCA ja DCB toinen kylki on ympyrän halkaisija. Merkitään keskuskulmaa DKA kirjaimella γ .

$$\sphericalangle DCA = \frac{\gamma}{2}$$

$$\sphericalangle DCB = \frac{\alpha + \gamma}{2}$$

Kehäkulma, jonka toinen kylki on ympyrän halkaisija, on puolet vastaavasta keskuskulmasta.

Määritetään kehäkulman ACB suuruus kulmien α ja γ avulla.

$$\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2} - \frac{\gamma}{2}$$

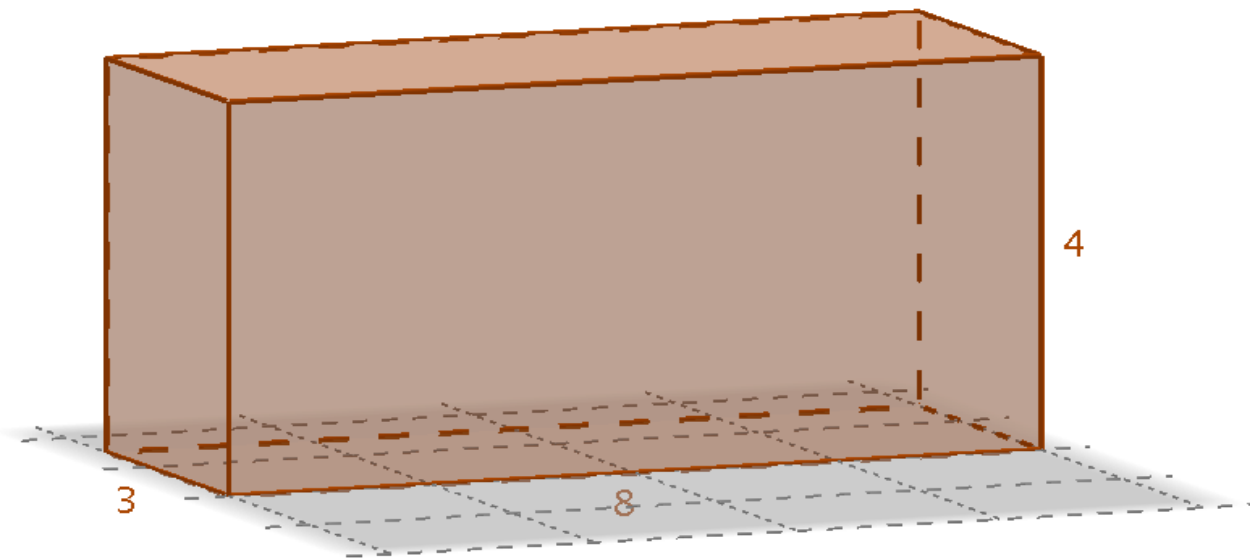
$$= \frac{\alpha}{2}$$

Siis kehäkulma on puolet vastaavasta keskuskulmasta myös, kun ympyrän keskipiste on kehäkulman aukeaman ulkopuolella.

On osoitettu, että kehäkulma on puolet vastaavasta keskuskulmasta myös, kun kehäkulman kylki ei ole ympyrän halkaisija. $\square$

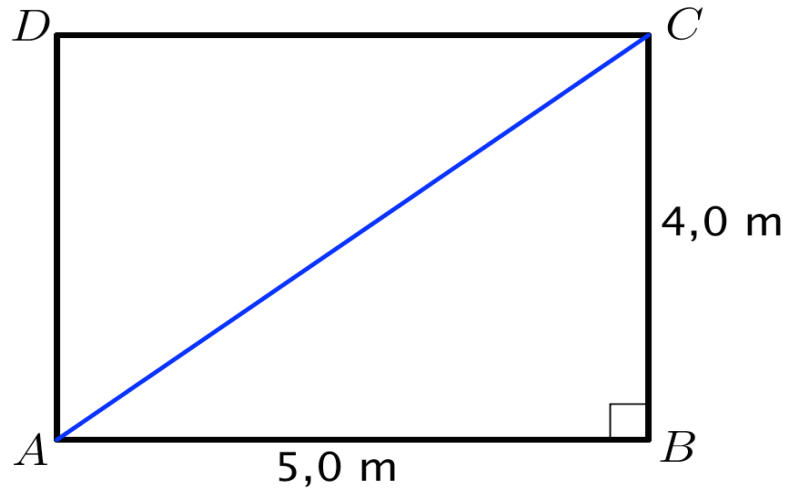
240

Kuva voidaan piirtää esimerkiksi GeoGebran 3D-piirtoalueessa. Piirtäminen voidaan esimerkiksi aloittaa piirtämällä suorakulmio pohjaksi ja syöttämällä sen jälkeen kartion korkeus.



241

- a) Lattian lävistäjän AC pituus voidaan laskea suorakulmaisesta kolmiosta ABC Pythagoraan lauseella.



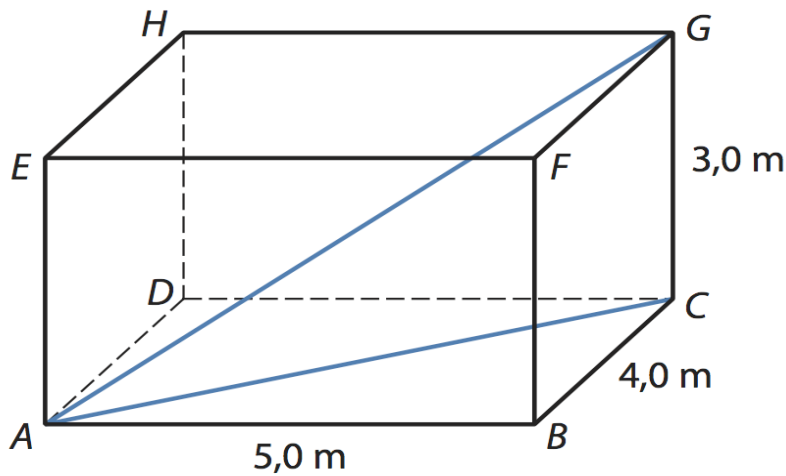
$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$$

$$|AC|^2 = 5^2 + 4^2$$

$$|AC| = \pm\sqrt{41} = \pm 6,403... \text{ (m)}$$

Lävistäjän pituus on positiivinen, joten $|AC| \approx 6,4 \text{ m}$.

b) Avaruuslävistäjän AG pituus voidaan laskea särmien pituuksien avulla.



$$|AG|^2 = 5^2 + 4^2 + 3^2$$

$$|AG| = \pm\sqrt{50} = \pm 7,071... \text{ (m)}$$

Lävistäjän pituus on positiivinen, joten $|AG| \approx 7,1 \text{ m}$.

Tapa 2

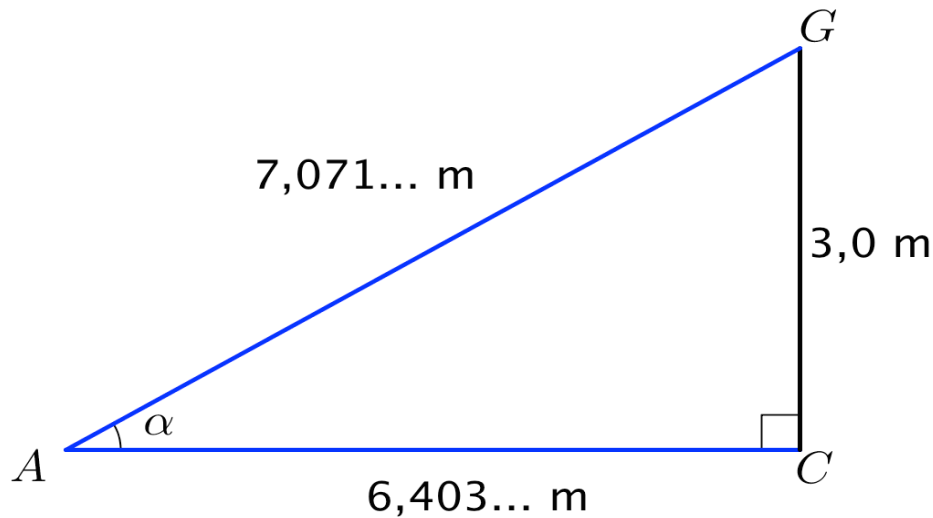
Avaruuslävistäjän pituus voidaan laskea myös suorakulmaisesta kolmiosta ACG Pythagoraan lauseella.

$$|AG|^2 = |AC|^2 + |CG|^2 \quad \text{a-kohta: } |AC|^2 = 41$$

$$|AG|^2 = 41 + 3^2$$

$$|AG| = \pm\sqrt{50} \pm 7,071... \text{ (m)}$$

- c) Lävistäjien AC ja AG välinen kulma voidaan laskea suorakulmaisesta kolmiosta ACG .



Kulma α voidaan ratkaista esimerkiksi tangentin avulla.

$$\tan \alpha = \frac{3}{6,403...}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{3}{6,403...}\right) = 25,104...^{\circ} \approx 25,1^{\circ}$$

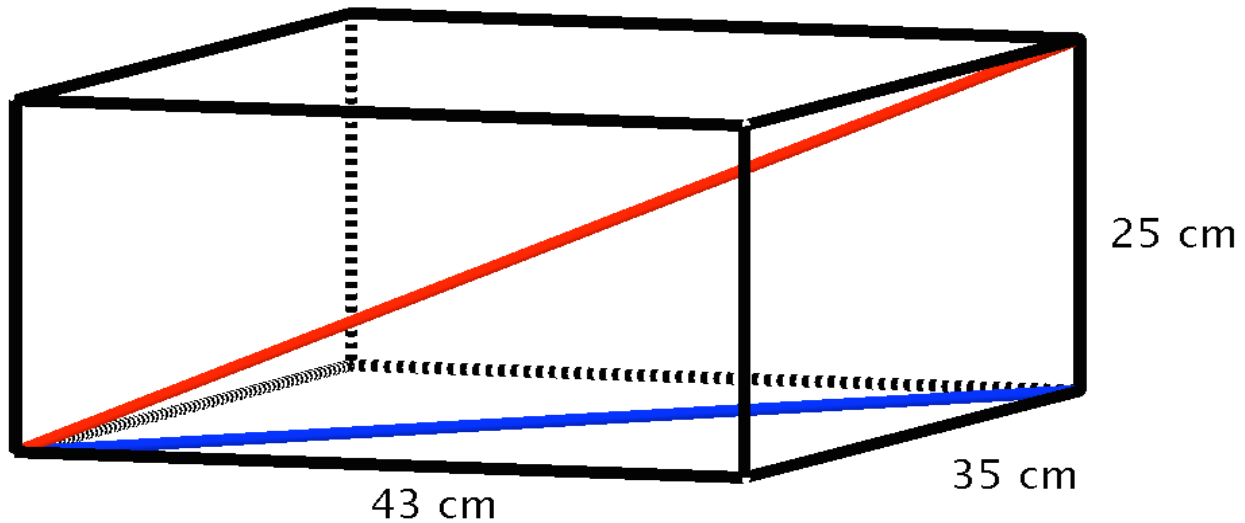
Huomautus:

Koska kolmiosta tiedetään kaikkien sivujen pituudet voidaan kulma α ratkaista myös kosinin tai sinin avulla.

Vastaus a) 6,4 m b) 7,1 m c) $25,1^{\circ}$

242

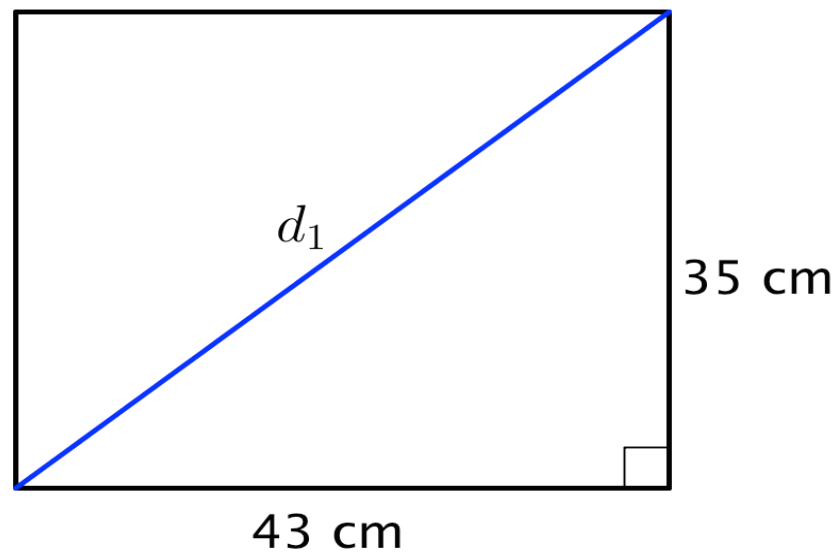
Piirretään mallikuva säilytyslaatikosta.



Laatikon pohjalle mahtuvan sauvan maksimipituus on pohjan lävistäjän pituus (piirretty sinisellä).

Laatikon sisälle mahtuvan sauvan maksimipituus on avaruoslävistäjän pituus (piirretty punaisella).

a) Lasketaan laatikon pohjan lävistäjä Pythagoraan lauseella.



$$d_1^2 = 43^2 + 35^2$$

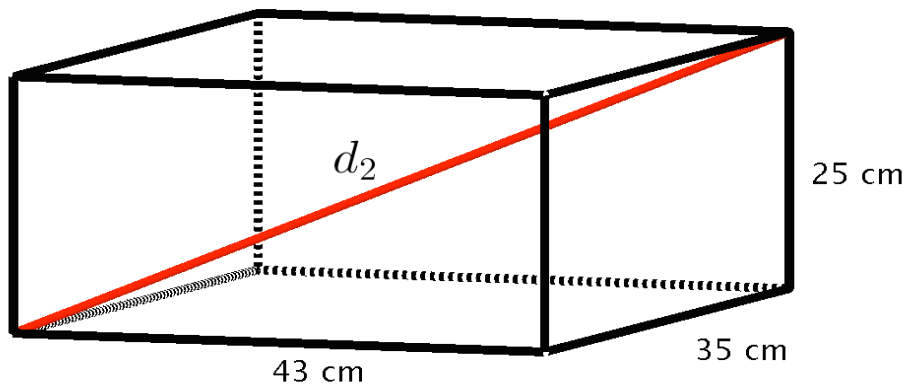
$$d_1^2 = 3074$$

$$d_1 = \pm\sqrt{3074} = \pm 55,443... \text{ (cm)}$$

Lävistäjän pituus on positiivinen, joten $d_1 = 55,443... \text{ cm}$.

Laatikon pohjalle mahtuu siis korkeintaan 55 cm pituinen sauva.

b) Lasketaan laatikon avaruuslävistäjän pituus.



$$d_2^2 = 43^2 + 35^2 + 25^2$$

$$d_2^2 = 3699$$

$$d_2 = \pm\sqrt{3699} = \pm 60,819... \text{ (cm)}$$

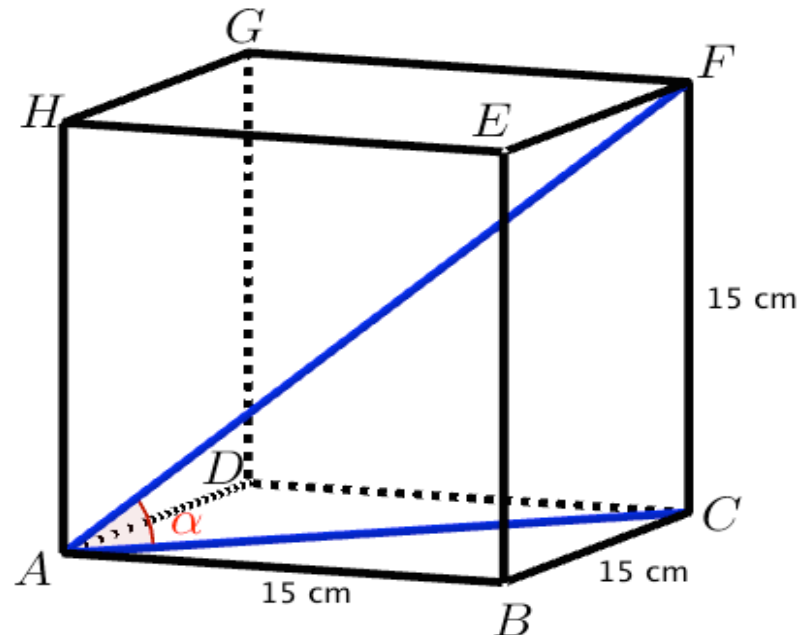
Lävistäjän pituus on positiivinen, joten $d_2 = 60,819... \text{ cm}$.

Laatikkoon mahtuu siis korkeintaan 60 cm pituinen sauva.

Vastaus a) 55 cm b) 60 cm

243

Piirretään mallikuva ja merkitään kysyttyä kulmaa kirjaimella α .

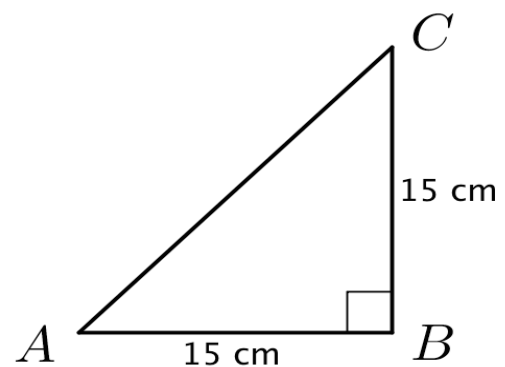


Lasketaan ensin pohjan lävistäjän AC pituus suorakulmaisesta kolmiosta ABC .

$$|AC|^2 = 15^2 + 15^2$$

$$|AC|^2 = 450$$

$$|AC| = \pm\sqrt{450} = \pm 21,213\dots$$

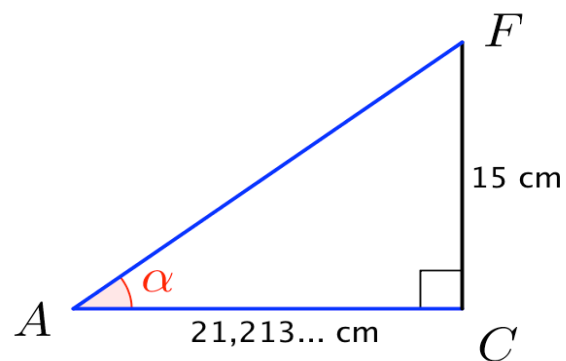


Koska pituus on positiivinen, niin $|AC| = 21,213\dots$ cm.

Nyt voimme laskea kulman α suuruuden suorakulmaisesta kolmiosta ACF .

$$\tan \alpha = \frac{15}{21,213...}$$

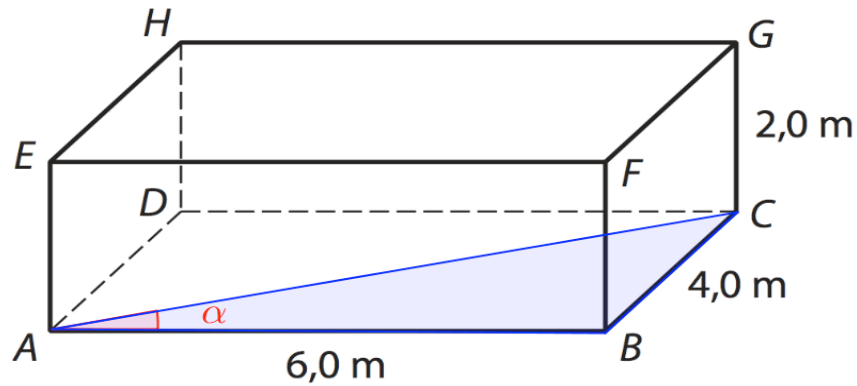
$$\begin{aligned}\alpha &= \tan^{-1}\left(\frac{15}{21,213...}\right) \\ &= 35,264...\text{°} \approx 35,3\text{°}\end{aligned}$$



Vastaus $35,3\text{°}$

244

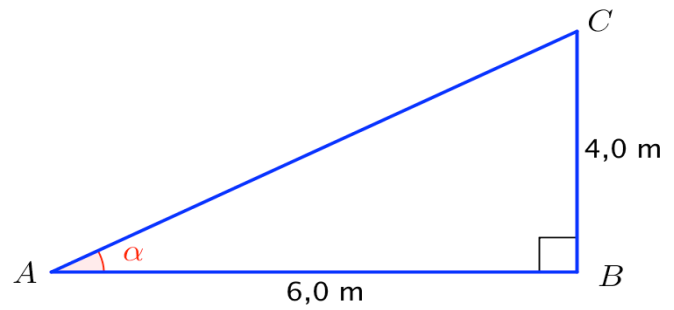
a) Kysytty kulma voidaan ratkaista suorakulmaisesta kolmiosta ABC .



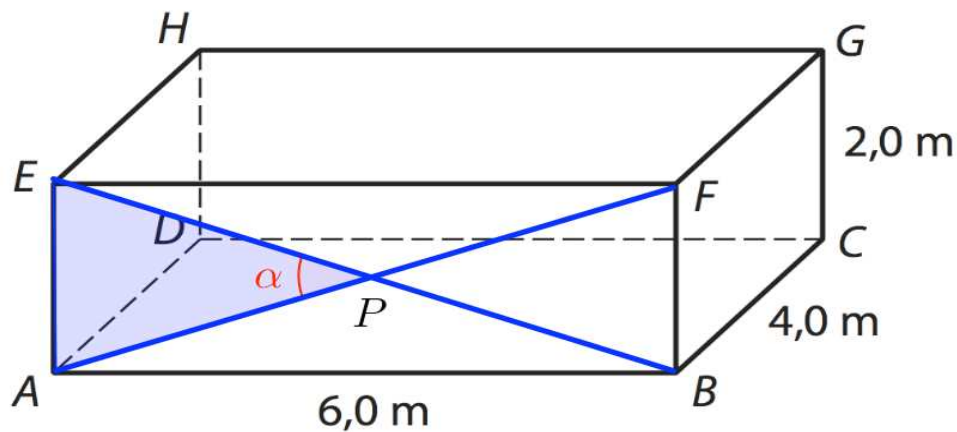
$$\tan \alpha = \frac{4}{6}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{4}{6}\right)$$

$$= 33,690\dots^\circ \approx 34^\circ$$



- b) Sivuseinämän lävistäjien välinen kulma voidaan ratkaista tasakylkisestä kolmiosta EAP .



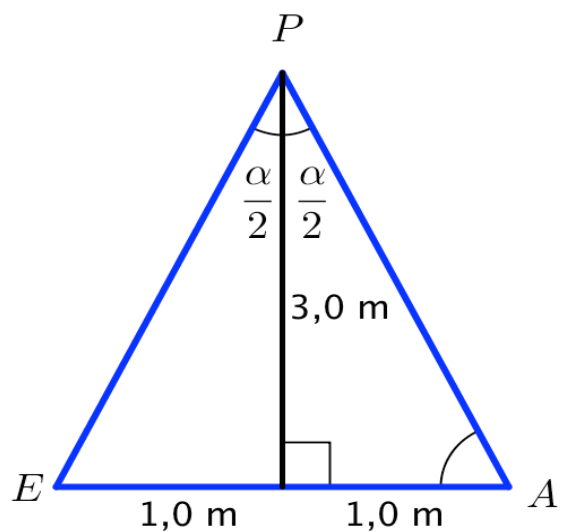
Koska kolmio EAP on tasakylkinen, niin huippukulmasta piirretty kulman puolittaja jakaa kolmion kahdeksi suorakulmaiseksi kolmioksi. Ratkaistaan kulma α .

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$$

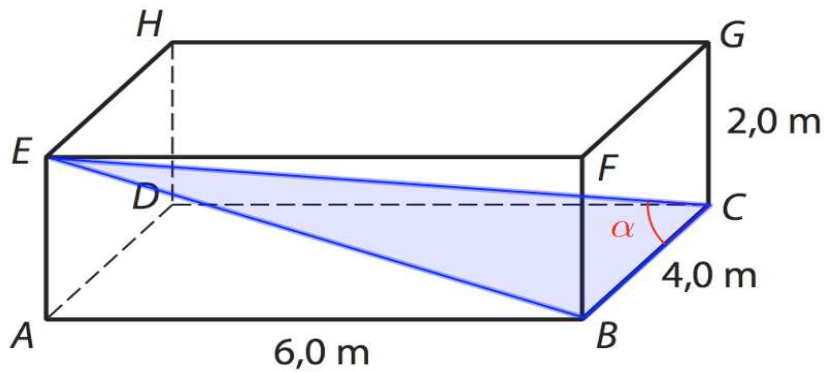
$$\frac{\alpha}{2} = \tan^{-1} \left(\frac{1}{3} \right)$$

$$\frac{\alpha}{2} = 18,434...^{\circ} \quad | \cdot 2$$

$$\alpha = 36,869...^{\circ} \approx 37^{\circ}$$



c) Kysytty kulma voidaan ratkaista suorakulmaisesta kolmiosta EBC .



Lasketaan ensin avaruuslävistäjän EC pituus suorakulmaisen särmiön särmien pituuden perusteella.

$$|EC|^2 = 6^2 + 4^2 + 2^2$$

$$|EC|^2 = 56$$

$$|EC| = \pm\sqrt{56} = \pm 7,483\dots$$

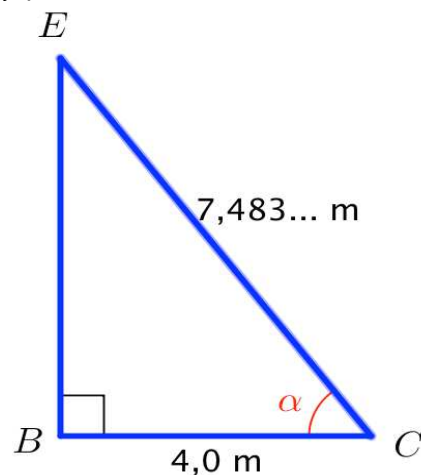
Pituus on positiivinen, joten $|EC| = 7,483\dots \text{ m}$.

Ratkaistaan seuraavaksi kulma α .

$$\cos \alpha = \frac{4}{7,483\dots}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{4}{7,483\dots}\right)$$

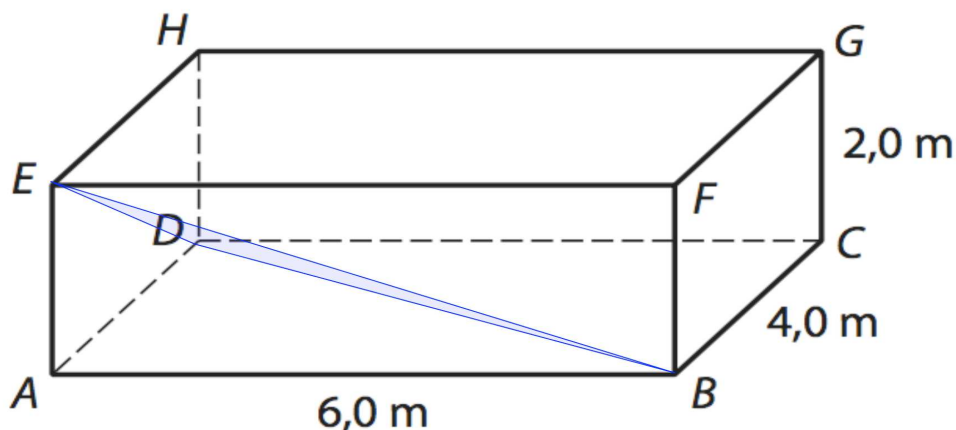
$$= 57,688\dots^\circ \approx 58^\circ$$



Vastaus a) 34° b) 37° c) 58°

245

Kysytty kulma voidaan ratkaista kolmiosta EBD .

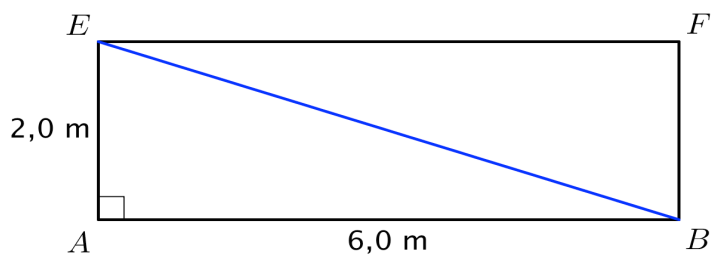


Lasketaan kolmion sivujen pituudet eli sivutahkojen lävistäjien pituudet Pythagoraan lauseen perusteella.

$$|EB|^2 = 6^2 + 2^2 = 40$$

$$|EB| = \pm\sqrt{40} \text{ (m)}$$

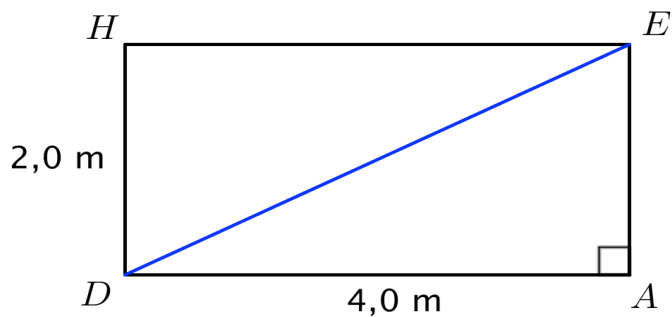
Siis $|EB| = \sqrt{40} \text{ m.}$



$$|ED|^2 = 4^2 + 2^2 = 20$$

$$|DE| = \pm\sqrt{20} \text{ (m)}$$

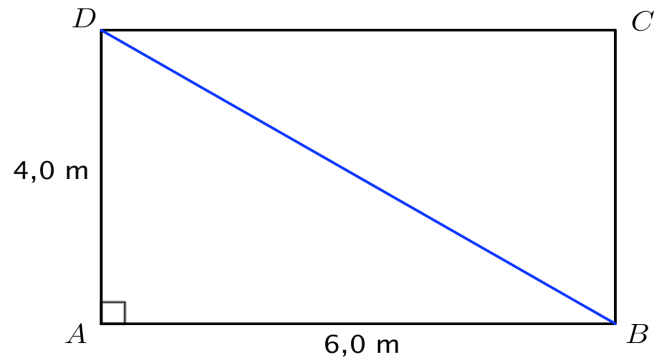
Siis $|DE| = \sqrt{20} \text{ m.}$



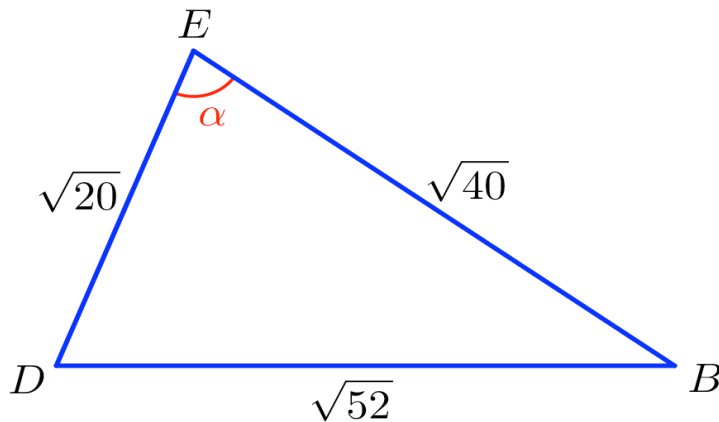
$$|DB|^2 = 6^2 + 4^2 = 52$$

$$|DB| = \pm\sqrt{52} \text{ (m)}$$

$$\text{Siis } |DB| = \sqrt{52} \text{ m.}$$



Ratkaistaan kysytty kulma kolmiosta EBD kosinilauseella.



$$|DB|^2 = |ED|^2 + |EB|^2 - 2|ED||EB|\cos\alpha$$

$$52 = 20 + 40 - 2\sqrt{20}\sqrt{40}\cos\alpha$$

$$2\sqrt{20}\sqrt{40}\cos\alpha = 60 - 52$$

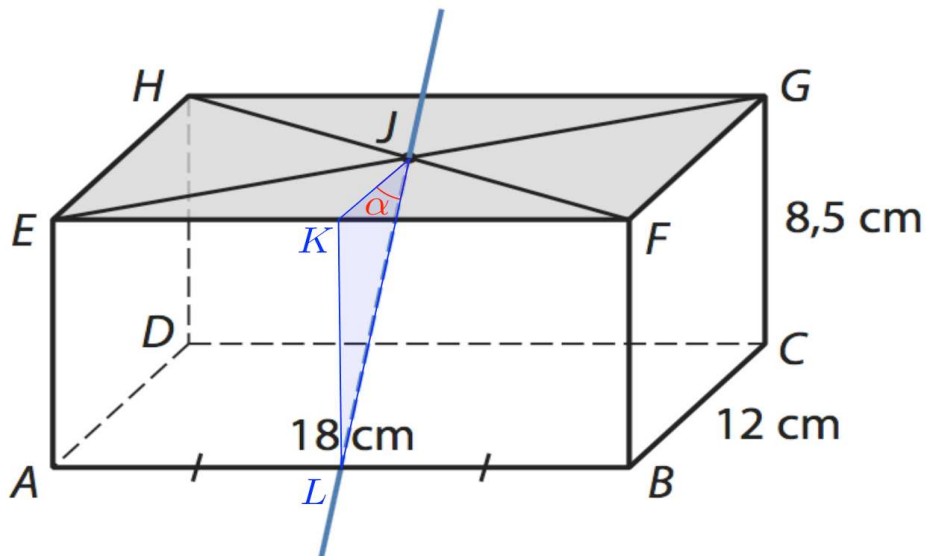
$$\cos\alpha = \frac{8}{2\sqrt{20}\sqrt{40}}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{8}{2\sqrt{20}\sqrt{40}}\right) = 81,869\dots^\circ \approx 82^\circ$$

Vastaus 82°

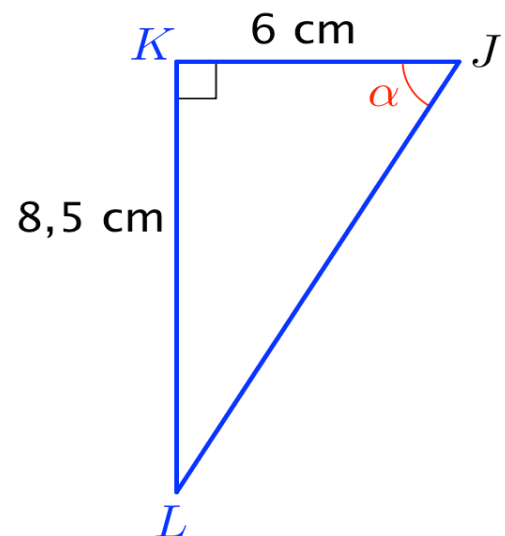
246

Kysytty kulma α voidaan ratkaista suorakulmaisesta kolmiosta LJK .



$$\tan \alpha = \frac{8,5}{6}$$

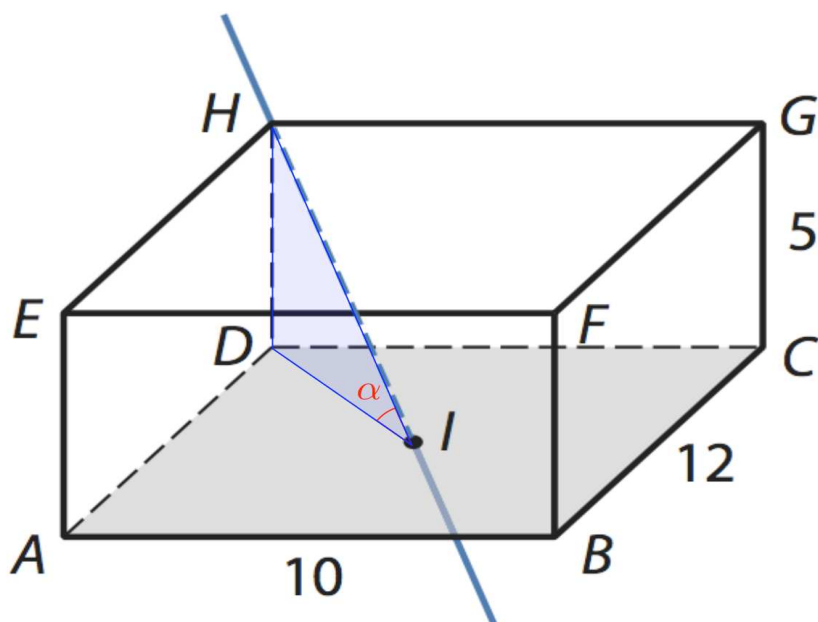
$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{8,5}{6}\right) = 54,782\dots^\circ \approx 55^\circ$$



Vastaus 55°

247

Kysytty kulma α voidaan ratkaista suorakulmaisesta kolmiosta DIH .



Lasketaan ensin sivun DI pituus. Piste I on pohjatahkon keskipiste, joten $|DI| = \frac{1}{2}|DB|$.

Lävistäjän DB pituus saadaan Pythagoraan lauseen avulla.

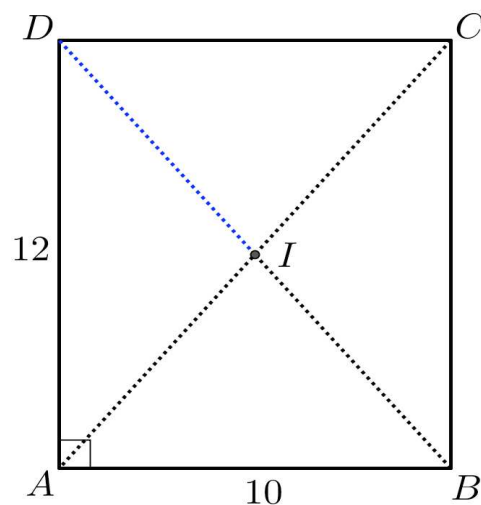
$$|DB|^2 = 10^2 + 12^2$$

$$|DB| = \pm\sqrt{244} = \pm 2\sqrt{61}$$

Lävistäjän pituus on positiivinen, joten

$$|DB| = 2\sqrt{61}.$$

$$\text{Tällöin } |DI| = \frac{1}{2}|DB| = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{61} = \sqrt{61}.$$

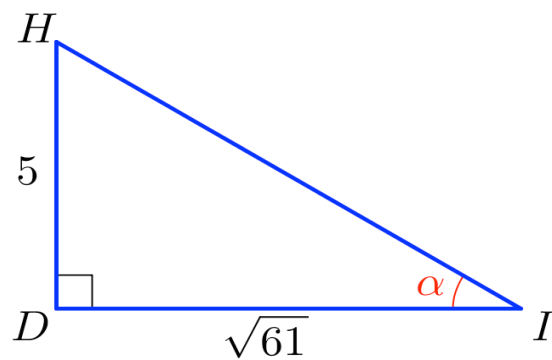


Ratkaistaan kulma α suorakulmaisesta kolmiosta DIH .

$$\tan \alpha = \frac{5}{\sqrt{61}}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{61}}\right)$$

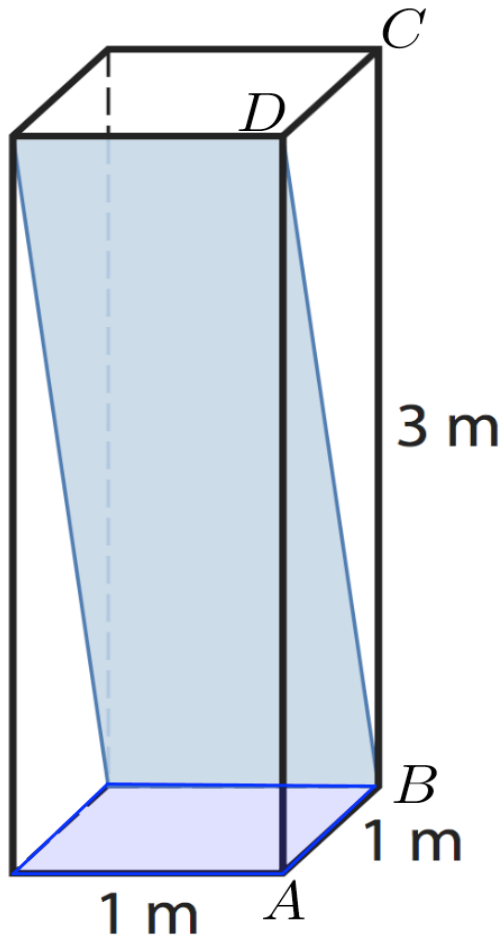
$$= 32,626\dots^\circ \approx 33^\circ$$



Vastaus 33°

248

Suorakulmaisen särmiön päätytahko $ABCD$ on kohtisuorassa tasojen leikkaussuoraa vastaan. Tasojen välinen kulma on päätytahkon lävistäjän DB ja pohjasärmän AB välinen kulma, joka voidaan ratkaista suorakulmaisesta kolmiosta ABD .

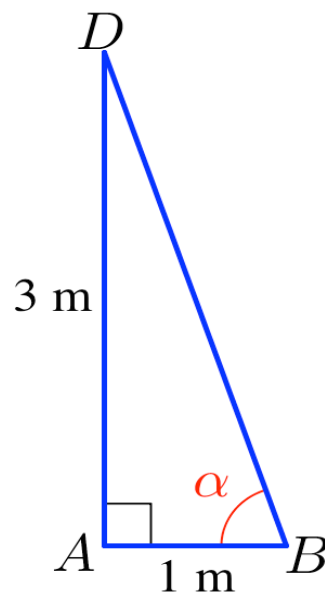


Ratkaistaan kulma α suorakulmaisesta kolmiosta ABD .

$$\tan \alpha = \frac{3}{1}$$

$$\alpha = \tan^{-1}(3)$$

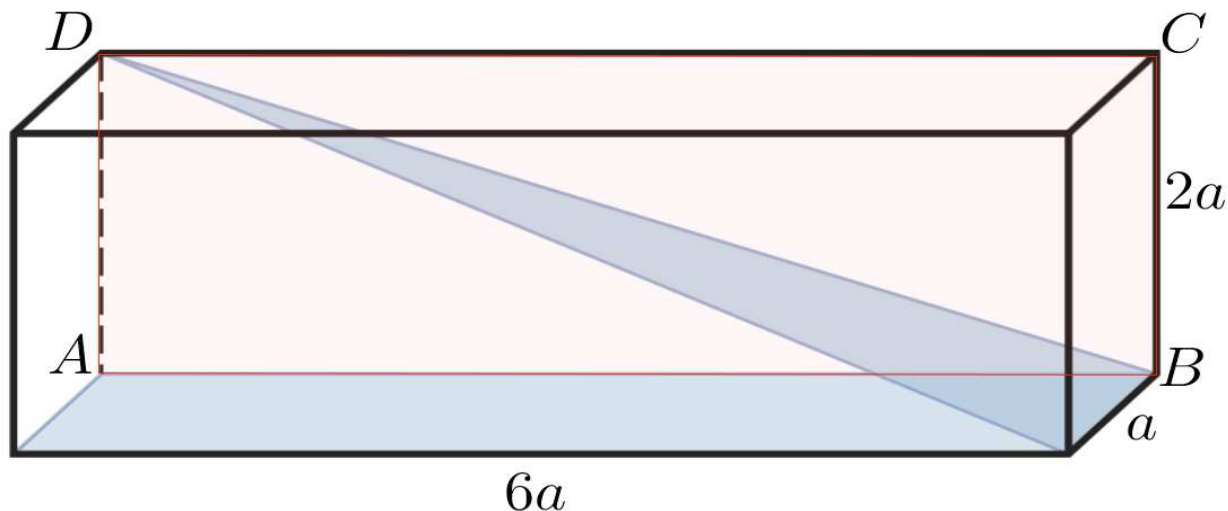
$$= 71,565...^{\circ} \approx 72^{\circ}$$



Vastaus 72°

249

- a) Merkitään suorakulmaisen särmiön pohjan leveyttä kirjaimella a . Tällöin pohjan pituus on $6a$ ja särmiön korkeus $2a$.

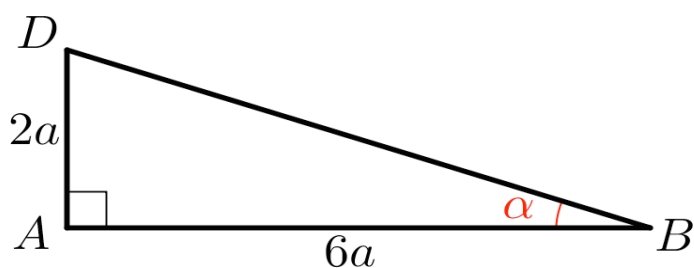


Suorakulmaisen särmiön tahko $ABCD$ on kohtisuorassa tasojen leikkaussuoraa vastaan. Tasojen välinen kulma on päätytahkon lävistäjän DB ja pohjasärmän AB välinen kulma, joka voidaan ratkaista suorakulmaisesta kolmiosta ABD .

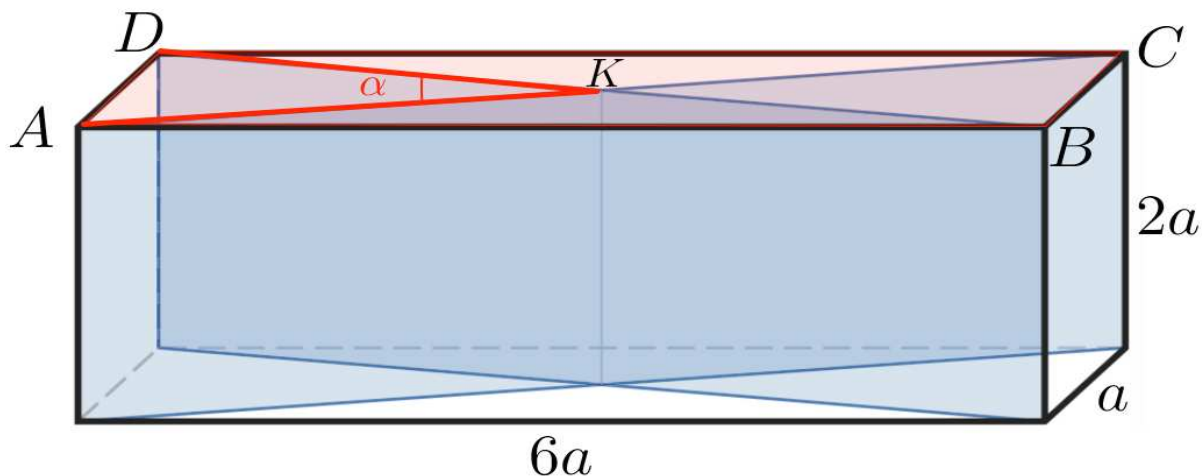
$$\tan \alpha = \frac{2\cancel{a}}{6\cancel{a}} = \frac{1}{3}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= 18,434\dots^\circ \approx 18,4^\circ$$



- b) Suorakulmaisen särmiön tahko $ABCD$ on kohtisuorassa tasojen leikkaussuoraa vastaan. Tasojen välinen kulma on suorakulmion $ABCD$ lävistäjien välinen kulma, joka voidaan laskea tasakylkisestä kolmiosta DAK .



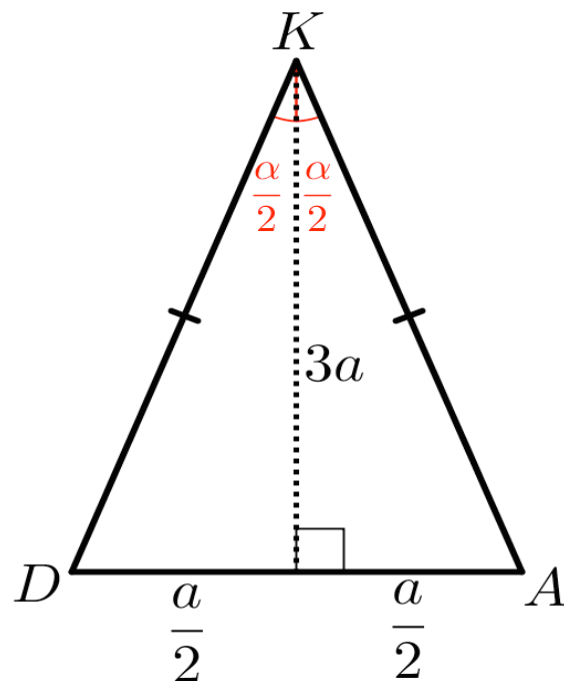
Koska kolmio DAK on tasakylkinen, niin huippukulman puolittaja jakaa kolmion DAK kahdeksi suorakulmaiseksi kolmioksi. Ratkaistaan tasojen välinen kulma α .

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{3a} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{\alpha}{2} = \tan^{-1} \left(\frac{1}{6} \right)$$

$$\frac{\alpha}{2} = 9,462...^{\circ} \quad | \cdot 2$$

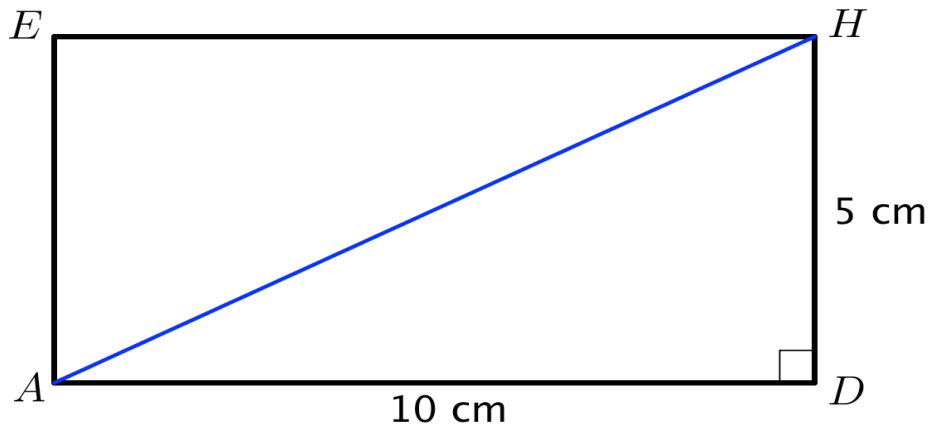
$$\alpha = 18,924... \approx 18,9^{\circ}$$



Vastaus a) $18,4^{\circ}$ b) $18,9^{\circ}$

250

- a) Sivutahkon lävistäjän AH pituus voidaan laskea suorakulmaisesta kolmiosta ADH Pythagoraan lauseella.



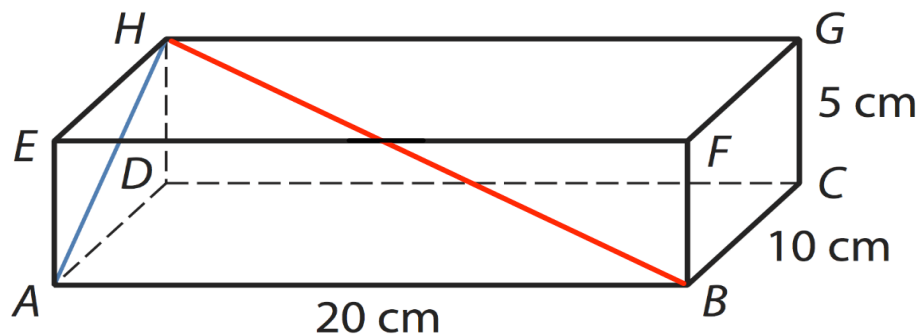
$$|AH|^2 = |AD|^2 + |DH|^2$$

$$|AH|^2 = 10^2 + 5^2$$

$$|AH| = \pm\sqrt{125} = \pm 11,180\dots (\text{cm})$$

Lävistäjän pituus on positiivinen, joten $|AH| \approx 11,2\text{ cm}$.

- b) Avaruuslävistäjän HB pituus voidaan laskea särmien pituuksien avulla.



$$|HB|^2 = 20^2 + 10^2 + 5^2$$

$$|HB| = \pm\sqrt{525} = \pm 22,912... \text{ (cm)}$$

Lävistäjän pituus on positiivinen, joten $|HB| \approx 22,9 \text{ cm}$.

Tapa 2

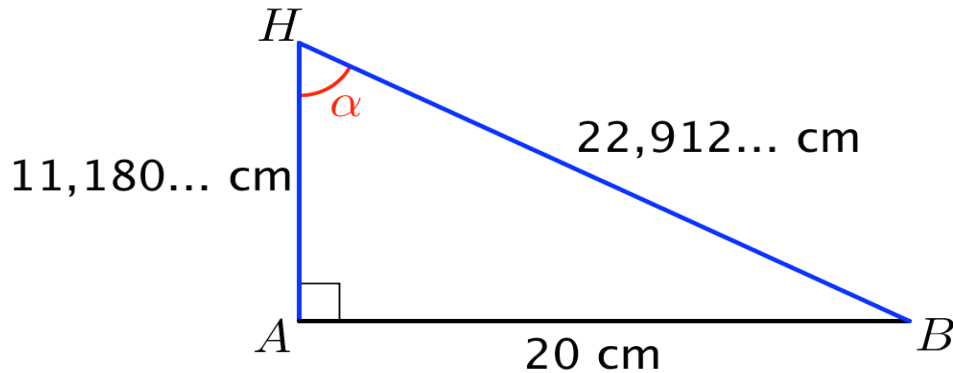
Avaruuslävistäjän pituus voidaan laskea myös suorakulmaisesta kolmiosta ABH Pythagoraan lauseella.

$$|HB|^2 = |AB|^2 + |AH|^2 \quad \text{a-kohta: } |AH|^2 = 125$$

$$HB^2 = 20^2 + 125$$

$$|HB| = \pm\sqrt{525} = \pm 22,912... \text{ (cm)}$$

- c) Lävistäjien AH ja HB välinen kulma voidaan laskea suorakulmaisesta kolmiosta ABH .



Kulma α voidaan ratkaista esimerkiksi tangentin avulla.

$$\tan \alpha = \frac{20}{11,180...}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{20}{11,180...}\right) = 60,794...^{\circ} \approx 60,8^{\circ}$$

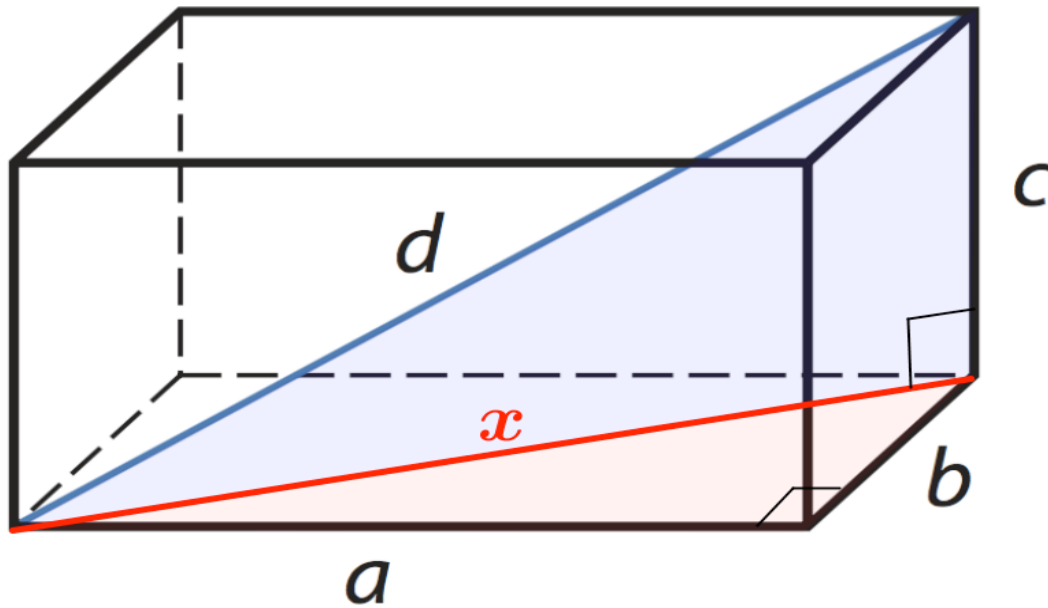
Huomautus:

Koska kolmiosta tiedetään kaikkien sivujen pituudet voidaan kulma α ratkaista myös kosinin tai sinin avulla.

Vastaus a) 11,2 cm b) 22,9 cm c) 60,8°

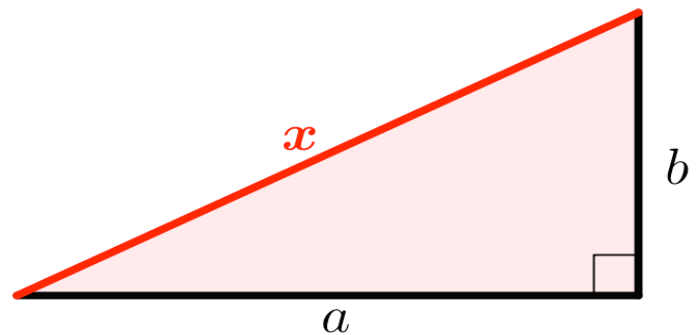
251

Avaruuslävistäjän pituus d voidaan laskea käyttämällä Pythagoraan lausetta kaksi kertaa.

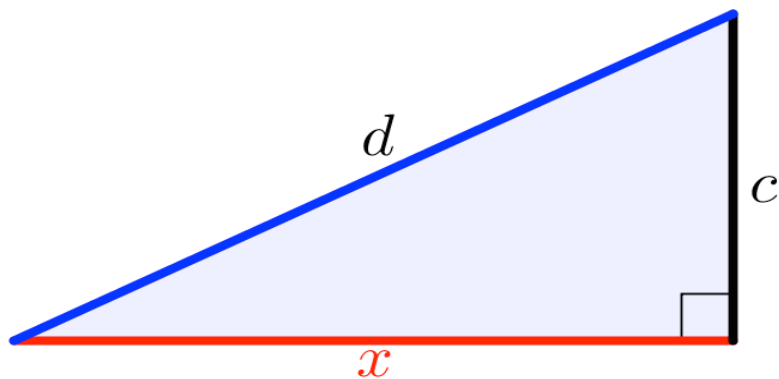


Lasketaan ensin pohjan lävistäjän pituuden neliö x^2 .

$$x^2 = a^2 + b^2$$



Lasketaan seuraavaksi avaruuslävistäjän pituus d .



$$d^2 = x^2 + c^2 \quad \Big| \quad \text{Sijoitetaan } x^2 = a^2 + b^2$$

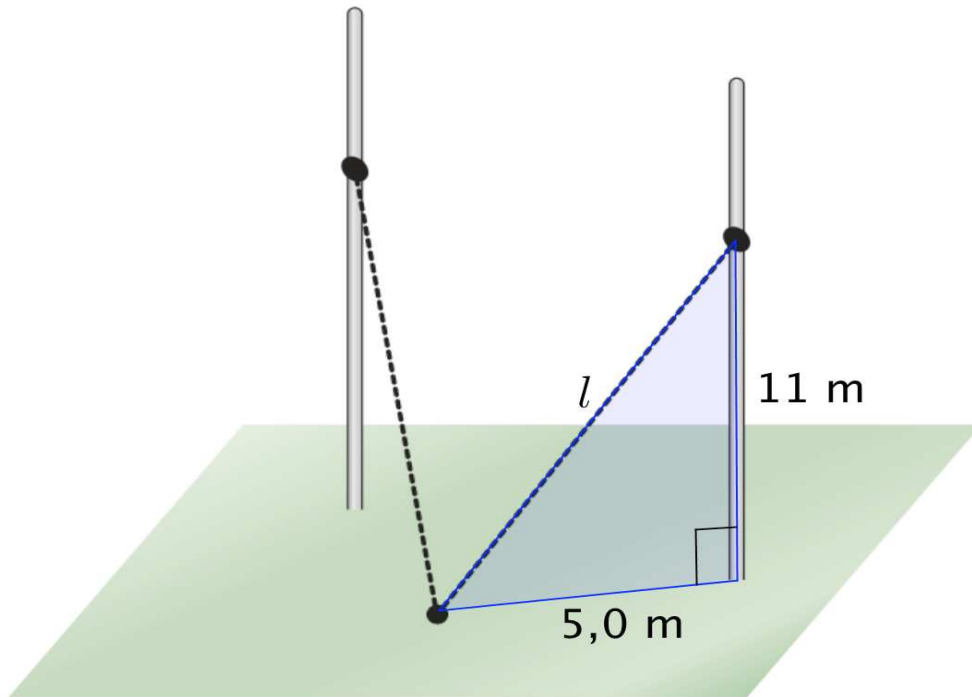
$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

$$d = \pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Koska pituus on positiivinen, niin $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. $\square$

252

Lasketaan ensin tukivaijerin pituus l .



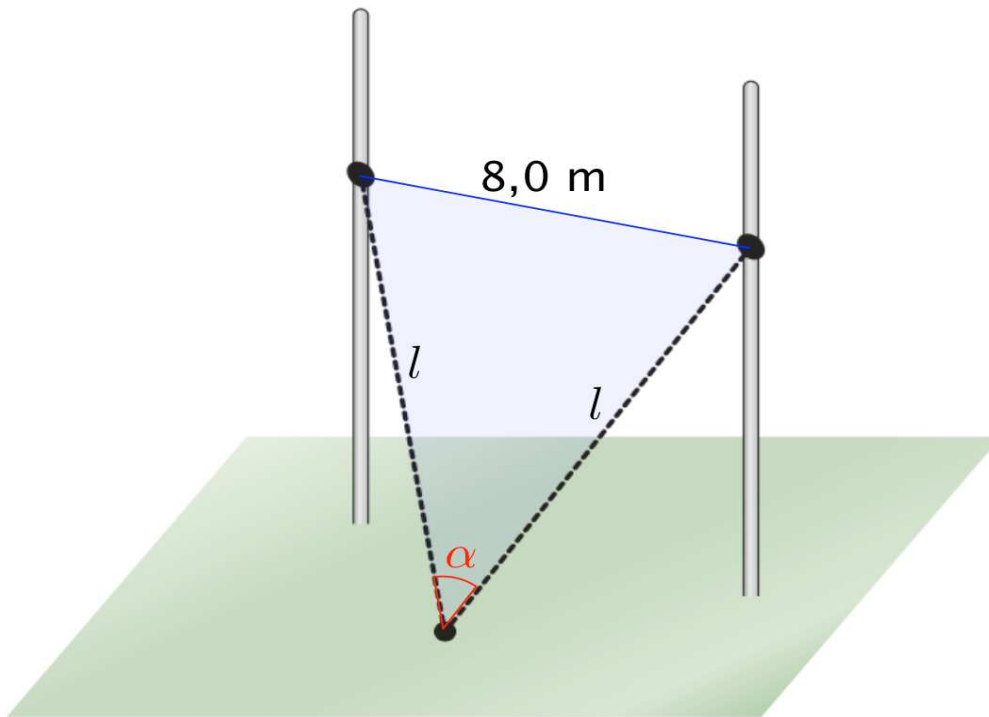
$$l^2 = 5^2 + 11^2$$

$$l^2 = 146$$

$$l = \pm\sqrt{146}$$

Koska pituus on positiivinen, niin $l = \sqrt{146}$.

Lasketaan seuraavaksi vaijereiden välinen kulma kosinilauseella.



$$8,5^2 = l^2 + l^2 - 2 \cdot l \cdot l \cdot \cos \alpha$$

$$72,25 = 2l^2 - 2l^2 \cos \alpha \quad \left| \text{ Sijoitetaan } l^2 = 146 \right.$$

$$72,25 = 2 \cdot 146 - 2 \cdot 146 \cos \alpha$$

$$292 \cos \alpha = 292 - 72,25 \quad \left| : 292 \right.$$

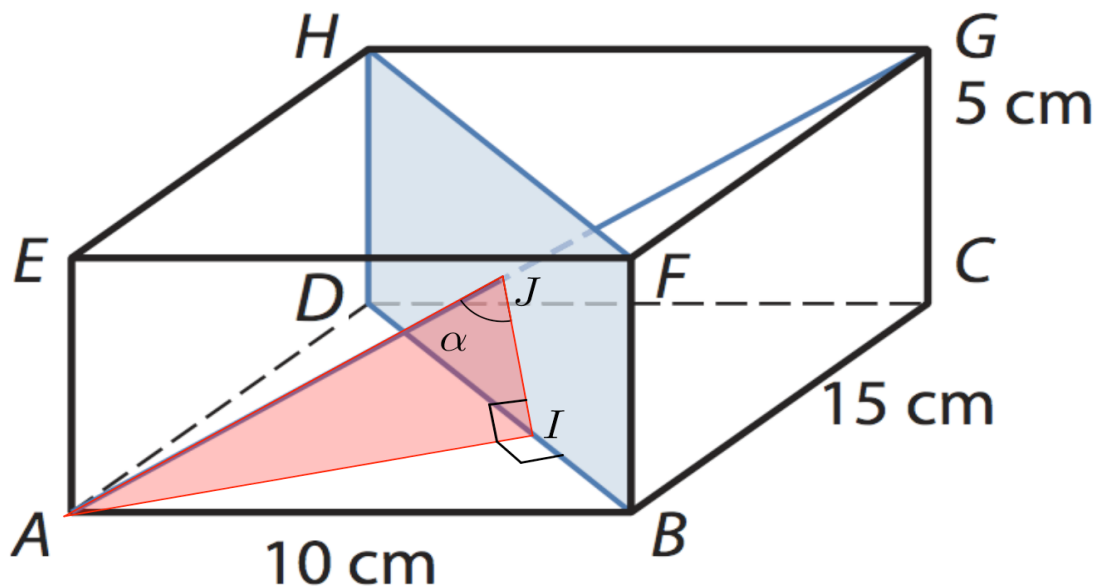
$$\cos \alpha = \frac{219,75}{292}$$

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{219,75}{292} \right) = 41,186...^\circ \approx 41^\circ$$

Vastaus 41°

253

Pahvilevyn $BFHD$ ja tikun AG välinen kulma on janan AJ ja sen sen tasolla $BFHD$ olevan kohtisuoran projektiojanan IJ välinen kulma α . Kulma voidaan laskea suorakulmaisesta kolmiosta AIJ .



Jana AJ on puolet avaruuslävistäjästä AG . Lasketaan avaruuslävistäjän AG pituus.

$$|AG|^2 = 10^2 + 15^2 + 5^2$$

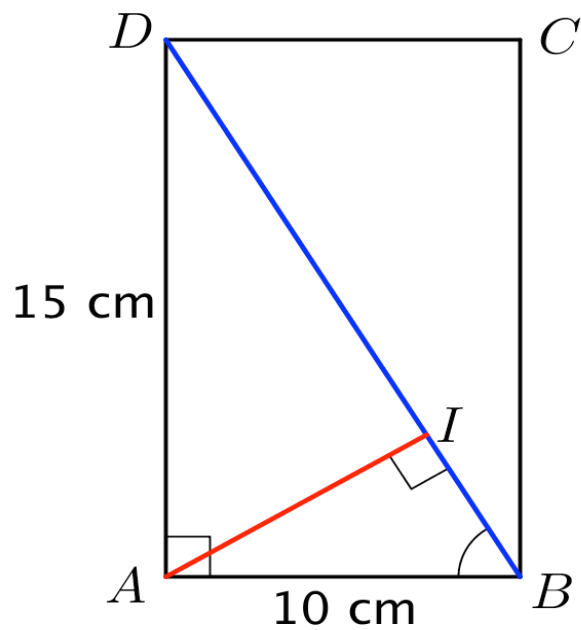
$$|AG|^2 = 350$$

$$|AG| = \pm\sqrt{350} = \pm 18,708... \text{ (cm)}$$

Koska pituus on positiivinen, niin $|AG| = 18,708... \text{ cm}$.

$$\text{Siten } |AJ| = \frac{18,708... \text{ cm}}{2} = 9,354... \text{ cm}.$$

Lasketaan seuraavaksi janan AI pituus suorakulmiosta $ABCD$.



Lävistäjän DB pituus on $|DB| = \sqrt{10^2 + 15^2} = \sqrt{325}$.

Kolmiot ABI ja ABD ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen nojalla:

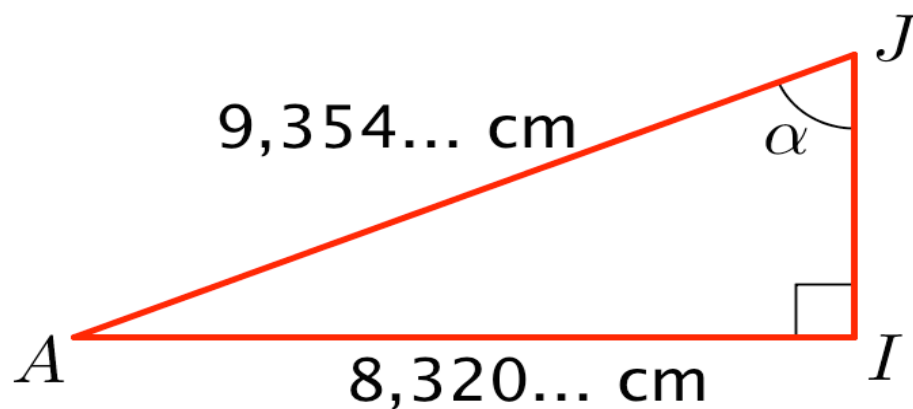
- suorat kulmat
- yhteinen kulma B .

Muodostetaan verranto ja ratkaistaan janan AI pituus.

$$\frac{|AI|}{15} = \frac{10}{\sqrt{325}} \quad | \cdot 15$$

$$|AI| = \frac{150}{\sqrt{325}} = 8,320... \text{ (cm)}$$

Lasketaan kysytyn kulman α suuruus suorakulmaista kolmiosta AIJ .



$$\sin \alpha = \frac{8,320...}{9,354...}$$

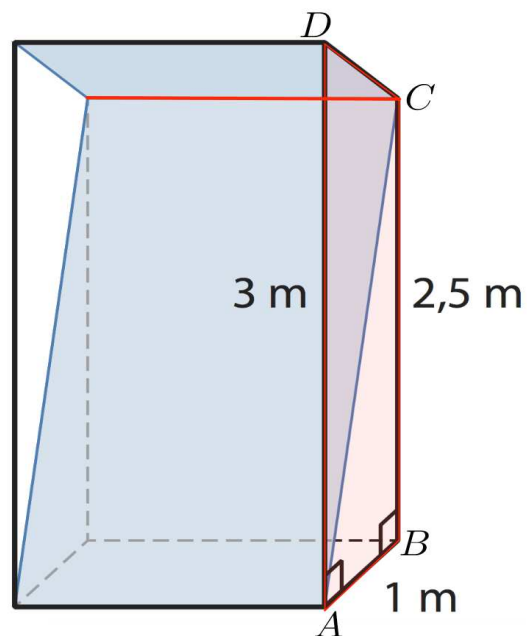
$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{8,320...}{9,354...}\right)$$

$$\alpha = 62,810...^{\circ} \approx 62,8^{\circ}$$

Vastaus $62,8^{\circ}$

254

Särmiön päätytahko $ABCD$ on kohtisuorassa tasojen leikkaussuoraa vastaan.



Piirretään mallikuva päätytahkosta $ABCD$.

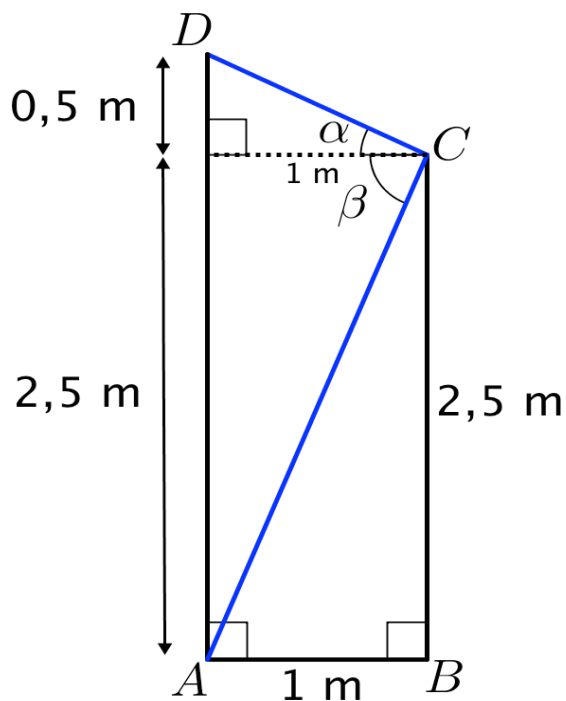
Päätytahkon sisällä oleva tasojen välinen kulma $\sphericalangle DCA = \alpha + \beta$ voidaan laskea kahdesta suorakulmaisesta kolmiosta.

$$\tan \alpha = \frac{0,5}{1} = 0,5$$

$$\alpha = \tan^{-1} 0,5 = 26,565...^{\circ}$$

$$\tan \beta = \frac{2,5}{1} = 2,5$$

$$\beta = \tan^{-1} 2,5 = 68,198...^{\circ}$$



Täten kulman DCA suuruudeksi saadaan

$$\sphericalangle DCA = 26,565\dots^\circ + 68,198\dots^\circ = 94,763\dots^\circ \approx 95^\circ.$$

Koska kulma DCA on yli 90° , niin tasojen välinen kulma on sen vieruskulma eli

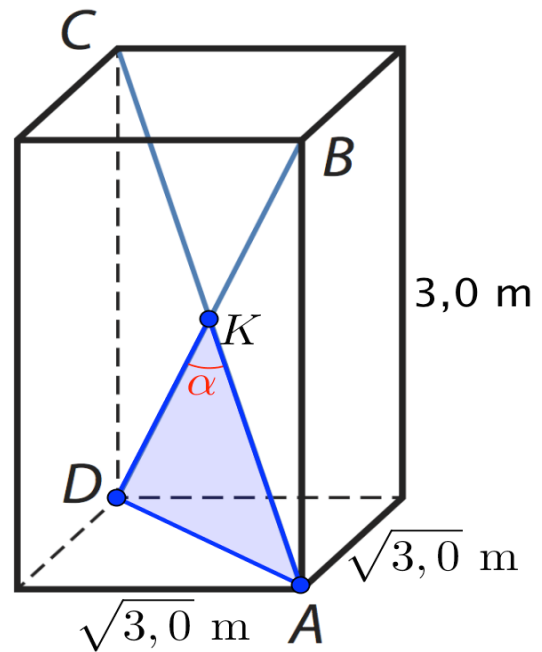
$$180^\circ - 95^\circ = 85^\circ.$$

Vastaus 85°

255

Koska pohja on neliö ja sen pinta-ala on $3,0 \text{ m}^2$, niin sen sivun pituus on $\sqrt{3,0} \text{ m}$.

Janojen DK ja AK pituudet ovat samat, koska ne ovat avaruuslävistäjän puolikkaita. Täten kysytty kulma α voidaan laskea tasakylkisestä kolmiosta DAK .



Lasketaan sivujen DK ja AK pituus. Lasketaan ensin avaruuslävistäjän pituus.

$$d^2 = (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 + 3^2$$

$$d^2 = 15$$

$$d = \pm\sqrt{15} \text{ (m)}$$

Koska pituus on positiivinen, niin $d = \sqrt{15} \text{ m}$.

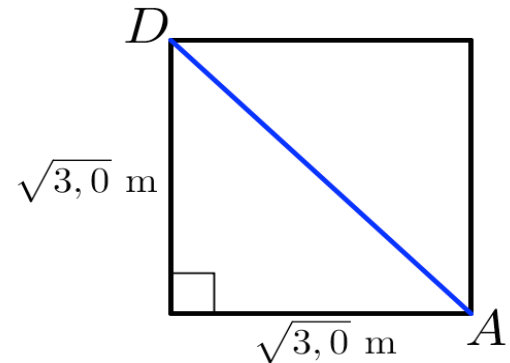
Täten $|DK| = |AK| = \frac{\sqrt{15}}{2} \text{ m}$.

Lasketaan kolmion kolmannen sivun eli sivun DA pituus. DA on pohjaneliön lävistäjä.

$$|DA|^2 = (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2$$

$$|DA|^2 = 6$$

$$|DA| = \pm\sqrt{6} \text{ (m)}$$



Koska pituus on positiivinen, niin $|DA| = \sqrt{6} \text{ m}$.

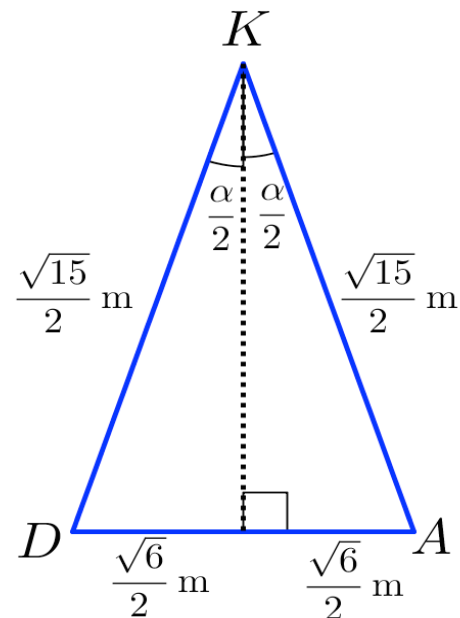
Koska kolmio DAK on tasakylkinen, niin huippukulmasta piirretty kulman puolittaja jakaa kolmion kahteen suorakulmaiseen kolmioon. Lasketaan kysytyn kulman α suuruus.

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\frac{\sqrt{15}}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{15}}$$

$$\frac{\alpha}{2} = \sin^{-1} \left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{15}} \right)$$

$$\frac{\alpha}{2} = 39,231...^\circ \quad | \cdot 2$$

$$\alpha = 78,463...^\circ \approx 78^\circ$$



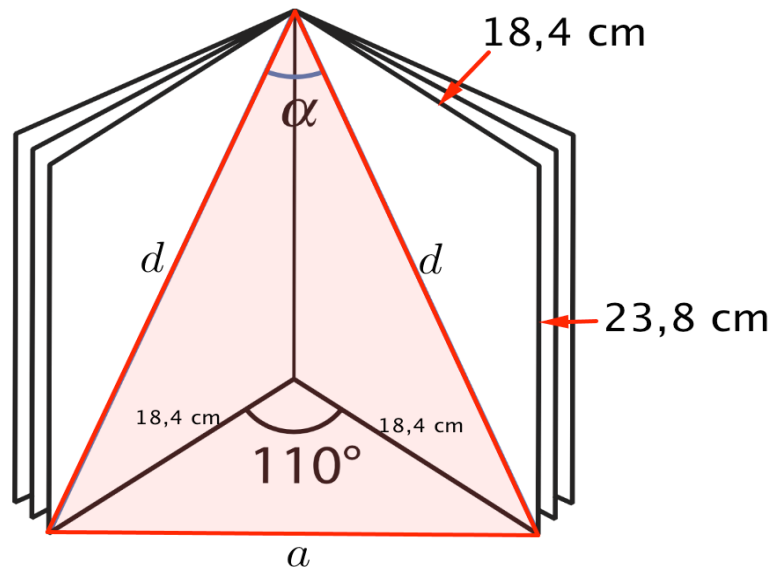
Vastaus 78°

Huomautus

Avaruuslävistäjien leikkauspisteen etäisyys pohjasta on puolet suorakulmaisen särmiön korkeudesta. Viimeisen kohdan suorakulmaisesta kolmiosta tiedetään täten myös toisen kateetin pituus, joka on 1,5 m. Kysytty kulma voitaisiin siis ratkaista myös kosinin tai tangentin avulla.

256

Kysytty kulma α voidaan laskea tasakylkisestä kolmiosta, jonka kyljet ovat kirjan sivun lävistäjiä d ja kanta a .



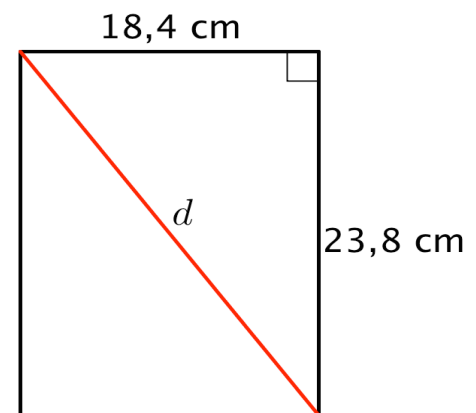
Lasketaan ensin pituus d eli kirjan sivun lävistäjän pituus.

$$d^2 = 23,8^2 + 18,4^2$$

$$d^2 = 905$$

$$d = \pm\sqrt{905} = \pm 30,083.. \text{ (m)}$$

Pituus on positiivinen, joten $d = 30,083...$



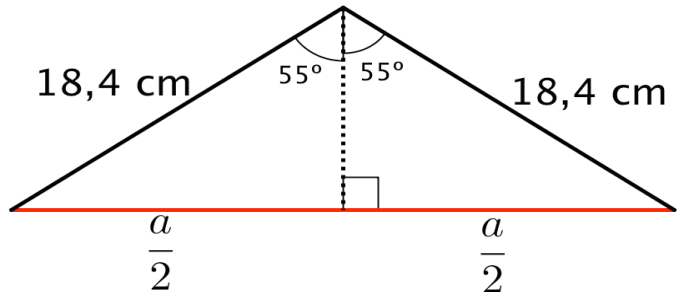
Lasketaan pituus a tasakylkisestä kolmiosta, jonka huippukulma on 110° . Tasakylkisen kolmion huippukulman puolittaja jakaa kolmion kahdeksi suorakulmaiseksi kolmioksi ja puolittaa kannan a .

$$\sin 55^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{18,4}$$

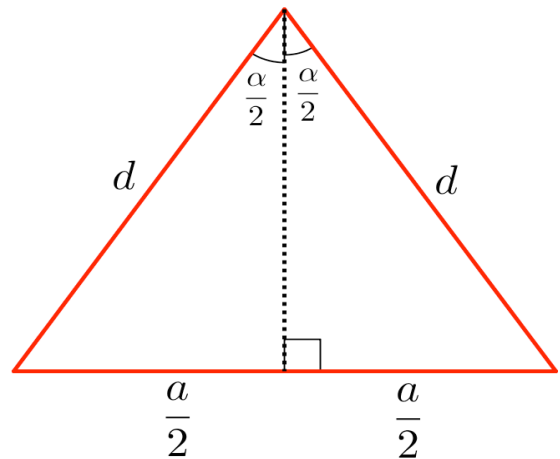
$$\sin 55^\circ = \frac{a}{36,8} \quad | \cdot 36,8$$

$$a = 36,8 \cdot \sin 55^\circ$$

$$= 30,144... \text{ (cm)}$$



Lasketaan kysytyn kulman α suuruus tasakylkisestä kolmiosta, jonka huippukulma on α . Huippukulman puolittaja jakaa kolmion kahteen suorakulmaiseen kolmioon ja puolittaa kannan pituuden.



$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{d} = \frac{a}{2d} \quad a = 30,144... \text{ ja } d = 30,083...$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{30,144...}{2 \cdot 30,083...}$$

$$\frac{\alpha}{2} = \sin^{-1} \left(\frac{30,144...}{2 \cdot 30,083...} \right) = 30,0677...^\circ \quad | \cdot 2$$

$$\alpha = 60,135...^\circ \approx 60,1^\circ$$

Vastaus $60,1^\circ$

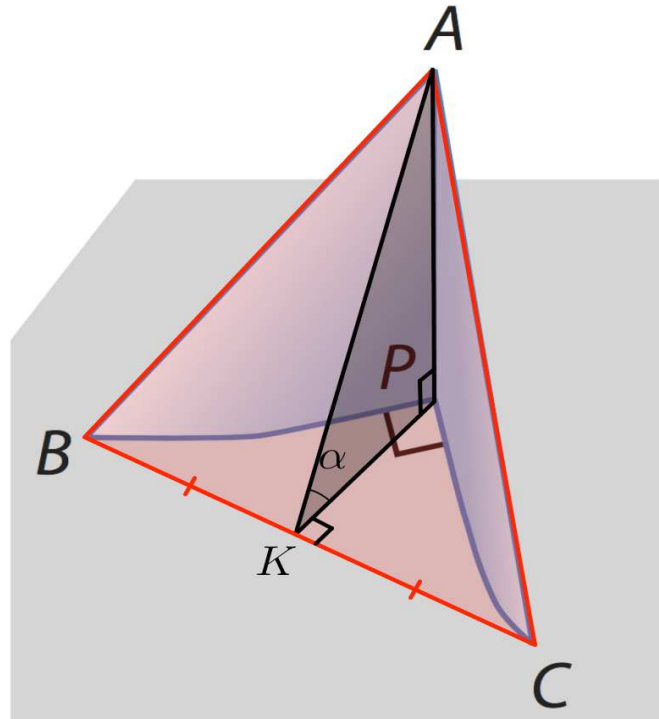
257

a)

Tason ABC ja pöydän välinen kulma α voidaan määrittää suorakulmaisesta kolmiosta KPA , jossa piste K on sivun BC keskipiste.

Sivun KA pituus on servietin korkeus eli 16 cm.

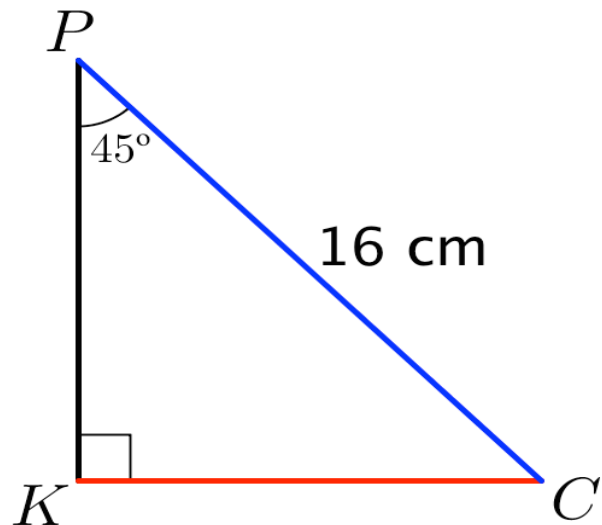
Sivun KP pituus voidaan laskea suorakulmaisesta kolmiosta KCP .



Lasketaan ensin sivun KP pituus. Sivun PC pituus on puolet servietin leveydestä eli 16 cm. Kulma CPK on puolet tasakylkisen kolmion BCP huippukulmasta 90° eli 45° .

$$\cos 45^\circ = \frac{|KP|}{16} \quad | \cdot 16$$

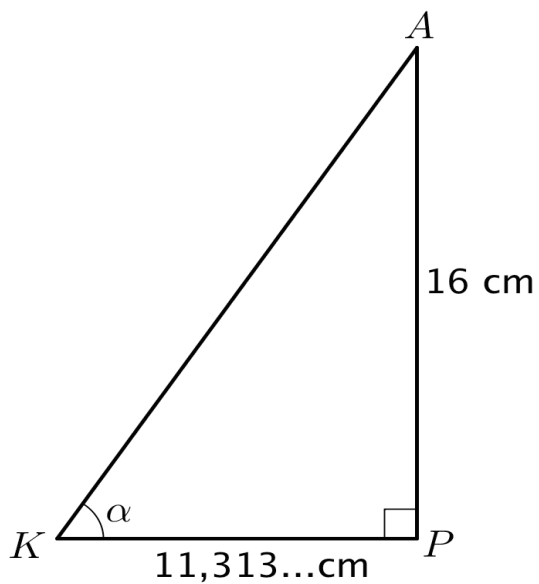
$$\begin{aligned} |KP| &= 16 \cdot \cos 45^\circ \\ &= 11,313... \text{ (cm)} \end{aligned}$$



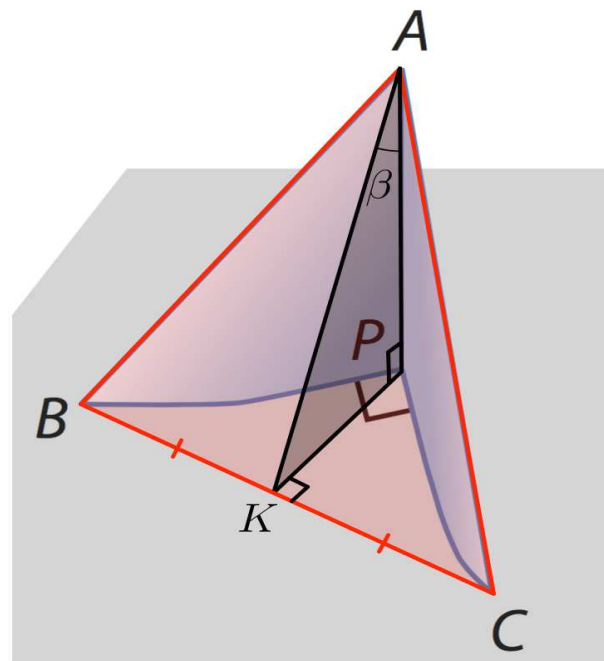
Lasketaan kulman α suuruus suorakulmaisesta kolmiosta KPA .

$$\tan \alpha = \frac{16}{11,313...}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{16}{11,313...}\right)$$
$$= 54,735...^{\circ} \approx 54,7^{\circ}$$



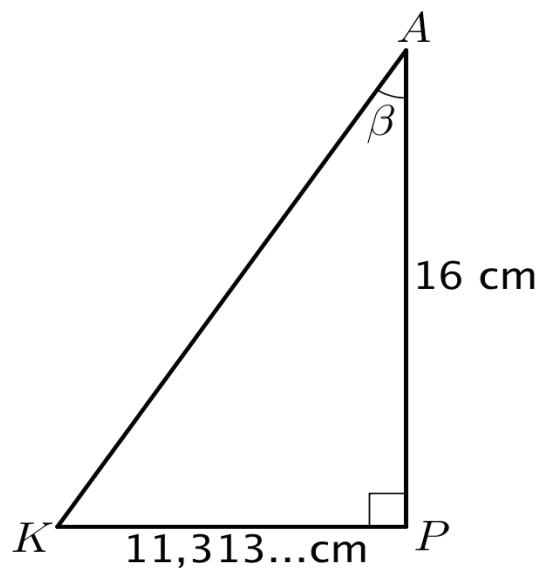
- b) Myös tason ABC ja janan AP välinen kulma voidaan ratkaista suorakulmaisesta kolmiosta KPA .



$$\tan \alpha = \frac{11,313...}{16}$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{11,313...}{16} \right)$$

$$= 35,264...^{\circ} \approx 35,2^{\circ}$$



Tapa 2

Kulman β suuruus voidaan ratkaista myös kolmion kulmien summan avulla.

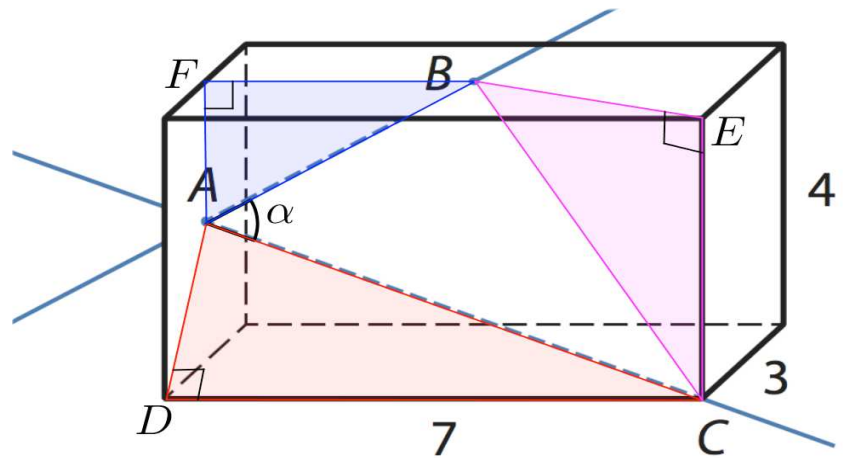
$$\beta = 180^{\circ} - 90^{\circ} - 54,7^{\circ} = 35,3^{\circ}$$

Vastaus a) $54,7^{\circ}$ b) $35,3^{\circ}$

258

Lasketaan kolmion ABC sivujen pituudet kuvaan piirrettyjen suorakulmaisten kolmioiden avulla.

Kysytty kulma α voidaan määrittää sen jälkeen kosinilauseella.

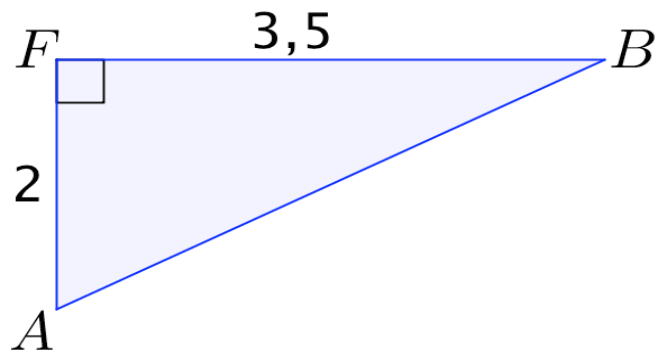


Lasketaan sivun AB pituus.

$$|AB|^2 = 2^2 + 3,5^2$$

$$|AB|^2 = 16,25$$

$$|AB| = \pm\sqrt{16,25}$$

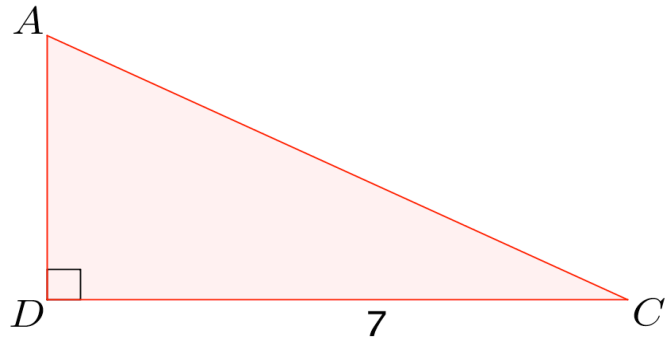


Koska pituus on positiivinen, niin $|AB| = \sqrt{16,25}$.

Lasketaan sivun AC pituus.

Sivun AD pituus on puolet päätytahkon lävistäjästä. Koska päätytahkon sivun mitat ovat 3 ja 4, on sen lävistäjän pituus

$$d_1 = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$



Siis $|AD| = \frac{5}{2} = 2,5.$

Nyt voidaan laskea sivun AC pituus.

$$|AC|^2 = |AD|^2 + |DC|^2$$

$$|AC|^2 = 2,5^2 + 7^2$$

$$|AC|^2 = 55,25$$

$$|AC| = \pm\sqrt{55,25}$$

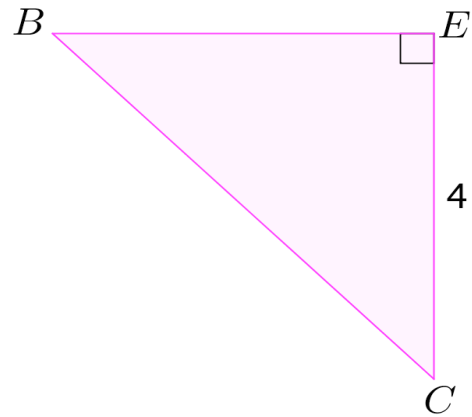
Koska pituus on positiivinen, niin $|AC| = \sqrt{55,25}.$

Lasketaan sivun BC pituus.

Sivun BE pituus on puolet ylätahkon lävistäjästä. Koska ylätahkon sivun mitat ovat 7 ja 3, on sen lävistäjän pituus

$$d_2 = \sqrt{7^2 + 3^2} = \sqrt{58}.$$

Siis $|BE| = \frac{\sqrt{58}}{2}.$



Nyt voidaan laskea sivun BC pituus.

$$|BC|^2 = |BE|^2 + |EC|^2$$

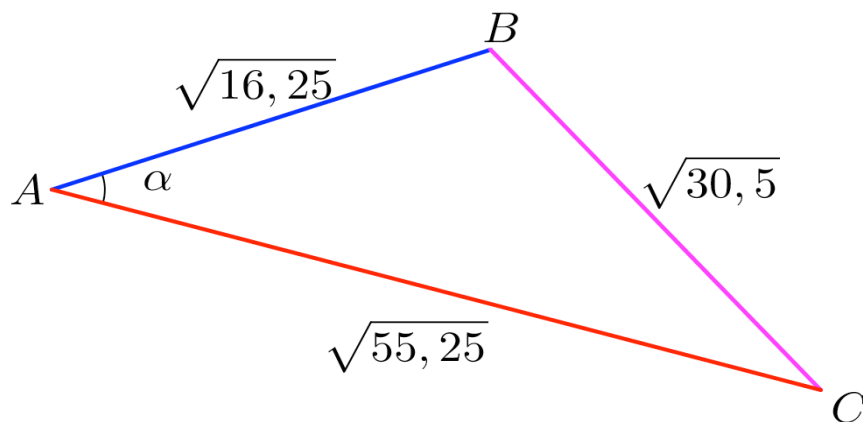
$$|BC|^2 = \left(\frac{\sqrt{58}}{2}\right)^2 + 4^2$$

$$|BC|^2 = 30,5$$

$$|BC| = \pm\sqrt{30,5}$$

Koska pituus on positiivinen, niin $|BC| = \sqrt{30,5}.$

Lasketaan kulman α suuruus kolmiosta ABC kosinilauseella.



$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2 \cdot |AB| |AC| \cos \alpha$$

$$30,5 = 16,25 + 55,25 - 2 \cdot \sqrt{16,25} \sqrt{55,25} \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{16,25 + 55,25 - 30,5}{2 \cdot \sqrt{16,25} \sqrt{55,25}}$$

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{16,25 + 55,25 - 30,5}{2 \cdot \sqrt{16,25} \sqrt{55,25}} \right) = 46,830...^\circ \approx 47^\circ$$

Vastaus 47°

Huomautus

Kosinilauseella muodostetun yhtälön voi ratkaista myös laskimella. Tällöin ratkaisu täytyy rajoittaa välille $[0^\circ, 180^\circ]$, koska kolmion kulma on aina tällä välillä. Komento saattaa näyttää esimerkiksi tältä:

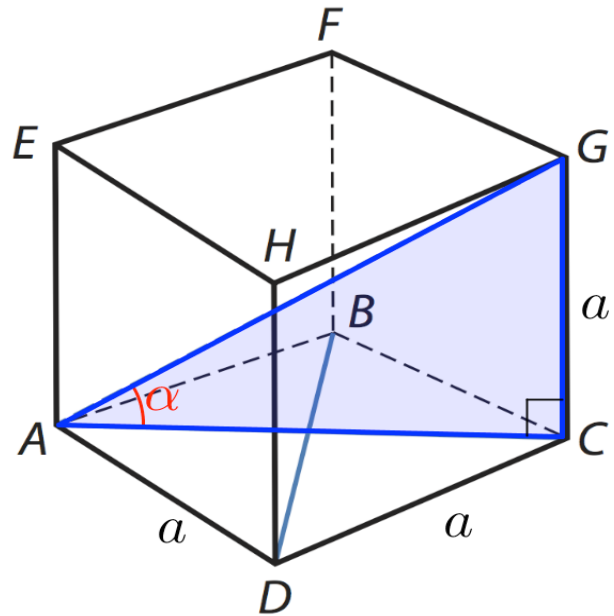
$$\text{solve}(30.5 = 16.25 + 55.25 - 2 \cdot \sqrt{16.25} \sqrt{55.25} \cos(x), x) \mid 0 < x < 180$$

259

Kysytty kulma α voidaan määrittää suorakulmaisesta kolmiosta ACG .

Merkitään kuution särmän pituutta kirjaimella a . Tällöin pohjan lävistäjän pituus on

$$\begin{aligned} |AC| &= \sqrt{a^2 + a^2} \\ &= \sqrt{2a^2} \quad |a > 0 \\ &= a\sqrt{2}. \end{aligned}$$

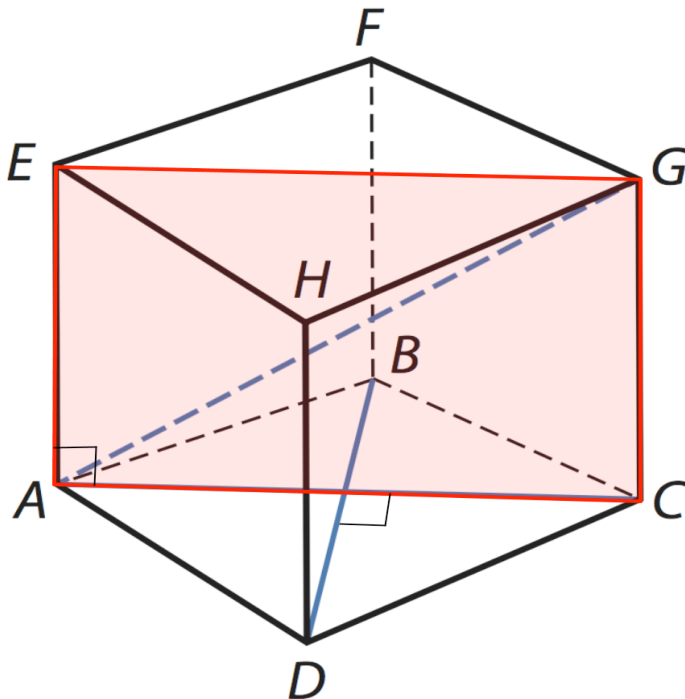


Lasketaan kulman α suuruus.

$$\tan \alpha = \frac{\overset{1}{\cancel{a}}}{\underset{1}{\cancel{a}} \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 35,264\dots^\circ \approx 35,3^\circ$$

Avaruuslävistäjä AG on suorakulmion $ACGE$ lävistäjä eli avaruuslävistäjä on kuution kärkipisteiden A , C , G ja E kautta kulkevassa tasossa. Tämä taso on kohtisuorassa pohjaa $ADCB$ vastaan ja leikkaa pohjan pitkin lävistäjää AC .



Koska pohja on neliö, sen lävistäjät AC ja BD ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Täten taso on kohtisuorassa lävistäjää BD vastaan. Siis tasossa kulkevan lävistäjän AG ja pohjan lävistäjän BD suuntien välinen kulma on 90° .

Vastaus $\sphericalangle(AG, AC) = 35,3^\circ$, $\sphericalangle(AG, BD) = 90^\circ$

260

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad A &= 4\pi r^2 & \Big| \quad r = 11 \text{ cm} \\
 &= 4 \cdot \pi \cdot 11^2 \\
 &= 4 \cdot \pi \cdot 121 \\
 &= 484\pi \\
 &= 1520,5\dots \\
 &\approx 1500 \text{ (cm}^2\text{)}
 \end{aligned}$$

Jalkapallon pinta-ala on 1500 cm^2 .

$$\begin{aligned}
 \text{b)} \quad V &= \frac{4}{3}\pi r^3 & \Big| \quad r = 11 \text{ cm} \\
 &= \frac{4}{3}\pi \cdot 11^3 \\
 &= \frac{4}{3}\pi \cdot 1331 \\
 &= 5575,2\dots \\
 &\approx 5600 \text{ (cm}^3\text{)}
 \end{aligned}$$

Jalkapallon tilavuus on 5600 cm^3 .

Vastaus a) 1500 cm^2 b) 5600 cm^3

261

$$\text{a)} \quad A = 4\pi r^2 \quad \Big| \quad A = 4070 \text{ cm}^2$$

$$4070 = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

$$r^2 = \frac{4070}{4 \cdot \pi}$$

$$r = (\pm) \sqrt{\frac{4070}{4 \cdot \pi}}$$

$$= 17,99\dots$$

$$\approx 18,0 \text{ (cm)}$$

Rantapallon säde on 18,0 cm.

$$\mathbf{b)} \quad V = \frac{4}{3} \pi r^3 \quad \left| \quad V = 74 \text{ L} = 74 \text{ dm}^3 \right.$$

$$74 = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 \quad \left| \cdot 3 \right.$$

$$3 \cdot 74 = 4\pi \cdot r^3 \quad \left| : 4\pi \right.$$

$$r^3 = \frac{3 \cdot 74}{4\pi}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 74}{4\pi}}$$

$$= 2,60\dots$$

$$\approx 2,6 \text{ (dm)}$$

Rantapallon säde on $2,6 \text{ dm} = 26 \text{ cm}$.

Vastaus a) 18,0 cm b) 26 cm

262

$$\text{a)} \quad A = 4\pi r^2 \quad \Big| \quad A = 1660 \text{ m}^2$$

$$1660 = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

$$r^2 = \frac{1660}{4 \cdot \pi}$$

$$r = (\pm) \sqrt{\frac{1660}{4 \cdot \pi}}$$

$$= 11,49... \text{ (m)}$$

Kuumailmapallon halkaisija on

$$2 \cdot r = 2 \cdot 11,49... \text{ m} = 22,9... \text{ m} \approx 23 \text{ m} .$$

$$\begin{aligned}
 \text{b)} \quad V &= \frac{4}{3} \pi r^3 && | \quad r = 11,49... \text{ m} \\
 &= \frac{4}{3} \pi \cdot (11,49...)^3 \\
 &= 6359,68... \\
 &\approx 6360 \text{ (m}^3\text{)}
 \end{aligned}$$

Kuumailmapallon tilavuus on 6360 m^3 .

Vastaus a) 23 m b) 6360 m^3

263

Lasketaan umpinaisen rautapallon massa ja verrataan sitä tutkittavan pallon massa.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \left| r = 15 \text{ cm} \right.$$

$$= \frac{4}{3}\pi \cdot 15^3 \text{ (cm}^3\text{)}$$

Tiheys on massa jaettuna tilavuudella eli $\rho = \frac{m}{V}$.

Massa saadaan siis kertomalla tiheys tilavuudella eli $m = \rho V$.

$$m = \rho V \quad \left| \begin{array}{l} \rho = 7,87 \text{ g/cm}^3 \\ V = \frac{4}{3}\pi \cdot 15^3 \text{ cm}^3 \end{array} \right.$$

$$= 7,87 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 15^3$$

$$= 111259,5... \text{ (g)}$$

Umpinaisen rautapallon massa on

$$111259,5... \text{ g} = 111,2... \text{ kg} > 93 \text{ kg}.$$

Siis tutkittavan pallon täytyy olla ontto.

Vastaus Pallo on ontto.

264

Olkoon pallon alkutilanteessa pallon säde r ja tilavuus V .

Lopuksi pallon säde on R ja tilavuus $1,15V$.

a) Muodostetaan yhtälö.

$$\begin{array}{lcl}
 1,15V = \frac{4}{3}\pi R^3 & \left| \begin{array}{l} \text{Sijoitetaan } V = \frac{4}{3}\pi r^3. \end{array} \right. & \\
 1,15 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi R^3 & \left| \begin{array}{l} \cdot \frac{3}{4\pi} \end{array} \right. & \\
 1,15 \cdot r^3 = R^3 & \left| \begin{array}{l} : r^3 \end{array} \right. &
 \end{array}$$

$$\frac{R^3}{r^3} = 1,15$$

$$\frac{R}{r} = \sqrt[3]{1,15} = 1,0476... = 104,76... \%$$

Säde kasvoi $104,76... \% - 100 \% = 4,76... \% \approx 4,8 \%$.

- b) Lasketaan lopputilanteen pinta-alan $A_2 = 4\pi R^2$ ja alkuperäisen pinta-alan $A_1 = 4\pi r^2$ suhde.

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{4\pi R^2}{4\pi r^2}$$

$$= \frac{R^2}{r^2}$$

$$= \left(\frac{R}{r} \right)^2 \quad \left| \frac{R}{r} = \sqrt[3]{1,15} \right.$$

$$= (\sqrt[3]{1,15})^2$$

$$= 1,0976...$$

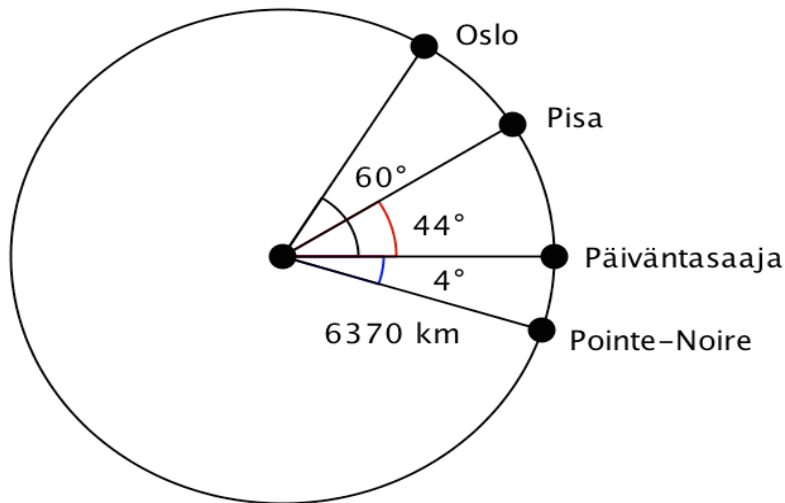
$$= 109,76... \%$$

Pallon pinta-ala kasvoi $109,76... \% - 100 \% = 9,76 \% \approx 9,8 \%$

Vastaus a) 4,8 % b) 9,8 %

265

Piirretään Maan poikkileikkauskuva 12. itäisen pituuspiirin kohdalta.



- a) Lasketaan matka Oslostä Pisaan pitkin ympyrän kaarta.
Keskuskulma on $60^\circ - 44^\circ = 16^\circ$.

Kaaren pituus on

$$b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r \quad \left| \begin{array}{l} \alpha = 16^\circ \\ r = 6370 \text{ km} \end{array} \right.$$

$$= \frac{16^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 6370$$

$$= 1778,8\dots$$

$$\approx 1800 \text{ (km)}$$

Matka Oslostä Pisaan on 1800 km.

- b) Lasketaan matka Oslost Pointe-Noireen pitkin ympyrän kaarta.
Keskuskulma on $60^\circ + 4^\circ = 64^\circ$.

Kaaren pituus on

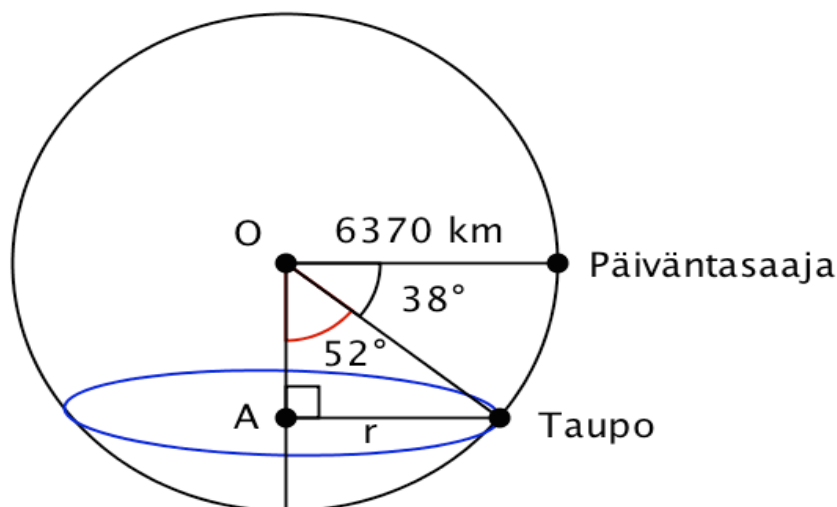
$$\begin{aligned} b &= \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r & \left| \begin{array}{l} \alpha = 64^\circ \\ r = 6370 \text{ km} \end{array} \right. \\ &= \frac{64^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 6370 \\ &= 7115,3... \\ &\approx 7100 \text{ (km)} \end{aligned}$$

Matka Oslost Pointe-Noireen on 7100 km.

Vastaus a) 1800 km b) 7100 km

266

Maailmanmatkaaja kiertää Maan pitkin 38. eteläistä leveyspiiriä.



Lasketaan 38. eteläisen leveyspiirin säde suorakulmaisesta kolmiosta OAT . Terävä kulma on $90^\circ - 38^\circ = 52^\circ$.

$$\sin 52^\circ = \frac{r}{6370}$$

$$r = 6370 \cdot \sin 52^\circ = 5019,6... \text{ (km)}$$

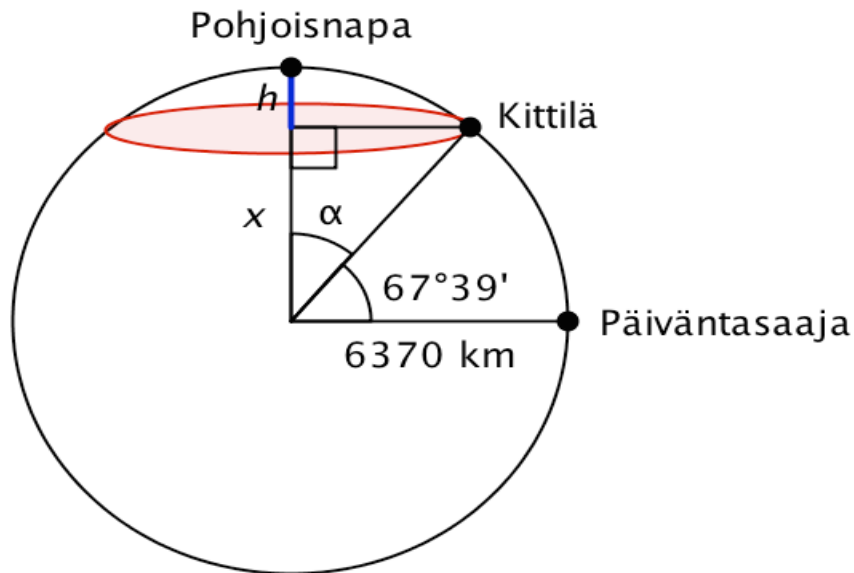
38. Leveyspiirin pituus on

$$p = 2\pi r = 2\pi \cdot 6370 \cdot \sin 52^\circ = 31539,2... \approx 31500 \text{ (km)}.$$

Matkaaja on kulkenut 31500 km matkan.

Vastaus 31500 km

267



Lasketaan Kittilän leveyspiirin kautta kulkevan pikkuympyrän keskipisteen etäisyys pohjoisnavasta. Tämän avulla saadaan laskettua Kittilän pohjoispuolisen pallokalotin pinta-ala.

$$67^{\circ} 39' = 67^{\circ} + \frac{39^{\circ}}{60} = 67,65^{\circ}$$

$$\alpha = 90^{\circ} - 67,65^{\circ} = 22,35^{\circ}$$

$$\cos 22,35^{\circ} = \frac{x}{6370}$$

$$x = 6370 \cdot \cos 22,35^{\circ} \text{ (km)}$$

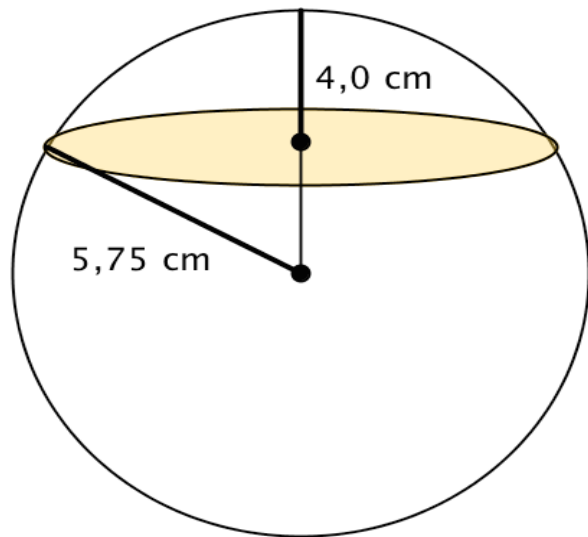
Pallokalotin pinta-alan osuus koko Maan pinta-alasta on

$$\begin{aligned}
\frac{A_{kalotti}}{A_{Maapallo}} &= \frac{\cancel{2} \cancel{\pi} \cancel{r} h}{\cancel{4} \cancel{\pi} \cancel{r}^2} & \left| \begin{aligned} A_{kalotti} &= 2\pi r h \\ A_{Maapallo} &= 4\pi r^2 \end{aligned} \right. \\
&= \frac{h}{2r} & \left| \begin{aligned} r &= 6370 \text{ km} \\ h &= r - x \\ &= 6370 - 6370 \cdot \cos 22,35^\circ \\ &= 6370 \cdot (1 - \cos 22,35^\circ) \text{ (km)} \end{aligned} \right. \\
&= \frac{\cancel{6370} \cdot (1 - \cos 22,35^\circ)}{2 \cdot \cancel{6370}} \\
&= \frac{1 - \cos 22,35^\circ}{2} \\
&= 0,0375... = 3,75... \% \approx 3,8 \%
\end{aligned}$$

Kittilän leveyspiirin pohjoispuolella on 3,8 % Maan pinta-alasta.

Vastaus 3,8 %

268



Greippipallon säde on $\frac{11,5 \text{ cm}}{2} = 5,75 \text{ cm}$.

Segmentin tilavuus on

$$V_s = \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3} \right) \quad \left| \begin{array}{l} h = 4,0 \text{ cm} \\ r = 5,75 \text{ cm} \end{array} \right.$$

$$= \pi \cdot 4,0^2 \left(5,75 - \frac{4,0}{3} \right)$$

$$= 222,005... \approx 220 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Koko greipin tilavuus:

$$\begin{aligned} V_p &= \frac{4}{3} \pi r^3 & | \quad r = 5,75 \text{ cm} \\ &= \frac{4}{3} \pi \cdot 5,75^3 \\ &= 796,328... \text{ (cm}^3\text{)} \end{aligned}$$

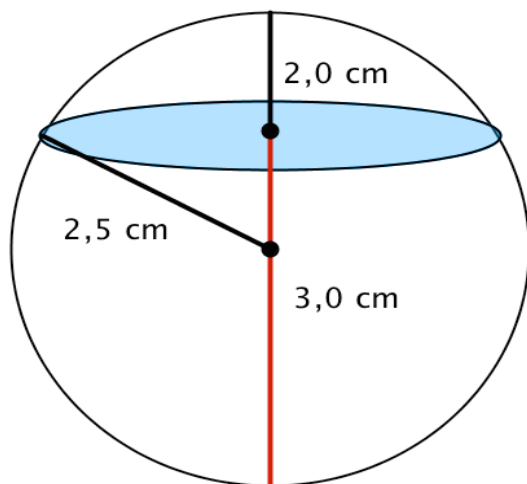
Arvio greippisegmentin massalle saadaan tilavuuksien suhteen avulla:

$$\begin{aligned} m_s &= \frac{V_s}{V_p} \cdot 165 \text{ g} \\ &= \frac{222,005...}{796,328...} \cdot 165 \text{ g} \\ &= 0,2787... \cdot 165 \text{ g} \\ &= 45,99... \text{ g} \approx 46 \text{ g} \end{aligned}$$

Greippisegmentin tilavuus on 220 cm^3 ja massa 46 g.

Vastaus 220 cm^3 ja 46 g

269



Styroxpallosta on veden alla $5,0 \text{ cm} - 2,0 \text{ cm} = 3,0 \text{ cm}$.

- a) Lasketaan veden alla olevan segmentin pinta-alan suhde koko pallon pinta-alaan.

$$\frac{A_s}{A_p} = \frac{2\pi r h}{4\pi r^2}$$

$$= \frac{h}{2r}$$

$$\left| \begin{array}{l} h = 3,0 \text{ cm} \\ r = 2,5 \text{ cm} \end{array} \right.$$

$$= \frac{3,0}{2 \cdot 2,5}$$

$$= \frac{3,0}{5,0}$$

$$= 0,6 = 60 \%$$

Veden alla on 60 % styroxpallon pinta-alasta.

- b) Lasketaan veden alla olevan segmentin tilavuuden suhde koko pallon tilavuuteen.

$$\begin{aligned}\frac{V_s}{V_p} &= \frac{\pi h^2 \left(r - \frac{h}{3} \right)}{\frac{4}{3} \pi r^3} \\ &= \frac{h^2 \left(r - \frac{h}{3} \right)}{\frac{4}{3} r^3} \quad \left| \begin{array}{l} h = 3,0 \text{ cm} \\ r = 2,5 \text{ cm} \end{array} \right. \\ &= \frac{3,0^2 \cdot \left(2,5 - \frac{3,0}{3} \right)}{\frac{4}{3} \cdot 2,5^3} \\ &= 0,648 \\ &= 64,8 \% \approx 65 \%\end{aligned}$$

Veden alla on 65 % styroxpallon tilavuudesta.

Vastaus a) 60 % b) 65 %

270

Lasketaan pallon säde pinta-alan avulla.

$$A = 4\pi r^2$$

$$r^2 = \frac{A}{4\pi}$$

$$r = (\pm)\sqrt{\frac{A}{4\pi}} \quad \left| \begin{array}{l} A = 3,65 \text{ m}^2 = 3,65 \cdot (10 \text{ dm})^2 \\ = 365 \text{ dm}^2 \end{array} \right.$$

$$= \sqrt{\frac{365}{4\pi}}$$

$$= 5,389... \text{ (dm)}$$

Pallon tilavuus saadaan laskettua säteen avulla.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \left| \begin{array}{l} r = \sqrt{\frac{365}{4\pi}} \end{array} \right.$$

$$= \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\sqrt{\frac{365}{4\pi}} \right)^3$$

$$= 655,71... \approx 656 \text{ (dm}^3\text{)}$$

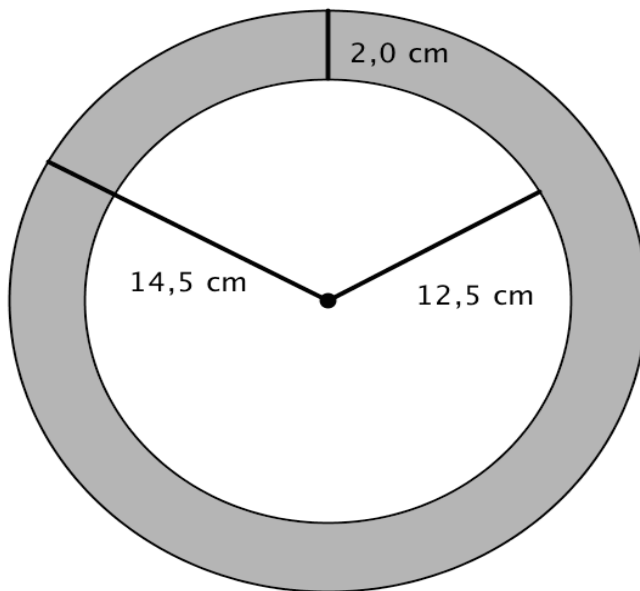
Tilavuus on $656 \text{ dm}^3 = 656 \text{ L}$.

Vastaus 656 L

271

Betonipallon ulkosäde on $r_u = \frac{29 \text{ cm}}{2} = 14,5 \text{ cm}$.

Onton sisäosan säde on $r_s = 14,5 \text{ cm} - 2,0 \text{ cm} = 12,5 \text{ cm}$.



Betoniosan tilavuus V_b saadaan vähentämällä koko pallon tilavuudesta V_u onton sisäosan tilavuus V_s .

$$V_b = V_u - V_s$$

$$= \frac{4}{3}\pi r_u^3 - \frac{4}{3}\pi r_s^3 \quad \left| \begin{array}{l} r_u = 14,5 \text{ cm} \\ r_s = 12,5 \text{ cm} \end{array} \right.$$

$$= \frac{4}{3}\pi \cdot 14,5^3 - \frac{4}{3}\pi \cdot 12,5^3$$

$$= \frac{4}{3}\pi \cdot (14,5^3 - 12,5^3)$$

$$= 4588,81... (\text{cm}^3)$$

Tiheys on massa jaettuna tilavuudella eli $\rho = \frac{m}{V}$.

Ratkaisemalla tästä massa saadaan $m = \rho V$.

Betonin massa on

$$m = \rho V$$

$$\rho = 2100 \text{ kg/m}^3$$

$$V = 4588,81 \dots \text{cm}^3$$

$$= 4588,81 \dots \cdot \left(\frac{\text{m}}{100} \right)^3$$

$$= \frac{4588,81 \dots \text{m}^3}{1000000}$$

$$= 0,00458881 \dots \text{m}^3$$

$$= 2100 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 0,00458881 \dots \text{m}^3$$

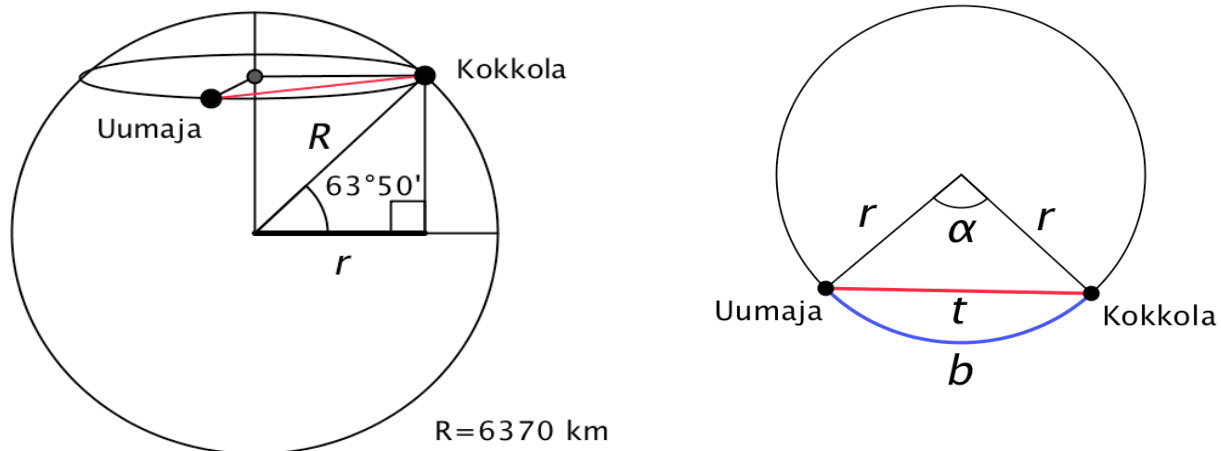
$$= 9,63 \dots \text{kg} \approx 9,6 \text{ kg}.$$

Betonipallon massa on 9,6 kg.

Vastaus 9,6 kg

272

Piirretään Maan poikkileikkauskuva pitkin Kokkolan pituuspiiriä. Piirretään myös poikkileikkauskuva pitkin Kokkolan ja Uumajan yhteistä leveyspiiriä.



a-kohdassa kysytään pikkuympyrän kaaren pituutta b , jonka laskemiseksi on ensin selvitettävä pikkuympyrän eli $63^\circ 50'$ leveyspiirin säde r .

b-kohdassa tarvitaan kaaren b lisäksi tunnelin pituus t , eli Kokkolan ja Uumajan välistä kaarta vastaavan pikkuympyrän jängteen pituus.

- a) Leveyspiirin $63^\circ 50'$ säde saadaan suorakulmaisesta kolmiosta kosinin avulla.

$$\cos 63^\circ 50' = \frac{r}{R} \quad \left| \begin{array}{l} 63^\circ 50' = 63,8333...^\circ \\ R = 6370 \text{ km} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} r &= 6370 \cdot \cos 63,8333...^\circ \\ &= 2809,06... \text{ (km)} \end{aligned}$$

Lasketaan kaaren pituus b .

$$b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$$

$$r = 2809,06... \text{ km}$$

$$\alpha = 23^\circ 8' - 20^\circ 16'$$

$$= 23,133...^\circ - 20,266...^\circ$$

$$= 2,866...^\circ$$

$$= \frac{2,866...^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 2809,06...$$

$$= 140,5453...$$

$$\approx 141 \text{ (km)}$$

Matka on 141 km.

b) Lasketaan kosinilauseella tunnelin pituus t .

$$t^2 = r^2 + r^2 - 2r \cdot r \cdot \cos \alpha$$

$$= 2r^2 - 2r^2 \cos \alpha$$

$$r = 2809,06... \text{ km}$$

$$\alpha = 2,866...^\circ$$

$$= 2 \cdot 2809,06...^2 - 2 \cdot 2809,06...^2 \cdot \cos 2,866...^\circ$$

$$= 140,5307... \text{ (km)}$$

Lasketaan kaaren pituuden b ja tunnelin pituuden t erotus.

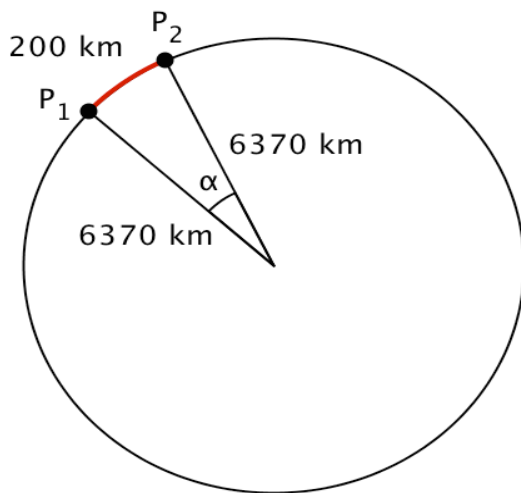
$$b - t = 140,5453... - 140,5307... = 0,0146... \approx 0,015 \text{ (km)}.$$

Matka lyhenee $0,015 \text{ km} = 15 \text{ m}$.

Vastaus a) 141 km b) 15 m

273

- 1) Olkoon lähtöpiste P_1 . Ensin lennetään pohjoiseen pitkin isoympyrää, joka on pituuspiiri $23^\circ 45'$. Lasketaan leveyspiiri, johon päädytään, kun lähtöpiste P_1 on leveyspiirillä $61^\circ 30'$ ($= 61,5^\circ$).



$$b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$$

$$\alpha = \frac{360^\circ \cdot b}{2\pi r}$$

$$= \frac{360^\circ \cdot 200}{2\pi \cdot 6370}$$

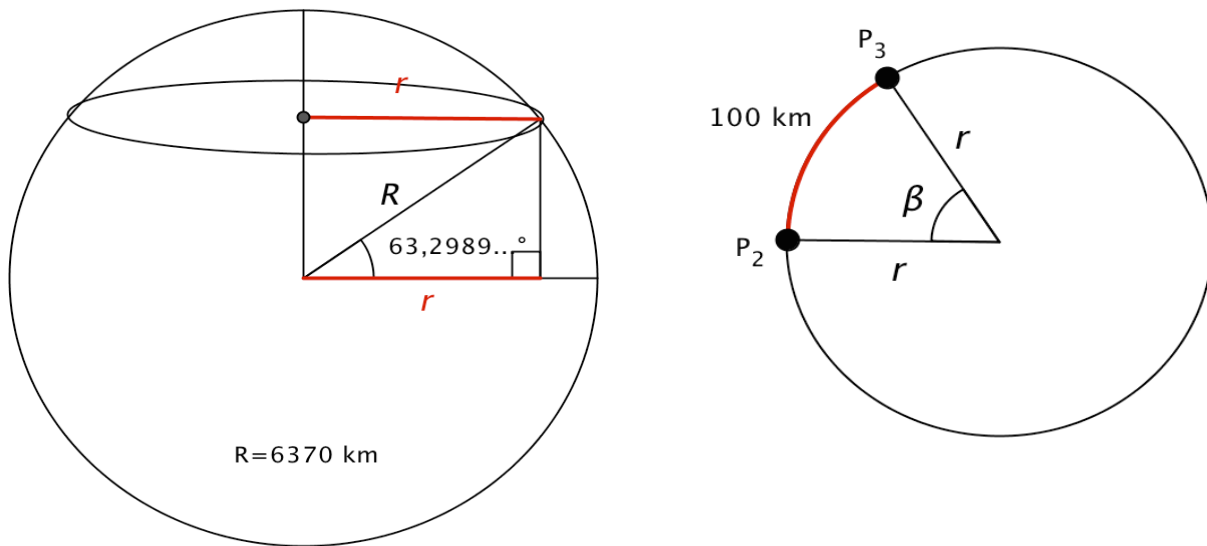
$$= 1,7989...^\circ$$

$$\left| \begin{array}{l} b = 200 \text{ km} \\ r = 6370 \text{ km} \end{array} \right.$$

Päädytään leveyspiirille $61,5^\circ + 1,7989...^\circ = 63,2989...^\circ$ pisteeseen P_2 .

- 2) Seuraavaksi edetään 100 km itään pitkin pikkuympyrää eli leveyspiiriä $63,2989\dots^\circ$. Lasketaan pituuspiiri, johon päädytään, kun lähdetään alkuperäisellä pituuspiirillä $23^\circ 45'$ ($= 23,75^\circ$) olevasta pisteestä P_2 .

Lasketaan leveyspiirin $63,2989\dots^\circ$ säde.



$$\cos 63,2989\dots^\circ = \frac{r}{R}$$

$$r = R \cos 63,2989\dots^\circ \quad \bigg| \quad R = 6370 \text{ km}$$

$$= 6370 \cdot \cos 63,2989\dots^\circ$$

$$= 2862,2687\dots \text{ (km)}$$

Lasketaan pituuspiiri, johon päädytään, kun edetään 100 km itään.

$$b = \frac{\beta}{360^\circ} \cdot 2\pi r$$

$$\beta = \frac{360^\circ \cdot b}{2\pi r} \quad \left| \begin{array}{l} r = 2862,2687... \text{ km} \\ b = 100 \text{ km} \end{array} \right.$$

$$= \frac{360^\circ \cdot 100}{2\pi \cdot 2862,2687...}$$

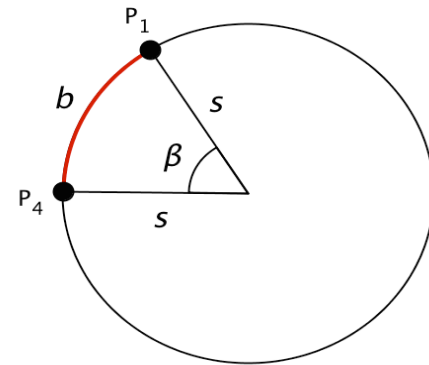
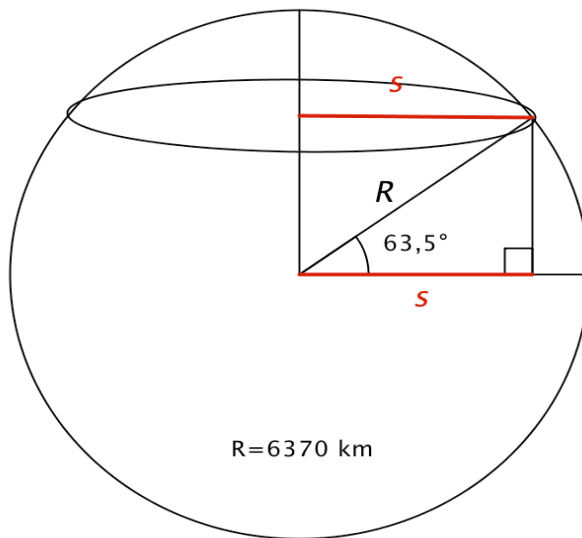
$$= 2,0017...^\circ$$

Päädytään pisteeseen P_3 pituuspiirillä

$$23,57^\circ + 2,0017...^\circ = 25,5717...^\circ .$$

- 3) Edetään pisteestä P_3 lähtien 200 km etelään pitkin pituuspiiriä $25,5717...^\circ$ pisteeseen P_4 , jolloin päädytään alkuperäisen lähtöpisteen P_1 kanssa samalle leveyspiirille $61,5^\circ$.
- 4) Jotta päästäisiin takaisin lähtöpisteeseen P_1 , on päästävä alkuperäiselle pituuspiirille $23,75^\circ$, jolloin siirrytään leveyspiirillä $61,5^\circ$ keskuskulmaa $\beta = 2,0017...^\circ$ vastaavan kaaren verran länteen.

Lasketaan leveyspiirin $61,5^\circ$ säde s . Selvitetään sen jälkeen tämän leveyspiiriympyrän kaaren pituus b , jotta päästään takaisin lähtöpisteeseen P_1 pituuspiirillä $23,75^\circ$.



$$\cos 63,5^\circ = \frac{s}{6370}$$

$$s = 6370 \cdot \cos 61,5^\circ = 3039,5013... \text{ km}$$

Lasketaan kaaren pituus b .

$$b = \frac{\beta}{360^\circ} \cdot 2\pi s \quad \left| \begin{array}{l} \beta = 2,0017...^\circ \\ s = 3039,5013... \text{ km} \end{array} \right.$$

$$= \frac{2,0017...^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 3039,5013...$$

$$= 106,19...$$

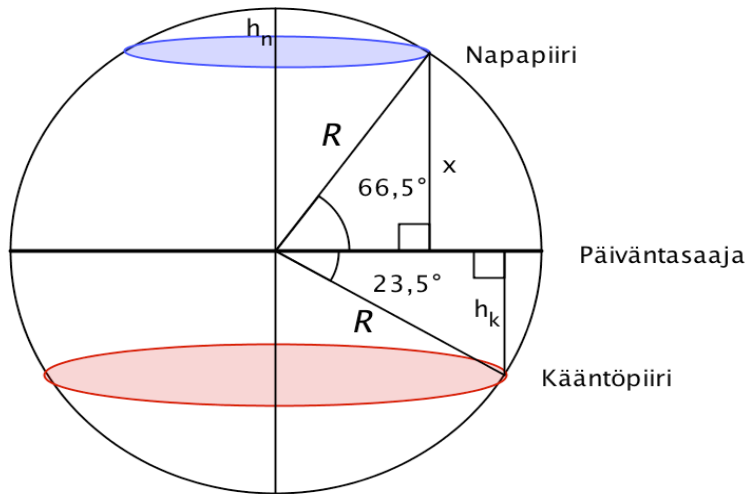
$$\approx 106 \text{ (km)}$$

Viimeisellä etapilla on lennettävä 106 km länteen.

Vastaus 106 km

274

Piirretään Maan poikkileikkaus ja tarkastellaan isoympyrää, jonka säde on R (Maan säde).



- 1) Kääntöpiirien väliin jää troopinen alue. Tämä on pallovyöhyke, jonka korkeus on $2h_k$.

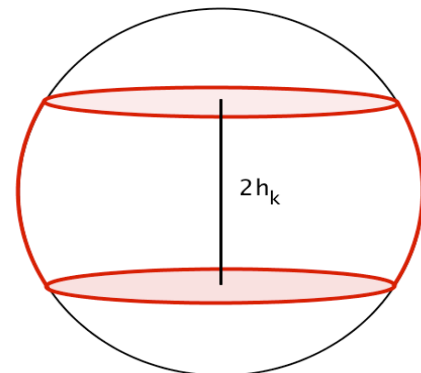
$$\sin 23,5^\circ = \frac{h_k}{R}$$

$$h_k = R \sin 23,5^\circ$$

$$A_T = 2\pi rh \quad \left| \begin{array}{l} r = R \\ h = 2h_k = 2R \sin 23,5^\circ \end{array} \right.$$

$$= 2\pi \cdot R \cdot 2R \sin 23,5^\circ$$

$$= 4\pi R^2 \sin 23,5^\circ$$



Trooppisen alueen osuus Maan pinta-alasta:

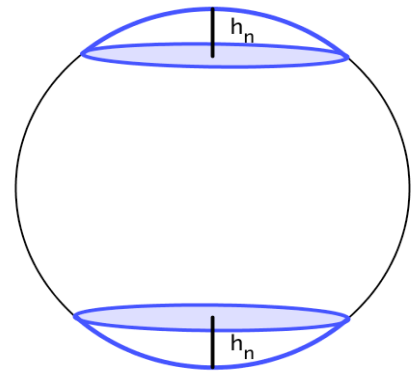
$$\frac{A_T}{A_M} = \frac{\cancel{4\pi R^2} \sin 23,5^\circ}{\cancel{4\pi R^2}} = \sin 23,5^\circ = 0,3987... \approx 39,9 \%$$

2) Napapiirien pohjois- ja eteläpuolille jää napa-alueet.
Nämä ovat pallosegmenttejä, joiden korkeus on h_n .

$$\begin{aligned} h_n = R - x & \quad \left| \begin{array}{l} \sin 66,5^\circ = \frac{x}{R} \\ x = R \sin 66,5^\circ \end{array} \right. \\ & = R - R \sin 66,5^\circ = R \cdot (1 - \sin 66,5^\circ) \end{aligned}$$

$$A_N = 2 \cdot A_{\text{kalotti}}$$

$$\begin{aligned} & = 2 \cdot 2\pi r h \quad \left| \begin{array}{l} r = R \\ h = h_n = R \cdot (1 - \sin 66,5^\circ) \end{array} \right. \\ & = 4\pi R \cdot R \cdot (1 - \sin 66,5^\circ) \\ & = 4\pi R^2 \cdot (1 - \sin 66,5^\circ) \end{aligned}$$

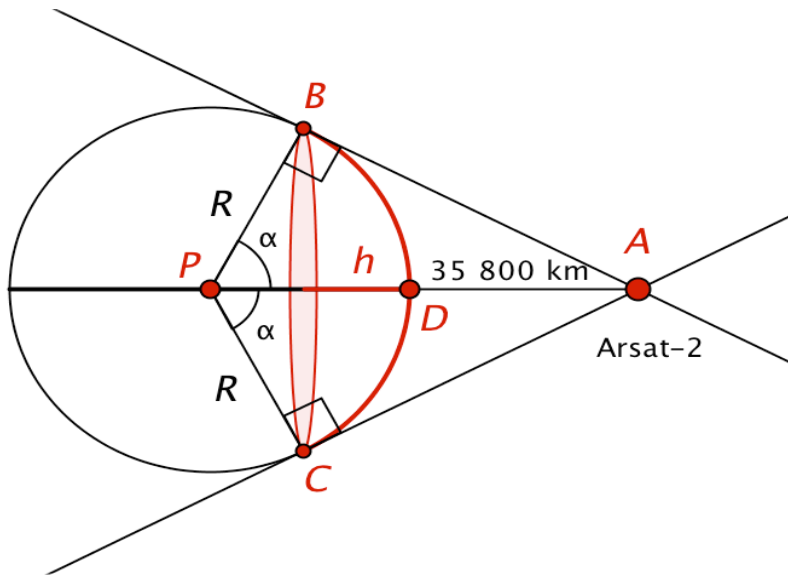


Napa-alueiden osuus Maan pinta-alasta:

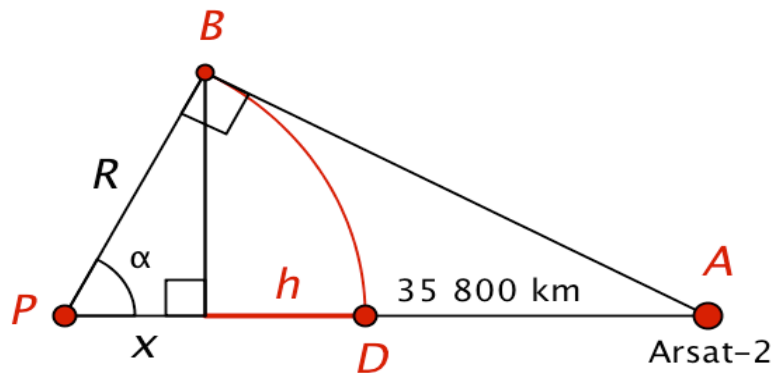
$$\frac{A_N}{A_M} = \frac{4\pi R^2 (1 - \sin 66,5^\circ)}{4\pi R^2} = 1 - \sin 66,5^\circ = 0,0829... \approx 8,3 \%$$

Vastaus napa-alueet 8,3 %, trooppinen alue 39,9 %

275



Maa jää kahden satelliitin kautta piirretyn tangenttisuoran väliin. Lasketaan tangenttien leikkauspisteiden välistä kaarta CDB vastaavan keskuskulman puolikas α , jonka avulla voidaan laskea vastaavan pallokalotin korkeus h .



$$\cos \alpha = \frac{R}{R + 35\,800} \quad \left| \begin{array}{l} R = 6370 \text{ km} \end{array} \right.$$

$$= \frac{6370}{6370 + 35\,800}$$

$$= 0,151\dots$$

$$\alpha = \cos^{-1} 0,151\dots = 81,311\dots^\circ$$

$$\begin{aligned}
 h &= R - x & \left| \begin{array}{l} \cos \alpha = \frac{x}{R} \\ x = R \cos \alpha \end{array} \right. \\
 &= R - R \cos \alpha \\
 &= R(1 - \cos \alpha) & \left| \begin{array}{l} R = 6370 \text{ km} \\ \alpha = 81,311...^\circ \end{array} \right. \\
 &= 6370 \cdot (1 - \cos 81,311...^\circ) \\
 &= 5407,77... \text{ (km)}
 \end{aligned}$$

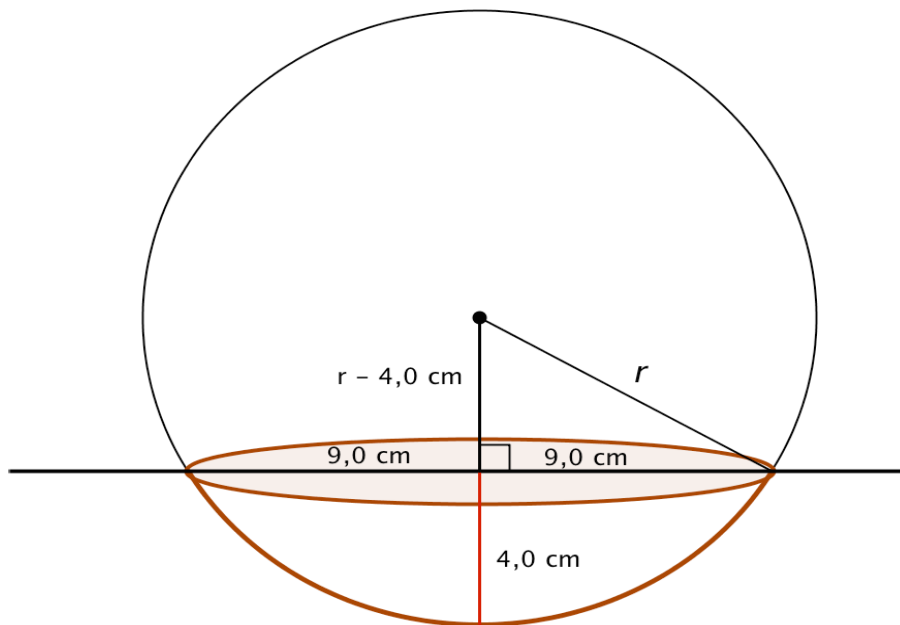
Satelliitista nähtävän pallokalotin pinta-alan suhde koko Maan pinta-alaan:

$$\begin{aligned}
 \frac{A_K}{A_M} &= \frac{2\pi r h}{4\pi r^2} \\
 &= \frac{h}{2r} & \left| \begin{array}{l} r = R = 6370 \text{ km} \\ h = 5407,77... \text{ km} \end{array} \right. \\
 &= \frac{5407,77...}{2 \cdot 6370} \\
 &= 0,4244... \\
 &\approx 42,4 \%
 \end{aligned}$$

Satelliitista voidaan nähdä 42,4 % Maan pinta-alasta.

Vastaus 42,4 %

276



Syntynyt kuoppa on pallosegmentti, jonka korkeus on 4,0 cm. Kuopan tilavuuden selvittämiseksi on ensin laskettava pallon säde r .

Muodostetaan Pythagoraan lauseen avulla yhtälö.

$$r^2 = (r - 4,0)^2 + 9,0^2$$

$$r^2 = r^2 + 2 \cdot r \cdot (-4,0) + (-4,0)^2 + 81$$

$$r^2 = r^2 - 8r + 16 + 81$$

$$8r = 97$$

$$r = \frac{97}{8} = 12,125 \text{ (cm)}$$

Pallosegmentin tilavuus on

$$V = \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3} \right) \quad \left| \begin{array}{l} r = 12,125 \text{ cm} \\ h = 4,0 \text{ cm} \end{array} \right.$$

$$= \pi \cdot 4,0^2 \cdot \left(12,125 - \frac{4,0}{3} \right)$$

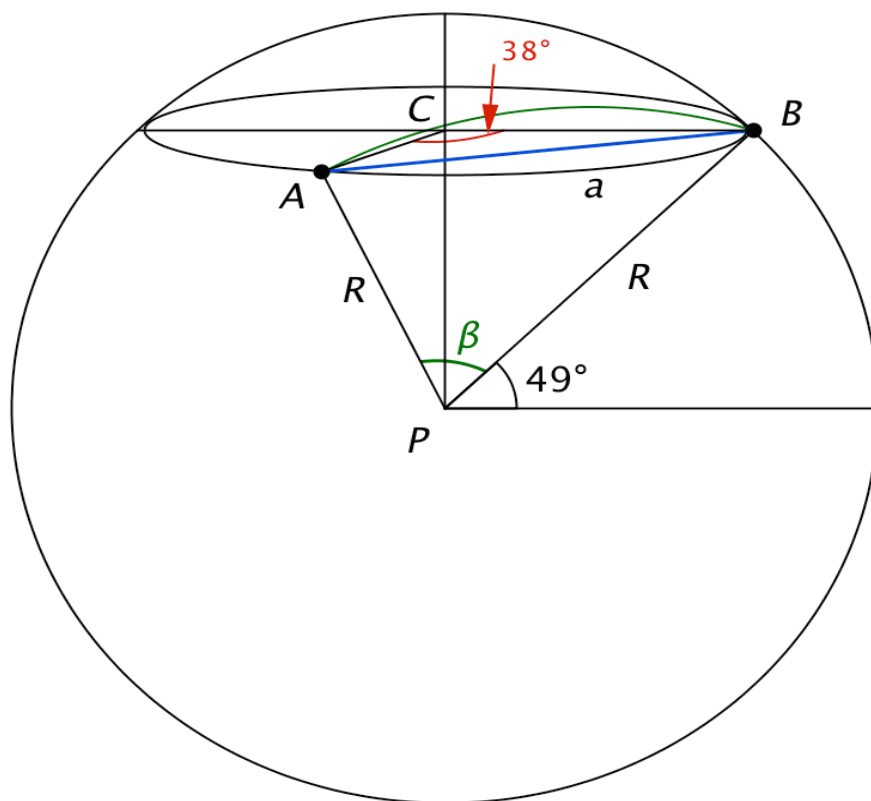
$$= 542,44 \dots$$

$$\approx 540 \text{ (cm}^3\text{)}$$

Kuopan tilavuus on 540 cm^3 .

Vastaus 540 cm^3

277



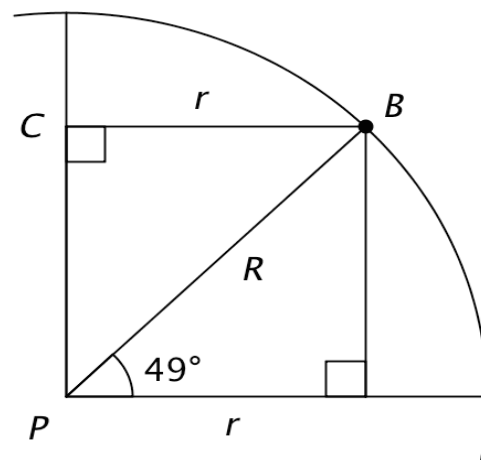
- a) Paikkakuntien A ja B välimatka a mitattuna pitkin 49. leveyspiiriä on pikkuympyrän 38° keskuskulmaa vastaavan kaaren pituus. Lasketaan ensin 49. leveyspiirin säde suorakulmaisen kolmion PBC avulla.

$$\cos 49^\circ = \frac{r}{R}$$

$$r = R \cos 49^\circ \quad | \quad R = 6370 \text{ km}$$

$$= 6370 \cdot \cos 49^\circ$$

$$= 4179,09... \text{ km}$$

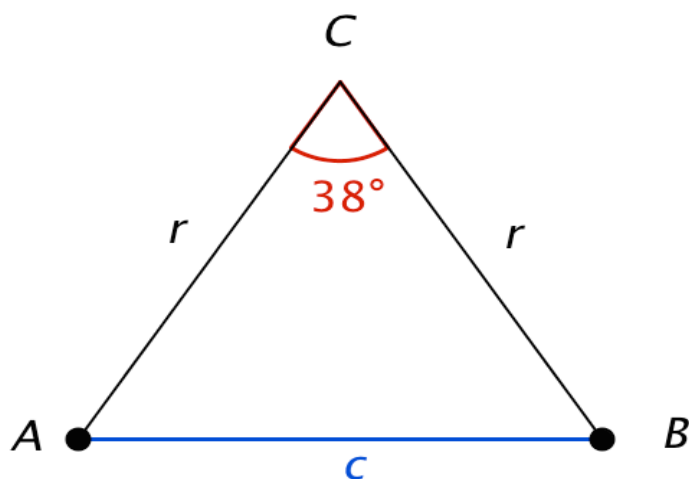


Lasketaan kaaren pituus a .

$$\begin{aligned} a &= \frac{38^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi r & | \quad r = 4179,09... \text{ km} \\ &= \frac{38^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 4179,09... \\ &= 2771,681... \approx 2770 \text{ (km)} \end{aligned}$$

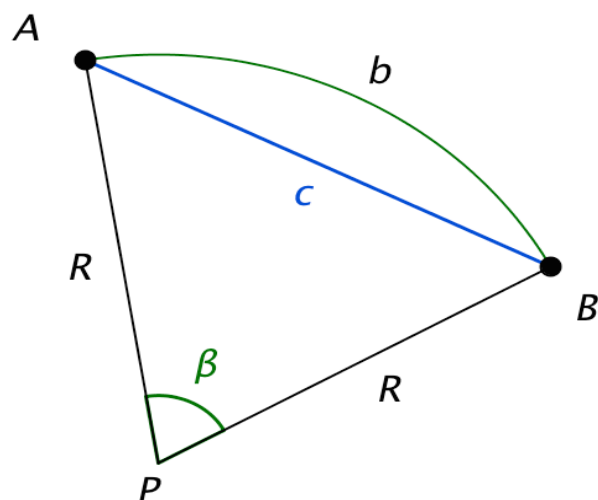
Paikkakuntien A ja B välimatka pitkin 49. leveyspiiriä on 2770 km.

- b) Paikkakuntien A ja B lyhin välimatka Maan pintaa pitkin mitattuna on R-säteisen isoympyrän keskuskulmaa β vastaavan kaaren pituus. Lasketaan ensin janan AB pituus tasakylkisestä kolmiosta ABC .



$$\begin{aligned} c^2 &= r^2 + r^2 - 2 \cdot r \cdot r \cdot \cos 38^\circ \\ &= 2r^2 - 2r^2 \cdot \cos 38^\circ & | \quad r = 4179,09... \text{ km} \\ &= 2 \cdot 4179,09...^2 - 2 \cdot 4179,09...^2 \cdot \cos 38^\circ \\ &= 7\,404\,718,02... \\ c &= (\pm)\sqrt{7404718,02...} = 2721,16... \text{ (km)} \end{aligned}$$

Lasketaan kulma β tasakylkisestä kolmiosta APB kosinilauseen avulla.



$$c^2 = R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cdot \cos \beta$$

$$\cos \beta = \frac{c^2 - R^2 - R^2}{-2 \cdot R \cdot R}$$

$$= \frac{c^2 - 2R^2}{-2 \cdot R^2} \quad \left| \begin{array}{l} c = 2721,16... \text{ km} \\ R = 6370 \text{ km} \end{array} \right.$$

$$= \frac{2721,16...^2 - 2 \cdot 6370^2}{-2 \cdot 6370^2}$$

$$= 0,9087...^\circ$$

$$\beta = \cos^{-1} 0,9087...^\circ = 24,665...^\circ$$

Isoympyrän keskuskulmaa β vastaavan kaaren pituus on

$$b = \frac{\beta}{360^\circ} \cdot 2\pi r \quad \left| \begin{array}{l} \beta = 24,665\dots^\circ \\ r = R = 6370 \text{ km} \end{array} \right.$$

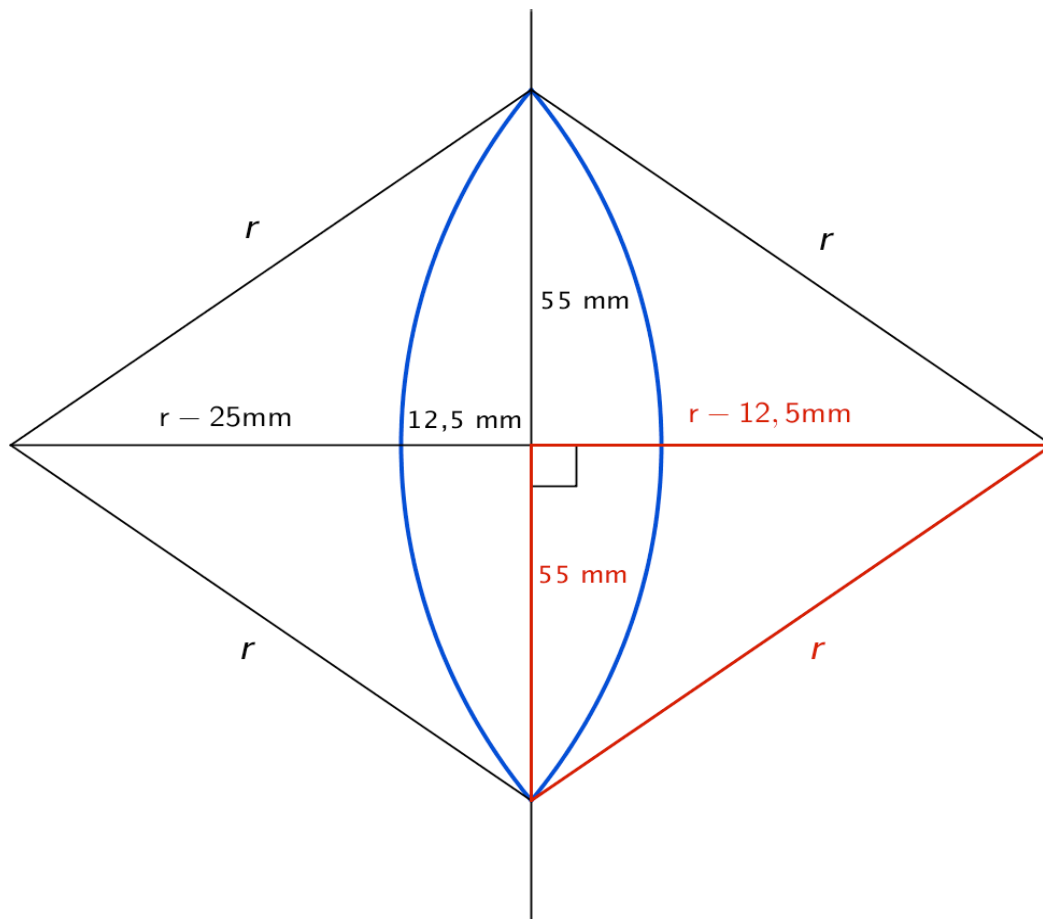
$$= \frac{24,665\dots^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 6370$$

$$= 2742,28\dots \approx 2740 \text{ (km)}$$

Paikkakuntien A ja B välinen lyhin etäisyys Maan pintaa pitkin mitattuna on 2740 km.

Vastaus a) 2770 km b) 2740 km

278



Määritetään linssin kaarevuussäde suorakulmaisen kolmion avulla (piirretty punaisella).

$$r^2 = (r - 12,5)^2 + 55^2$$

$$r^2 = r^2 + 2 \cdot r \cdot (-12,5) + (-12,5)^2 + 55^2$$

$$r^2 = r^2 - 25r + 156,25 + 3025$$

$$25r = 3181,25$$

$$r = \frac{3181,25}{25} = 127,25 \text{ (mm)}$$

Linssin tilavuus saadaan pallosegmentin tilavuuden kaavan avulla.

$$V_{linssi} = 2V_{segmentti}$$

$$= 2 \cdot \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3} \right) \quad \left| \begin{array}{l} h = 12,5 \text{ mm} \\ r = 127,25 \text{ mm} \end{array} \right.$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot 12,5^2 \cdot \left(127,25 - \frac{12,5}{3} \right)$$

$$= 120\,836,778... \text{ (mm}^3\text{)}$$

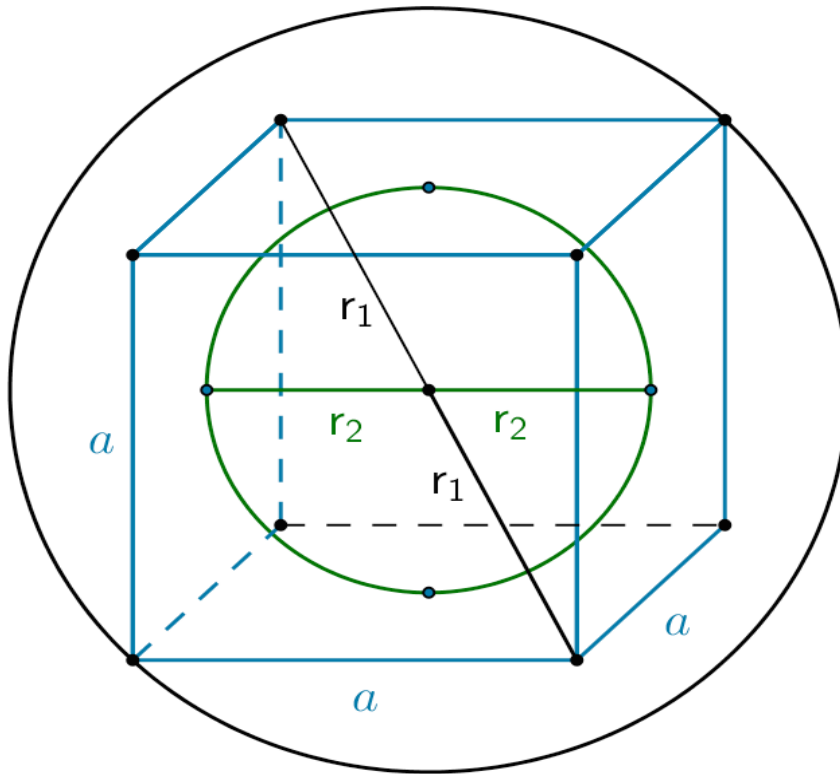
Linssin tilavuus on

$$120\,836,778... \text{ mm}^3 = 120,836... \text{ cm}^3 \approx 120 \text{ cm}^3.$$

Vastaus 120 cm^3

279

a)



Olkoon uloimman pallon P_1 säde r_1 ja seuraavan pallon P_2 säde r_2 jne.

Ensimmäisen kuution N_1 avaruuslävistäjä on sama kuin sen ympäri piirretyn pallon P_1 halkaisija. Merkitään ensimmäisen kuution sivusärmää kirjaimella a ja muodostetaan yhtälö.

$$2r_1 = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2}$$

$$2r_1 = \sqrt{3a^2}$$

$$2r_1 = \sqrt{3}|a| \quad | a > 0$$

$$r_1 = \frac{\sqrt{3}a}{2}$$

Ensimmäisen kuution N_1 sisään piirretyn pallon P_2 halkaisija on sama kuin kuution särmä. Muodostetaan yhtälö.

$$2r_2 = a$$

$$r_2 = \frac{a}{2}$$

Pallojen säteiden suhde on

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}a}{2} = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Vastaavasti aina $\frac{r_n}{r_{n-1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, joka ei riipu indeksistä n . Siis

pallojen säteet muodostavat geometrisen jonon, jossa

ensimmäinen termi on r_1 ja suhdeluku $q = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

b) Pallojen pinta-aloille saadaan suhdeluku

$$\frac{A_n}{A_{n-1}} = \frac{4\pi r_n^2}{4\pi r_{n-1}^2} = \frac{r_n^2}{r_{n-1}^2} = \left(\frac{r_n}{r_{n-1}}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

Siis pallojen pinta-alat muodostavat geometrisen jonon, jossa

suhdeluku on $q = \frac{1}{3}$.

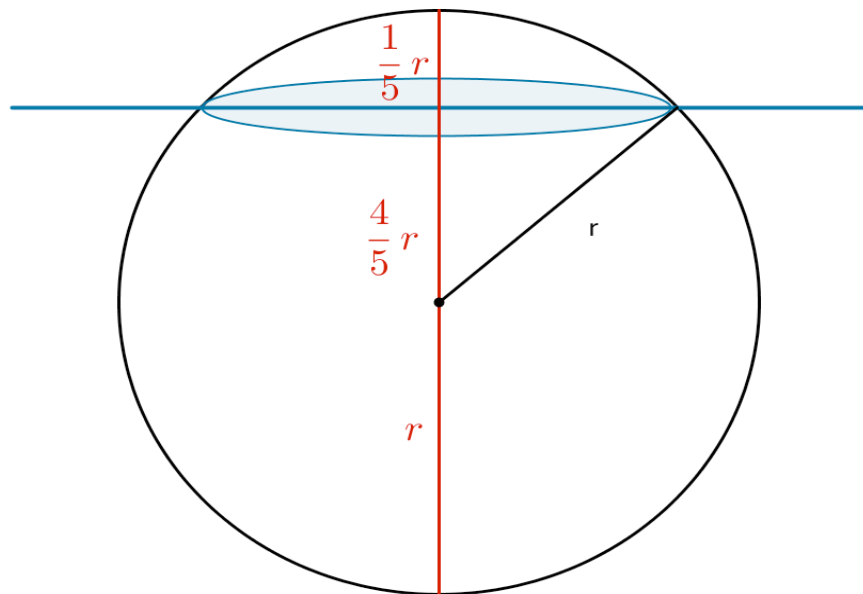
c) Pallojen tilavuuksille saadaan suhdeluku

$$\frac{V_n}{V_{n-1}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r_n^3}{\frac{4}{3}\pi r_{n-1}^3} = \frac{r_n^3}{r_{n-1}^3} = \left(\frac{r_n}{r_{n-1}}\right)^3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

Siis pallojen pinta-alat muodostavat geometrisen jonon, jossa suhdeluku on $q = \frac{1}{3\sqrt{3}}$.

Vastaus a) $q = \frac{1}{\sqrt{3}}$ b) $q = \frac{1}{3}$ c) $q = \frac{1}{3\sqrt{3}}$

280



Kelluva pallo syrjäyttää painonsa verran vettä. Veden pinnan kautta kulkeva taso jakaa pallon kahteen ympyräsegmenttiin. Alemman, veden alla olevan segmentin korkeus on

$$r + \frac{4}{5}r = \frac{9}{5}r.$$

Veden alla olevan segmentin tilavuus on

$$V = \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3} \right) \quad \left| \quad h = \frac{9}{5}r \right.$$

$$= \pi \left(\frac{9}{5}r \right)^2 \left(r - \frac{\frac{9}{5}r}{3} \right)$$

$$= \pi \cdot \frac{9^2}{5^2} r^2 \cdot \left(r - \frac{9}{5} r \cdot \frac{1}{3} \right)$$

$$= \pi \cdot \frac{9^2}{5^2} r^2 \cdot \left(\frac{15}{15} r - \frac{9}{15} r \right)$$

$$= \pi \cdot \frac{9^2}{5^2} r^2 \cdot \frac{\cancel{6}^2}{\cancel{15}_5} r$$

$$= \frac{162}{125} \pi r^3$$

Pallon tiheys saadaan jakamalla pallon massa sen tilavuudella. Pallon massa on vedenalaisen osan tilavuus kerrottuna veden tiheydellä.

$$\rho = \frac{m_{\text{pallo}}}{V_{\text{pallo}}}$$

$$| m_{\text{pallo}} = V_{\text{segmentti}} \cdot \rho_{\text{vesi}}$$

$$= \frac{V_{\text{segmentti}} \cdot \rho_{\text{vesi}}}{V_{\text{pallo}}}$$

$$| V_{\text{segmentti}} = \frac{162}{125} \cdot \pi r^3$$

$$| \rho_{\text{vesi}} = 1,00 \cdot 10^3 \text{ kg} / \text{m}^3$$

$$| V_{\text{pallo}} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$= \frac{\frac{162}{125} \cdot \cancel{\pi r^3} \cdot 1,00 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3}{\frac{4}{3} \cancel{\pi r^3}}$$

$$= \frac{\frac{162}{125}}{\frac{4}{3}} \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$$

$$= \frac{162}{125} \cdot \frac{3}{4} \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$$

$$= 972 \text{ kg/m}^3$$

Pallon tiheys on 972 kg/m^3 .

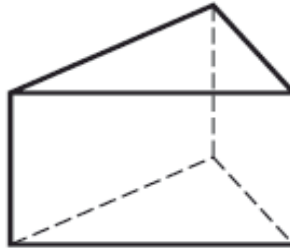
Vastaus 972 kg/m^3

281

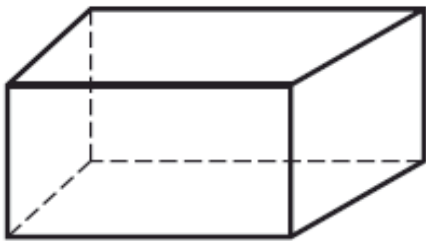
a)



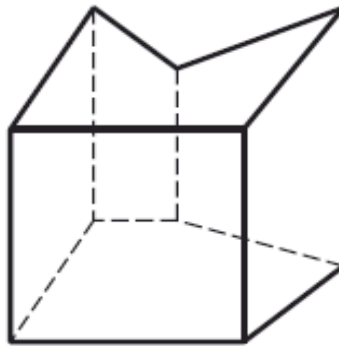
b)



c)



d)

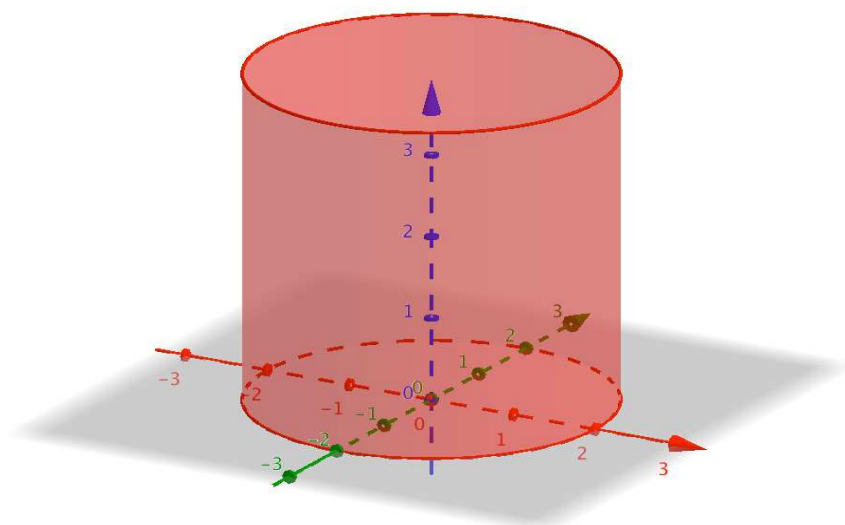


Lieriössä oltava kaksi samanlaista pohjaa, joten lieriöitä ovat b ja c.

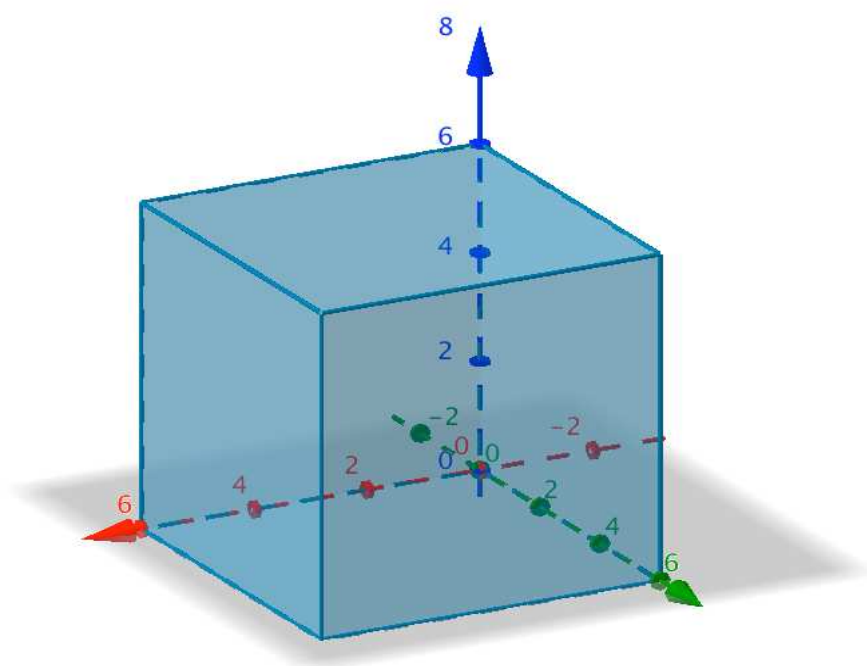
Vastaus b ja c

282

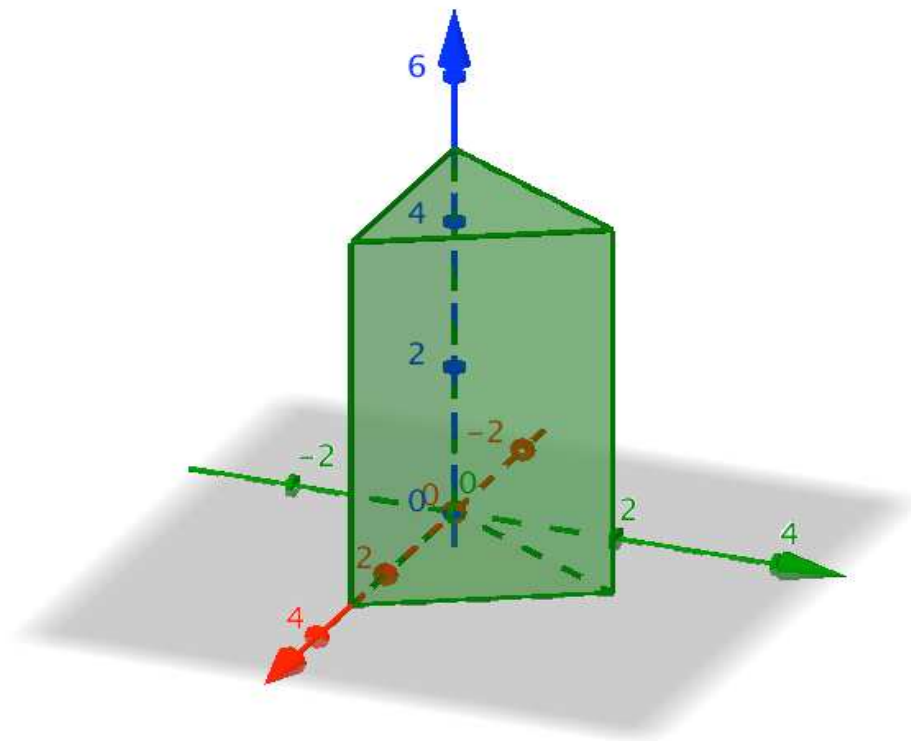
a)



b)

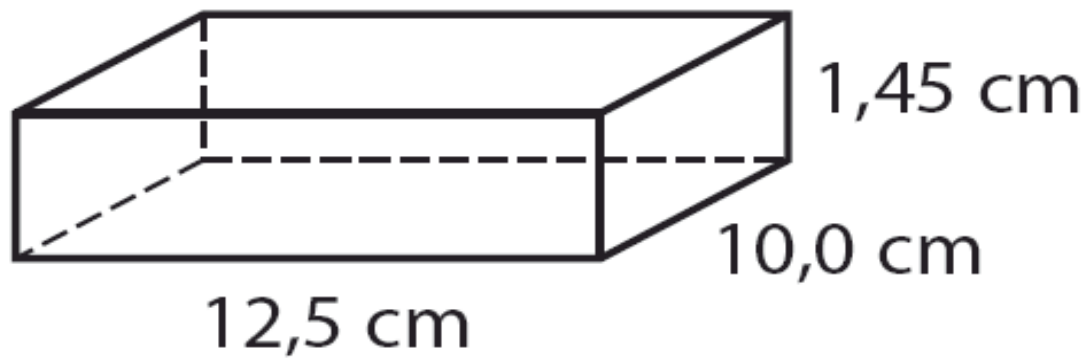


c)



283

a)



Tilavuus on

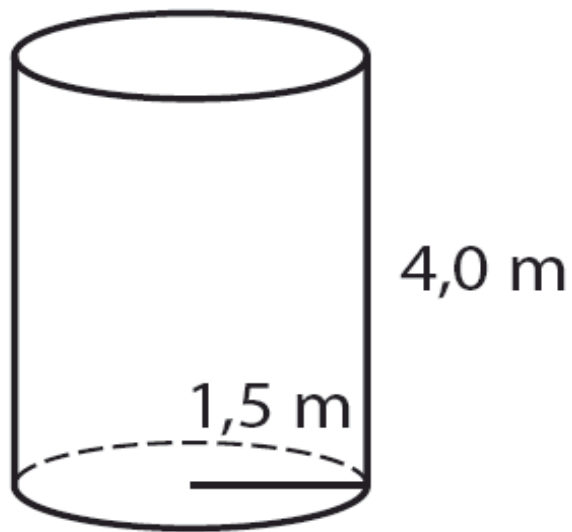
$$V = 1,25 \text{ dm} \cdot 1,00 \text{ dm} \cdot 0,145 \text{ dm}$$

$$= 0,18125 \text{ dm}^3$$

$$\approx 0,181 \text{ L}$$

Suorakulmaisen särmiön tilavuus on 0,181 L.

b)



Tilavuus on

$$V = A_p h$$

$$= \pi r^2 \cdot h$$

$$= \pi \cdot 15^2 \cdot 40$$

$$= 28\,274,3\dots$$

$$\approx 28\,000 \text{ (dm}^3\text{)}$$

$$\left| A_p = \pi r^2 \right.$$

$$\left| r = 1,5 \text{ m} = 15 \text{ dm} \right.$$

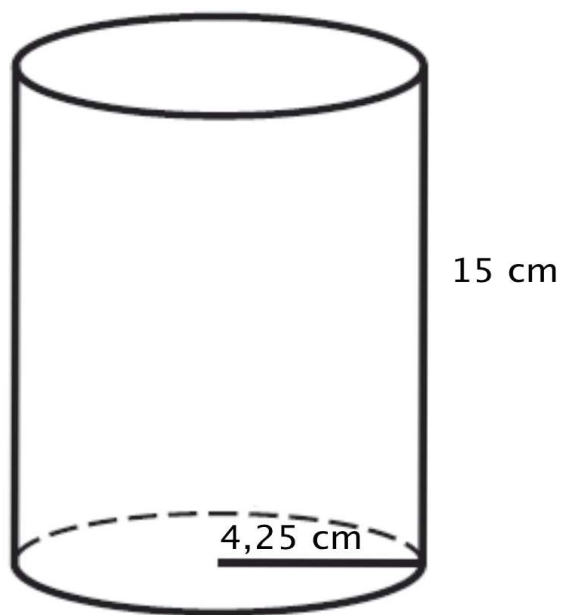
$$\left| h = 4,0 \text{ m} = 40 \text{ dm} \right.$$

Suoran ympyrälieriön tilavuus on $28\,000 \text{ dm}^3 = 28\,000 \text{ L}$.

Vastaus a) 0,181 L

b) 28 000 L

284



Tölkin tilavuus:

$$V = A_p h$$

$$= \pi r^2 h$$

$$= \pi \cdot 4,25^2 \cdot 15$$

$$= 851,17... \approx 850 \text{ (cm}^3\text{)}$$

$$\left| A_p = \pi r^2 \right.$$

$$\left| r = \frac{8,5 \text{ cm}}{2} = 4,25 \text{ cm} \right.$$

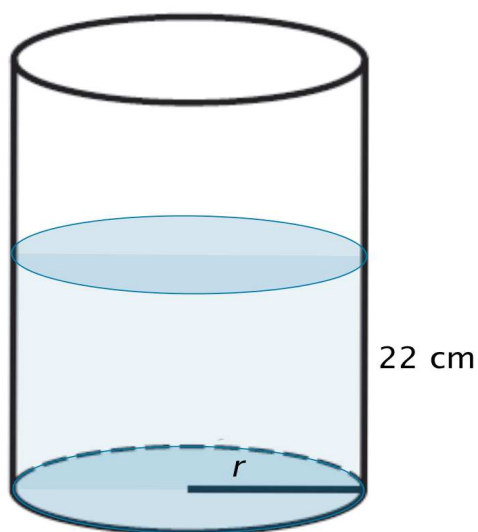
$$\left| h = 15 \text{ cm} \right.$$

Tölkin kokonaispinta-ala:

$$\begin{aligned} A &= 2A_p + A_v & \left| \begin{array}{l} A_p = \pi r^2 \\ A_v = 2\pi rh \end{array} \right. \\ &= 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi rh & \left| \begin{array}{l} r = \frac{8,5 \text{ cm}}{2} = 4,25 \text{ cm} \\ h = 15 \text{ cm} \end{array} \right. \\ &= 2\pi \cdot 4,25^2 \cdot 15 + 2\pi \cdot 4,25 \cdot 15 \\ &= 514,04... \approx 510 \text{ (cm}^2\text{)} \end{aligned}$$

Vastaus $850 \text{ cm}^3, 510 \text{ cm}^2$

285



Muodostetaan yhtälö veden tilavuuden avulla.

$$V = A_p h$$

$$V = \pi r^2 h$$

$$\left| \begin{array}{l} V = 5,0 \text{ L} = 5,0 \text{ dm}^3 \\ h = 22 \text{ cm} = 2,2 \text{ dm} \end{array} \right.$$

$$5,0 = \pi \cdot r^2 \cdot 2,2$$

$$r^2 = \frac{5,0}{\pi \cdot 2,2}$$

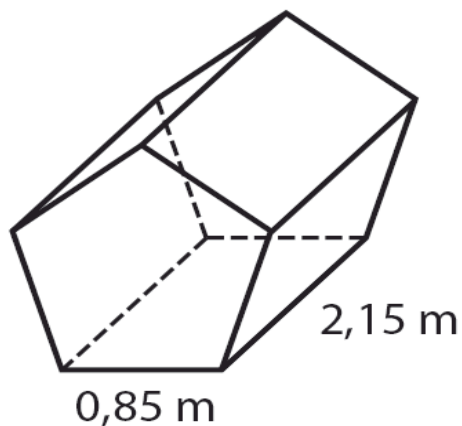
$$r = (\pm) \sqrt{\frac{5,0}{\pi \cdot 2,2}}$$

$$= 0,8505... \text{ (dm)}$$

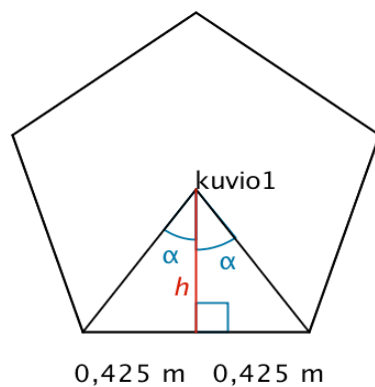
Pohjan halkaisija on $2r = 2 \cdot 0,8505... \text{ dm} = 1,701... \text{ dm} \approx 17 \text{ cm}$.

Vastaus 17 cm

286



Lasketaan ensin särmiön pohjana olevan säännöllisen viisikulmion pinta-ala A_p .



$$\frac{0,85 \text{ m}}{2} = 0,425 \text{ m}$$

$$\tan \alpha = \frac{0,425}{h}$$

$$h = \frac{0,425}{\tan \alpha}$$

$$\left| \alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{360^\circ}{5} = 36^\circ \right.$$

$$= \frac{0,425}{\tan 36^\circ}$$

$$= 0,584... \text{ (m)}$$

$$A_p = 5 \cdot A_{\text{kolmio}} = 5 \cdot \frac{0,85 \cdot 0,584...}{2} = 1,243... \text{ (m}^2\text{)}$$

Särmiön kokonaispinta-ala on

$$A = 2 \cdot A_p + A_{vaippa} \quad \left| \begin{array}{l} A_p = 1,243... \text{ m}^2 \\ A_{vaippa} = 5 \cdot A_{sivutahko} \end{array} \right.$$

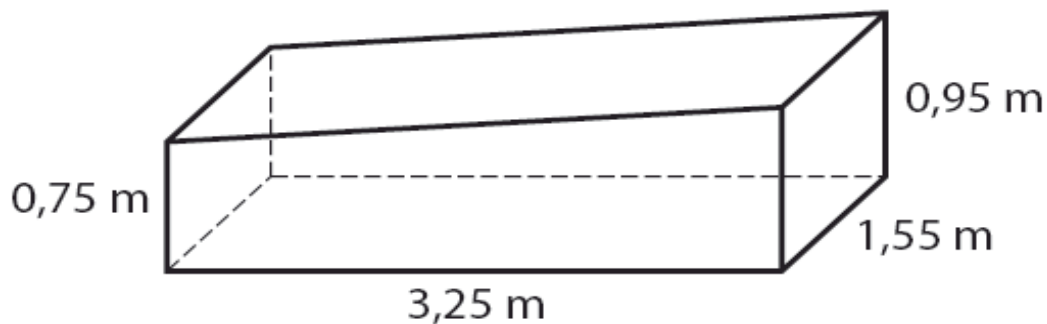
$$= 2 \cdot 1,243... + 5 \cdot 0,85 \cdot 2,15$$

$$= 11,623...$$

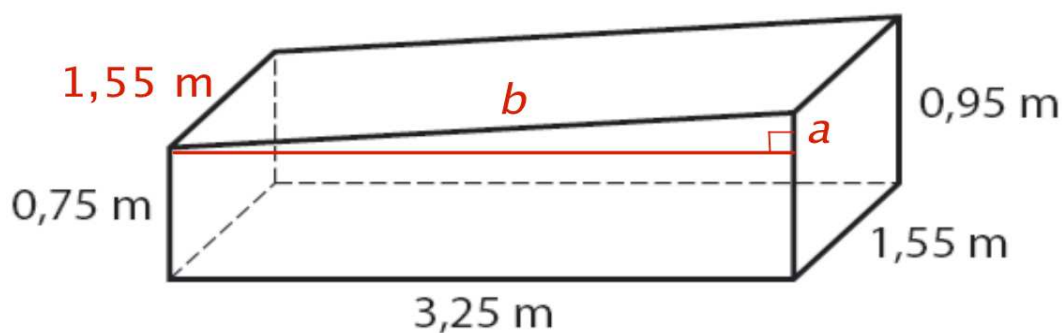
$$\approx 12 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Vastaus 12 m^2

287



Lasketaan kantana vinossa olevan suorakulmion sivun pituus b .



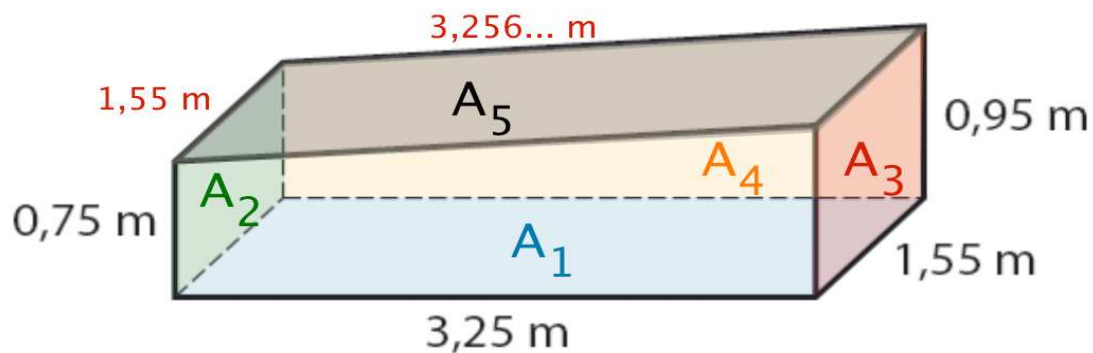
Muodostetaan yhtälö Pythagoraan lauseen avulla.

$$b^2 = 3,25^2 + a^2 \quad \left| \begin{array}{l} a = 0,95 \text{ m} - 0,75 \text{ m} \\ = 0,20 \text{ m} \end{array} \right.$$

$$= 3,25^2 + 0,20^2$$

$$= 10,6025$$

$$b = (\pm)\sqrt{10,6025} = 3,256... \text{ (m)}$$



Lasketaan kokonaispinta-ala.

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + 2 \cdot A_4 + A_5$$

$$A_1 = 3,25 \cdot 1,55 = 5,0375$$

$$A_2 = 0,75 \cdot 1,55 = 1,1625$$

$$A_3 = 0,95 \cdot 1,55 = 1,4725$$

$$2 \cdot A_4 = 2 \cdot \frac{0,75 + 0,95}{2} \cdot 3,25$$

$$= 5,525$$

$$A_5 = 1,55 \cdot 3,256... = 5,047...$$

$$= 5,0375 + 1,1625 + 1,4725 + 5,525 + 5,047...$$

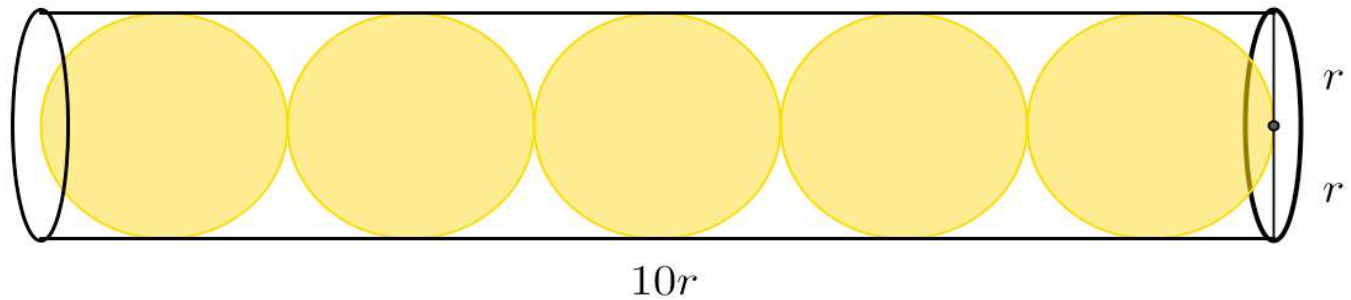
$$= 18,244...$$

$$\approx 18 \text{ (m}^2\text{)}$$

Särmiön kokonaispinta-ala on 18 m^2 .

Vastaus 18 m^2

288



Olkoon tennispallon säde r .

Lieriön tilavuus:

$$V_{\text{lieriö}} = A_p h \quad \left| \begin{array}{l} A_p = \pi r^2 \\ h = 10r \end{array} \right.$$

$$= \pi r^2 \cdot 10r$$

$$= 10\pi r^3$$

Pallojen tilavuus:

$$V_{\text{pallot}} = 5 \cdot V_{\text{pallo}} \quad \left| \quad V_{\text{pallo}} = \frac{4}{3} \pi r^3 \right.$$

$$= 5 \cdot \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$= \frac{20}{3} \pi r^3$$

Tilavuuksien suhde:

$$\frac{V_{pallot}}{V_{lieriö}} = \frac{\frac{20}{3} \cancel{\pi r^3}}{10 \cancel{\pi r^3}} = \frac{\frac{20}{3}}{10} = \frac{20}{3} \cdot \frac{1}{10} = \frac{2}{3}$$

Saadaan

$$V_{pallot} = \frac{2}{3} V_{lieriö} \ .$$

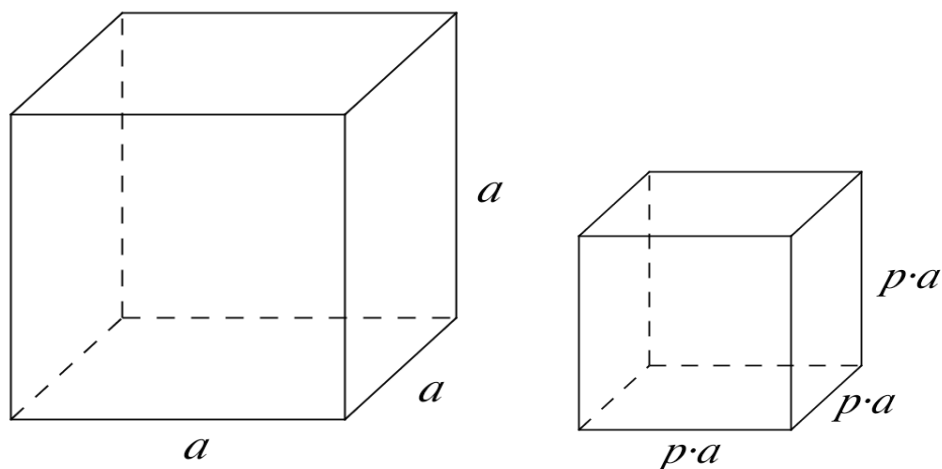
Tyhjä osuus:

$$V_{lieriö} - V_{pallot} = V_{lieriö} - \frac{2}{3} V_{lieriö} = \frac{1}{3} V_{lieriö}$$

Pakkauksen tilavuudesta $\frac{1}{3}$ on tyhjää.

Vastaus $\frac{1}{3}$

289



Olkoon alkuperäisen kuution särmän pituus a .
Kuutio pienennetään siten, että särmän pituudeksi tulee $p \cdot a$.

Alkuperäinen kokonaispinta-ala:

$$A_1 = 6a^2.$$

Kokonaispinta-ala pienennyksen jälkeen:

$$A_2 = 6 \cdot (p \cdot a)^2 = 6p^2a^2.$$

Muodostetaan yhtälö tilavuuksien suhteen avulla.

Tilavuus pienenee 36 %, joten uusi tilavuus on $100 \% - 36 \% = 64 \%$ alkuperäisestä tilavuudesta.

$$\frac{A_2}{A_1} = 64 \%$$

$$\frac{6p^2a^2}{6a^2} = 0,64$$

$$p^2 = 0,64$$

$$p = (\pm)\sqrt{0,64} = 0,8$$

Alkuperäinen tilavuus:

$$V_1 = a^3$$

Tilavuus pienennyksen jälkeen:

$$V_2 = (pa)^3 = p^3a^3 = 0,8^3a^3$$

Tilavuuksien suhde:

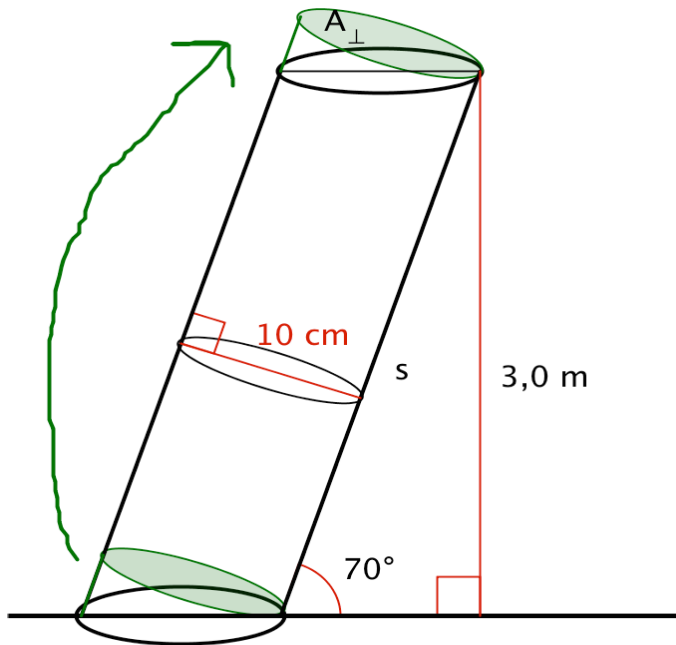
$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{0,8^3a^3}{a^3} = 0,8^3 = 0,512 = 51,2\% .$$

Uusi tilavuus on 51,2 % alkuperäisestä tilavuudesta, joten tilavuus pienenee

$$100 \% - 51,2 \% = 48,8 \% \approx 49 \% .$$

Vastaus 49 %

290



Putki on vino lieriö, jonka kohtisuora poikkileikkaus on ympyrä.

Ajatellaan, että putki katkaistaan kohtisuorasti ja esimerkiksi alapäästä siirretään pala yläpäähän. Näin saadaan suora ympyrälieriö, jonka pohjan halkaisija on 10 cm eli pohjan säde on 5,0 cm.

Saadun suoran ympyrälieriön pituus on sama kuin alkuperäisen vinon lieriön sivujanana pituus s .

$$\sin 70^\circ = \frac{3,0}{s}$$

$$s = \frac{3,0}{\sin 70^\circ} = 3,192... \text{ (m)}$$

Putken tilavuus on

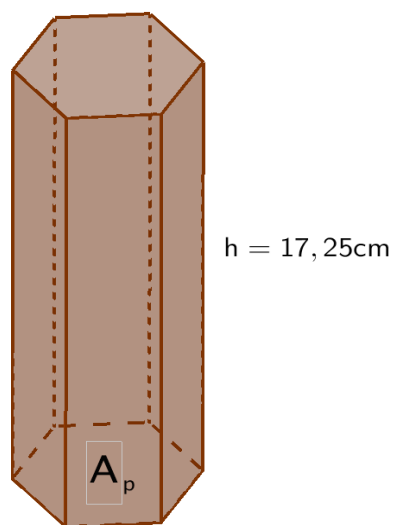
$$\begin{array}{l} V = A_{\perp} s \\ \left| \begin{array}{l} A_{\perp} = \pi r^2 = \pi \cdot 5,0^2 \text{ cm}^2 \\ s = 3,192... \text{ m} = 319,2... \text{ cm}^2 \end{array} \right. \\ \\ = \pi \cdot 5,0^2 \cdot 319,2... \\ = 25\,074,09... (\text{cm}^2) \end{array}$$

Putken tilavuus on

$$25\,074,09... \text{ cm}^3 = 25,07... \text{ dm}^3 \approx 25 \text{ dm}^3 (= 25 \text{ L}).$$

Vastaus 25 dm^3

291



Säännöllisen kuusisivuisen särmiön tilavuus on $2,5 \text{ L} = 2,5 \text{ dm}^3$ ja sen korkeus on $17,25 \text{ cm} = 1,725 \text{ dm}$.

Muodostetaan yhtälö.

$$V = A_p h$$

$$A_p = \frac{V}{h}$$

$$\left| \begin{array}{l} V = 2,5 \text{ dm}^3 \\ h = 1,725 \text{ dm} \end{array} \right.$$

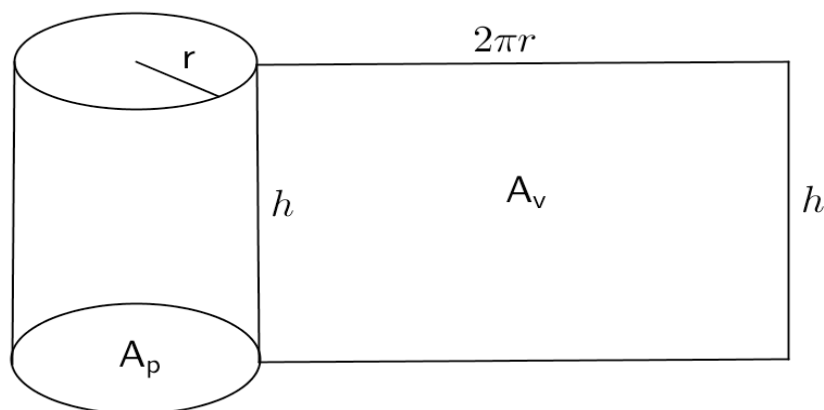
$$= \frac{2,5}{1,725}$$

$$= 1,449... (\text{dm}^2)$$

Särmiön pohjan pinta-ala on $1,449... \text{ dm}^2 = 144,9... \text{ cm}^2 \approx 140 \text{ cm}^2$.

Vastaus 140 cm^3

292



Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan lieriön korkeus h .

$$A_v = 2\pi r h$$

$$h = \frac{A_v}{2\pi r}$$

$$A_p = \pi r^2$$

$$r^2 = \frac{A_p}{\pi}$$

$$r = (\pm) \sqrt{\frac{A_p}{\pi}}$$

$$h = \frac{A_v}{2\pi \cdot \sqrt{\frac{A_p}{\pi}}}$$

$$A_v = 39,1 \text{ cm}^2$$

$$A_p = 1730 \text{ mm}^2 = 17,3 \text{ cm}^2$$

$$= \frac{39,1}{2\pi \cdot \sqrt{\frac{17,3}{\pi}}} = 2,651... \text{ (cm)}$$

Lieriön tilavuus on

$$V = A_p h \quad \left| \begin{array}{l} A_p = 1730 \text{ mm}^2 = 17,3 \text{ cm}^2 \\ h = 2,651... \text{ cm} \end{array} \right.$$

$$= 17,3 \cdot 2,651...$$

$$= 45,87... (\text{cm}^3)$$

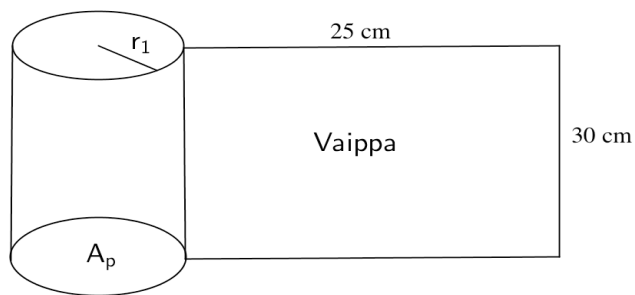
Tilavuus on $45,87... \text{ cm}^3 = 45,87... \text{ ml} \approx 46 \text{ ml}$.

Vastaus 46 ml

293

Lieriön korkeus voi olla joko 30 cm (tapaus 1) tai 25 cm (tapaus 2).

Tapaus 1:



$$2\pi r_1 = 25$$

$$r_1 = \frac{25}{2\pi} = 3,978... \text{ (cm)}$$

$$V_1 = A_p h$$

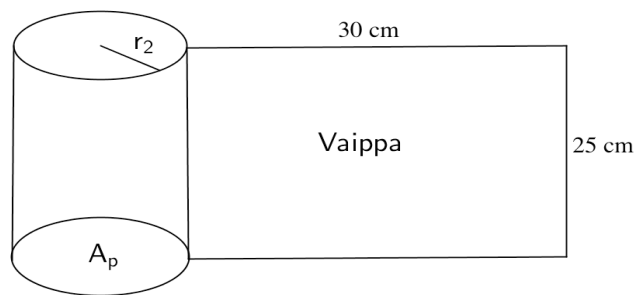
$$= \pi r_1^2 h \quad \left| \begin{array}{l} r_1 = 3,978... \text{ cm} \\ h = 30 \text{ cm} \end{array} \right.$$

$$= \pi \cdot 3,978...^2 \cdot 30$$

$$= 1492,077...$$

$$\approx 1500 \text{ (cm}^3\text{)}$$

Tapaus 2:



$$2\pi r_2 = 30$$

$$r_2 = \frac{30}{2\pi} = 4,774... \text{ (cm)}$$

$$V_2 = A_p h$$

$$= \pi r_2^2 h \quad \left| \begin{array}{l} r_2 = 4,774... \text{ cm} \\ h = 25 \text{ cm} \end{array} \right.$$

$$= \pi \cdot 4,774...^2 \cdot 25$$

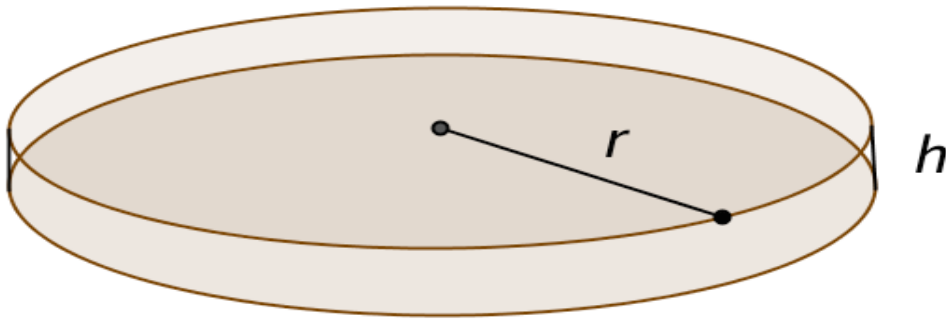
$$= 1790,49...$$

$$\approx 1800 \text{ (cm}^3\text{)}$$

Lieriön tilavuus on 1500 cm^3 tai 1800 cm^3 .

Vastaus 1500 cm^3 tai 1800 cm^3

294



Öljylautta on likimain suora ympyrälieriö, jonka säde on r ja paksuus h .

Määritetään öljylautan säde lautan ympärysmittan avulla.

$$p = 2\pi r$$

$$r = \frac{p}{2\pi} \quad \left| \begin{array}{l} p = 576 \text{ m} \end{array} \right.$$

$$= \frac{576}{2\pi}$$

$$= 91,67... \text{ (m)}$$

Öljylautan tilavuus saadaan massan ja tiheyden avulla.

$$\rho = \frac{m}{V}$$

$$V = \frac{m}{\rho} \quad \left| \begin{array}{l} m = 1250 \text{ kg} \\ \rho = 700 \text{ kg/m}^3 \end{array} \right.$$

$$= \frac{1250}{700}$$

$$= 1,785... \text{ (m}^3\text{)}$$

Tilavuuden lausekkeen avulla saadaan ratkaistua kysytty öljylautan paksuus h .

$$V = \pi r^2 h$$

$$h = \frac{V}{\pi r^2}$$

$$\left| \begin{array}{l} r = 91,67... \text{ m} \\ V = 1,785... \text{ m}^3 \end{array} \right.$$

$$= \frac{1,785...}{\pi \cdot 91,67...^2}$$

$$= 6,76... \cdot 10^{-5}$$

$$= 0,0000676... \text{ (m)}$$

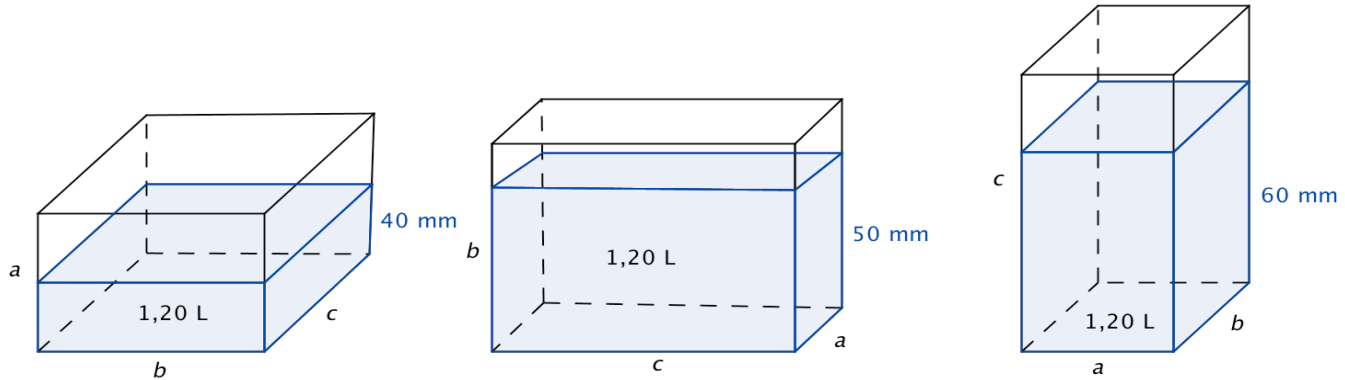
Öljylautan paksuus on

$$h = 0,0000676... \text{ m} = 0,0676... \text{ mm} \approx 0,07 \text{ mm} .$$

Vastaus 0,07 mm

295

Olkoon lasisen särmiön mitat desimetreinä a , b ja c .



$$40 \text{ mm} = 0,40 \text{ dm}$$

$$50 \text{ mm} = 0,50 \text{ dm}$$

$$60 \text{ mm} = 0,60 \text{ dm}$$

Veden määrä on $1,20 \text{ L} = 1,20 \text{ dm}^3$.

Vesitilavuus voidaan laskea kolmella eri tavalla (mitat desimetreinä).

$$b \cdot c \cdot 0,40 = 1,20$$

$$a \cdot c \cdot 0,50 = 1,20$$

$$a \cdot b \cdot 0,60 = 1,20$$

On laskettava säiliön tilavuus $V = a \cdot b \cdot c$.

Kerrotaan kaikki kolme yhtälöä puolittain keskenään.

$$(b \cdot c \cdot 0,40) \cdot (a \cdot c \cdot 0,50) \cdot (a \cdot b \cdot 0,60) = 1,20 \cdot 1,20 \cdot 1,20$$

$$a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot 0,40 \cdot 0,50 \cdot 0,60 = 1,20^3$$

$$(a \cdot b \cdot c)^2 = \frac{1,20^3}{0,40 \cdot 0,50 \cdot 0,60}$$

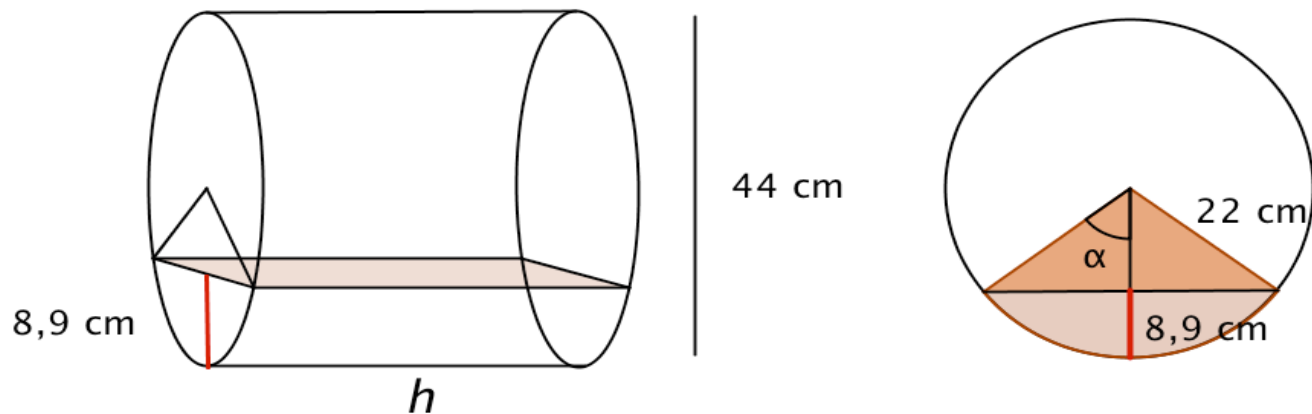
$$(a \cdot b \cdot c)^2 = 14,4$$

$$abc = (\pm)\sqrt{14,4} = 3,794... \text{ (dm}^3\text{)}$$

Säiliön tilavuus on $3,794... \text{ dm}^3 = 3,794... \text{ L} \approx 3,8 \text{ L}$.

Vastaus 3,8 L

296



Selvitetään tynnyrin korkeus h tilavuuden lausekkeen avulla.

$$V = A_p h$$

$$h = \frac{V}{A_p} \quad \left| \quad A_p = \pi r^2 \right.$$

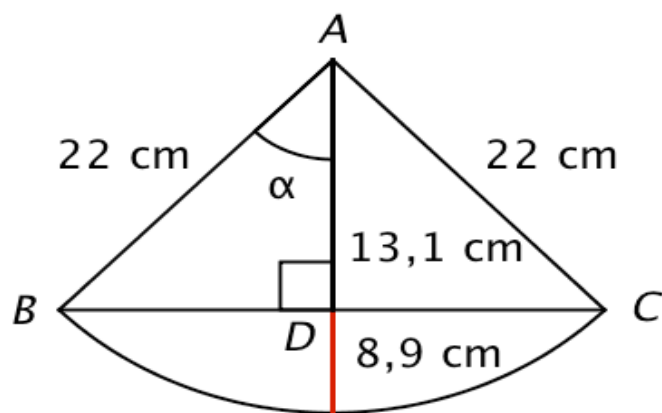
$$= \frac{V}{\pi r^2} \quad \left| \quad \begin{array}{l} V = 200 \text{ L} = 200 \text{ dm}^3 \\ r = 22 \text{ cm} = 2,2 \text{ dm} \end{array} \right.$$

$$= \frac{200}{\pi \cdot 2,2^2}$$

$$= 13,153... \text{ (dm)}$$

Polttoainekerroksen poikkileikkaus on ympyräsegmentti. Selvitetään segmentin pinta-ala.

Suorakulmaisen kolmion ABD kateetin AD pituus on $22 \text{ cm} - 8,9 \text{ cm} = 13,1 \text{ cm}$.



$$\cos \alpha = \frac{13,1}{22} = 0,595\dots$$

$$\alpha = \cos^{-1} 0,595\dots = 53,425\dots^\circ$$

$$A_{\text{segmentti}} = A_{\text{sektori}} - A_{\text{kolmio}}$$

$$= \frac{2\alpha}{360} \cdot \pi r^2 - \frac{1}{2} r \cdot r \cdot \sin(2\alpha) \quad \left| \begin{array}{l} \alpha = 53,425\dots^\circ \\ r = 22 \text{ cm} = 2,2 \text{ dm} \end{array} \right.$$

$$= \frac{2 \cdot 53,425\dots^\circ}{360} \cdot \pi \cdot 2,2^2 - \frac{1}{2} \cdot 2,2^2 \cdot \sin(2 \cdot 53,425\dots^\circ)$$

$$= 2,2001\dots (\text{dm}^2)$$

Polttoaineen tilavuus on

$$\begin{array}{l|l} V_{\text{polttoaine}} = A_{\text{segmentti}} \cdot h & \begin{array}{l} A_{\text{segmentti}} = 2,2001... \text{ dm}^2 \\ h = 13,153... \text{ dm} \end{array} \\ \hline & \\ & \\ & \end{array}$$
$$= 2,2001... \cdot 13,153...$$
$$= 28,939... (\text{dm}^3)$$

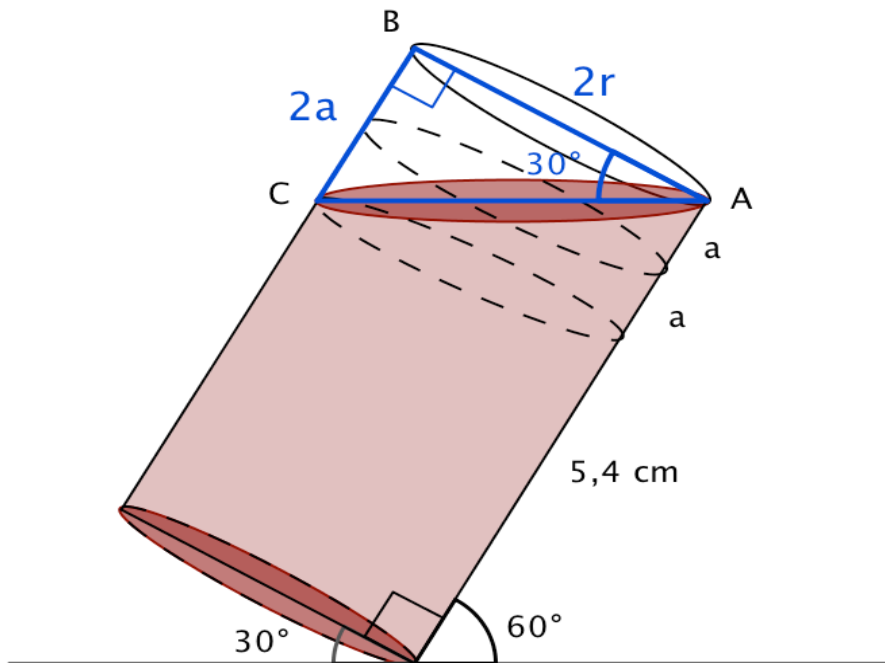
Polttoainetta on tynnyrissä $28,939... \text{ dm}^3 = 28,939... \text{ L}$.

Tynnyrin ja polttoaineen yhteishinta on

$$1,32 \frac{\text{€}}{\text{L}} \cdot 28,939... \text{ L} + 17,99 \text{ €} = 56,190... \text{ €} \approx 56,19 \text{ €}$$

Vastaus 56,19 €

297



Mehun alkuperäinen korkeus mukissa ennen kallistamista on kuvan merkinnöillä $5,4 \text{ cm} - a$.

Lasketaan mukin pohjan säde r .

$$V = A_p h \quad \left| \quad A_p = \pi r^2 \right.$$

$$V = \pi r^2 h$$

$$r^2 = \frac{V}{\pi h}$$

$$r = (\pm) \sqrt{\frac{V}{\pi h}}$$

$$\left| \begin{array}{l} V = 2,5 \text{ dl} = 250 \text{ ml} = 250 \text{ cm}^3 \\ h = 5,4 \text{ cm} \end{array} \right.$$

$$= \sqrt{\frac{250}{\pi \cdot 5,4}} = 3,838... \text{ (cm)}$$

Lasketaan tarvittava mitta a suorakulmaisesta kolmiosta ABC .

$$\tan 30^\circ = \frac{\cancel{2}a}{\cancel{2}r}$$

$$a = r \tan 30^\circ \quad \left| \quad r = 3,838... \text{ cm} \right.$$

$$= 3,838... \cdot \tan 30^\circ$$

$$= 2,216... \text{ (cm)}$$

Lasketaan mehun tilavuus.

$$V_{\text{mehu}} = A_p \cdot h \quad \left| \quad A_p = \pi r^2 \right.$$

$$= \pi r^2 \cdot h$$

$$\left| \quad r = 3,838... \text{ cm} \right.$$

$$\left| \quad h = 5,4 \text{ cm} - 2,216... \text{ cm} = 3,183... \text{ cm} \right.$$

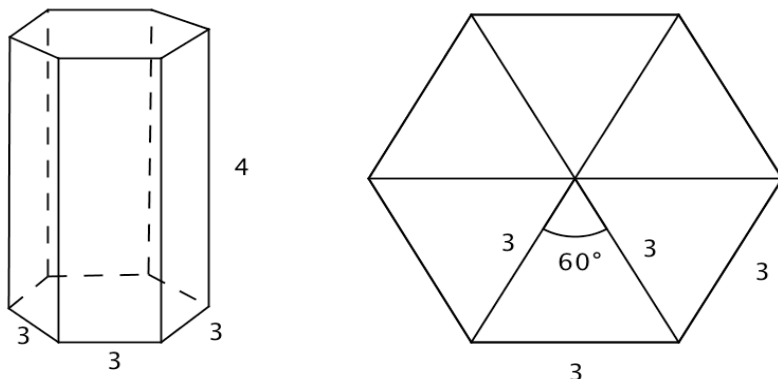
$$= \pi \cdot (3,838...)^2 \cdot 3,183...$$

$$= 147,391... \text{ (cm}^3\text{)}$$

Mehua on $147,391... \text{ cm}^3 = 147,391... \text{ ml} = 1,5 \text{ dl}$.

Vastaus 1,5 dl

298



Pohjana oleva säännöllinen kuusikulmio voidaan jakaa kuuteen tasasivuiseen kolmioon, joissa kaikki sivut ovat pituudeltaan 3 ja kulmat 60° .

Lasketaan särmiön tilavuus.

$$V = A_p h$$

$$= 6 A_{kolmio} \cdot h$$

$$\left| \begin{array}{l} A_{kolmio} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \sin 60^\circ \\ h = 4 \end{array} \right.$$

$$= 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \sin 60^\circ \cdot 4$$

$$= 4 \cdot 27 \cdot \sin 60^\circ$$

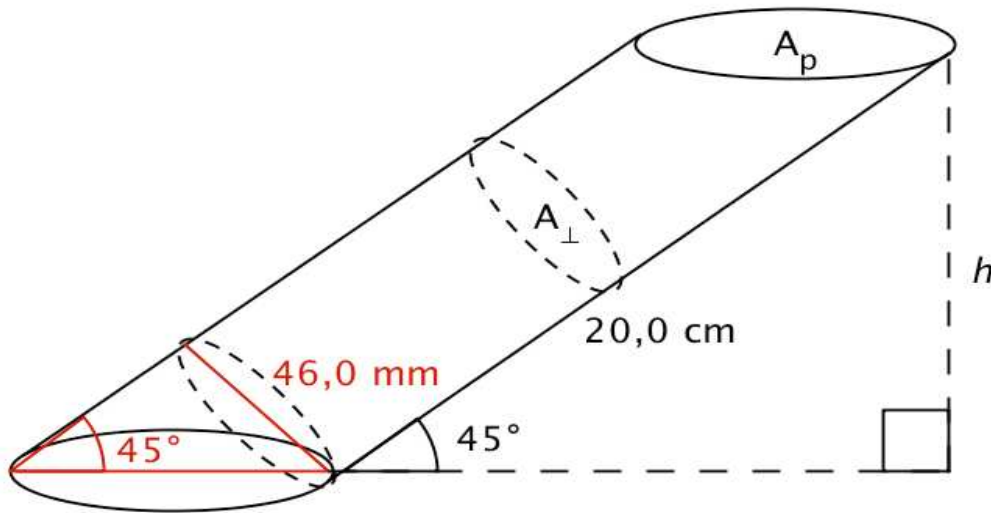
$$\left| \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \right.$$

$$= 4 \cdot 27 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 54\sqrt{3}$$

Vastaus $54\sqrt{3}$

299



Kun poikkileikkaukseltaan pyöreästä tangosta sahataan vino lieriö, pohjat eivät ole ympyröitä (vaan ellipsejä).

Vinon lieriön pinta-alan ja vaipan selvittämiseksi lasketaan ensin lieriön tilavuus ajattelemalla, että lieriön päästä siirretään kohtisuoraan katkaistu pala toiseen päähän, jolloin saadaan suora ympyrälieriö. Vinon lieriön pohjan ala saadaan korkeuden h ja tilavuuden avulla.

Tangon poikkileikkauksen säde r :

$$r = \frac{46,0 \text{ mm}}{2} = 23,0 \text{ mm} = 2,3 \text{ cm}$$

Lieriön tilavuus V :

$$\begin{aligned} V &= A_{\perp} \cdot s & \left| \begin{aligned} A_{\perp} &= \pi r^2 = \pi \cdot 2,3^2 \text{ cm}^2 \\ s &= 20,0 \text{ cm} \end{aligned} \right. \\ &= \pi \cdot 2,3^2 \cdot 20,0 \\ &= 332,380... (\text{cm}^3) \end{aligned}$$

Lieriön korkeus h :

$$\sin 45^\circ = \frac{h}{20,0}$$

$$\begin{aligned} h &= 20,0 \cdot \sin 45^\circ \\ &= 14,142... \text{ (cm)} \end{aligned}$$

Lieriön pohjan ala A_p :

$$V = A_p h$$

$$A_p = \frac{V}{h}$$

$$= \frac{332,380...}{14,142...}$$

$$= 23,502... \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\left| \begin{array}{l} V = 332,380... \text{ cm}^3 \\ h = 14,142... \text{ cm} \end{array} \right.$$

Lieriön vaipan ala A_v :

$$A_v = ps$$

$$= 2\pi \cdot 2,3 \cdot 20,0$$

$$= 289,026... \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\left| \begin{array}{l} p = 2\pi r = 2\pi \cdot 2,3 \text{ cm} \\ s = 20,0 \text{ cm} \end{array} \right.$$

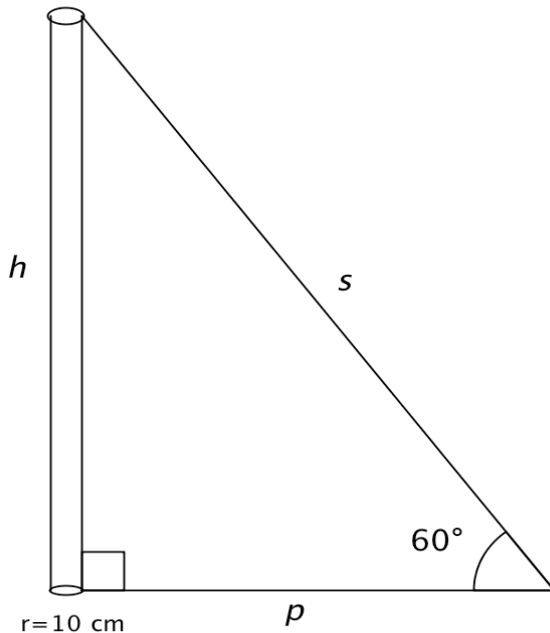
Lieriön pinta-ala A :

$$\begin{aligned} A &= 2 \cdot A_p + A_v \\ &= 2 \cdot 23,502... + 289,026... \\ &= 336,032... \approx 336 \text{ (cm}^3\text{)} \end{aligned}$$

Lieriön kokonaispinta-ala on 336 cm^3 .

Vastaus 336 cm^3

300



Kuvitellaan, että lipputangon ympärille kierrettyyn naruun on kiinnitetty kolmion muotoinen paperi.

Kun paperi rullataan auki, naru kulkee pitkin hypotenuusaa suorakulmaisessa kolmiossa, jossa toinen kateetti on pituudeltaan lipputangon korkeus h ja toinen kateetti 12 kertaa lipputangon ympärysmitta p .

Kolmion terävä kulma on 60° .

$$p = 12 \cdot 2\pi r = 12 \cdot 2\pi \cdot 10 = 753,982... \text{ (cm)}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{h}{p}$$

$$h = p \tan 60^\circ = 753,982... \cdot \tan 60^\circ = 1305,935... \text{ (cm)}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{p}{s}$$

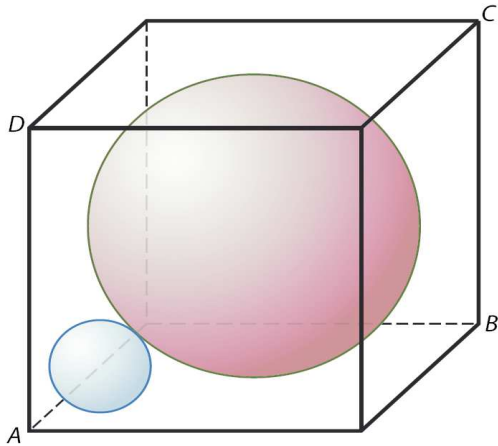
$$s = \frac{p}{\cos 60^\circ} = \frac{753,982...}{\cos 60^\circ} = 1507,964... \text{ (cm)}$$

Lipputangon korkeus on $h = 1305,935... \text{ cm} \approx 13 \text{ m}$.

Narun pituus on $s = 1507,964... \text{ cm} \approx 15 \text{ m}$.

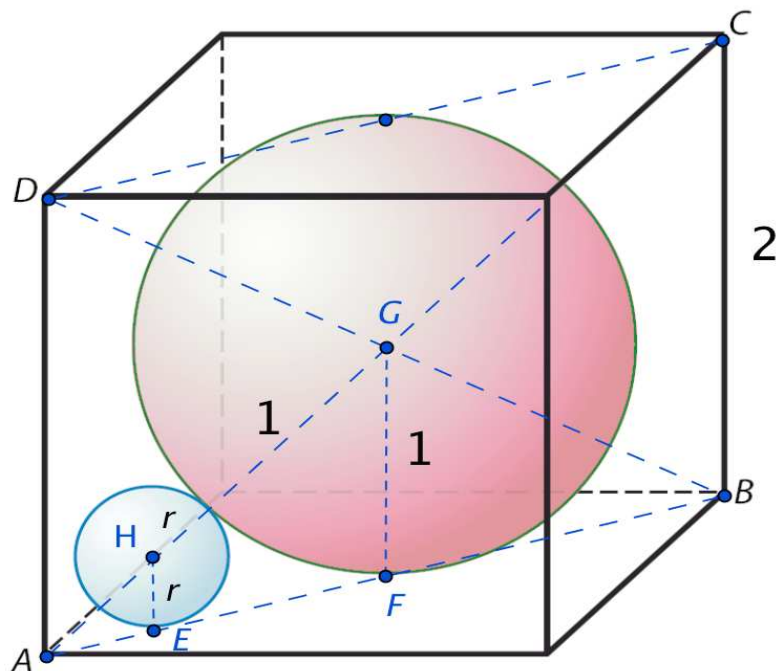
Vastaus tanko 13 m, naru 15 m

301

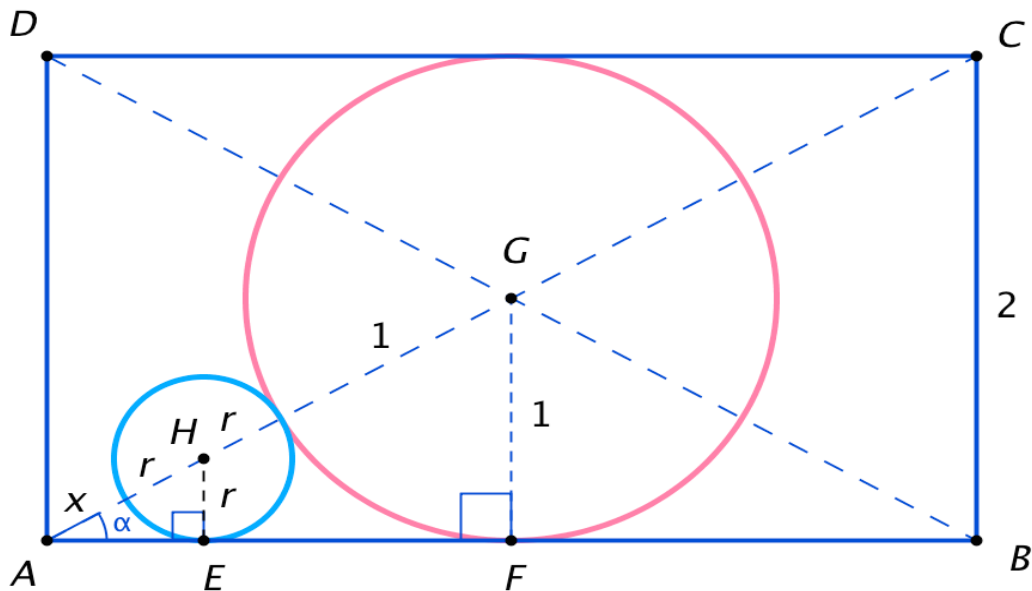


Punaisen pallon säde on 1 (puolet kuution särmän pituudesta 2). Punaisen pallon keskipiste on kuution avaruuslävistäjällä ja pallo sivuaa ala- ja ylätahkoa niiden keskipisteessä, joka on myös tahkojen lävistäjien keskipiste.

Sinisen pallon keskipiste on kuution avaruuslävistäjällä ja pallo sivuaa alatahkoa sen lävistäjällä. Sininen pallo sivuaa punaista palloa kuution avaruuslävistäjän pisteessä. Merkitään sinisen pallon sädettä kirjaimella r .



Piirretään tilanteesta poikkileikkauskuva tasossa, joka kulkee kärkien A , B , C ja D kautta.



Syntyy yhdenmuotoiset suorakulmaiset kolmiot AFG ja AEH (kk, kulma α on yhteinen ja molemmissa suora kulma).

Kuution sivutahkon lävistäjän pituus on

$$|AB| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = 2\sqrt{2}.$$

Kuution avaruoslävistäjän pituus on

$$|AC| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}.$$

Kolmioiden AFG ja AEH sivuista tiedetään seuraavaa:

- $|EH| = r$ | Sinisen pallon säde
- $|FG| = 1$ | Punaisen pallon säde

- $|AG| = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ | Puolet kuution avaruuslävistäjästä.

- $|AH| = x + r = |AG| - (r + 1) = \sqrt{3} - r - 1$

Muodostetaan yhtälö.

$$(\sin \alpha =) \quad \frac{|EH|}{|AH|} = \frac{|FG|}{|AG|}$$

$$\frac{r}{\sqrt{3} - r - 1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{3}r = \sqrt{3} - r - 1$$

$$\sqrt{3}r + r = \sqrt{3} - 1$$

$$r(\sqrt{3} + 1) = \sqrt{3} - 1$$

$$r = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$$

Saatiin sinisen pallon säteeksi $r = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$.

Tämä voidaan vielä sieventää:

$$r = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{\sqrt{3}^2 - 1^2} = \frac{3 - 2 \cdot \sqrt{3} + 1}{3 - 1} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$$

Vastaus Sinisen pallon säde on $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ eli $2 - \sqrt{3}$.

302

Lasketaan puupallon säde R määrittämällä ensin pallon tilavuus tiheyden ja massan avulla.

$$\rho = \frac{m}{V}$$

$$V = \frac{m}{\rho}$$

$$\left| V = \frac{4}{3} \pi R^3 \right.$$

$$\frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{m}{\rho}$$

$$R^3 = \frac{3m}{4\pi\rho}$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{3m}{4\pi\rho}}$$

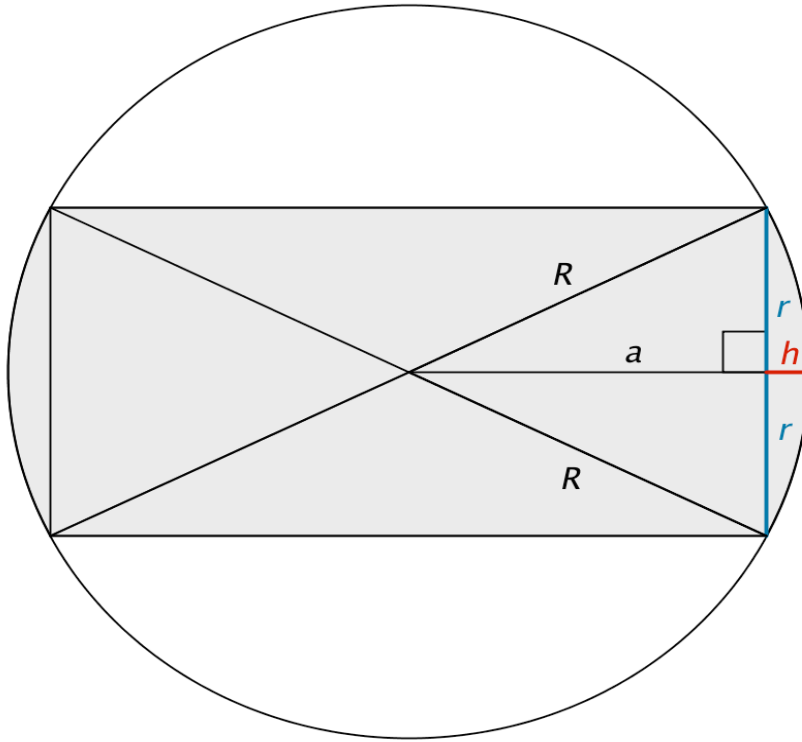
$$\left| \begin{array}{l} m = 2,95 \text{ g} = 0,00295 \text{ kg} \\ \rho = 520 \text{ kg/m}^3 \end{array} \right.$$

$$= \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 0,00295}{4\pi \cdot 520}}$$

$$= 0,01106... \text{ (m)}$$

Pallon säde on $0,01106... \text{ m} = 1,106... \text{ cm} = 11,06... \text{ mm}$.

Pallon läpi porattavan reiän säde on $\frac{4,5 \text{ mm}}{2} = 2,25 \text{ mm}$.



Pois porattava osa koostuu suorasta ympyrälieriöstä ja kahdesta pallosegmentistä. Kuvan merkinnöillä lieriön pohjan säde $r = 2,25 \text{ mm}$ ja korkeus $2a$. Pallosegmentin korkeus on h ja pallon säde on $R = 11,06... \text{ mm}$.

Suorakulmaisen kolmion avulla saadaan laskettua kateetti a .

$$R^2 = a^2 + r^2$$

$$a^2 = R^2 - r^2$$

$$a = (\pm)\sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{(11,06...)^2 - 2,25^2} = 10,83... \text{ (mm)}$$

Tästä saadaan laskettua h .

$$h = R - a = 11,06... - 10,83... = 0,231... \text{ (mm)}$$

Lasketaan pois poratun osan tilavuus.

$$\begin{aligned}
V &= V_{\text{lieriö}} + 2 \cdot V_{\text{pallosegmentti}} \\
&= \pi r^2 \cdot 2a + 2 \cdot \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right) \\
&= \pi \cdot 2,25^2 \cdot 2 \cdot 10,83... + 2 \cdot \pi \cdot (0,231...) ^2 \left(11,06... - \frac{0,231...}{3} \right) \\
&= 348,26... \text{ (mm}^3\text{)}
\end{aligned}$$

Lasketaan pois poratun osan massa.

$$m = \rho V \quad \left| \begin{array}{l} \rho = 520 \text{ kg/m}^3 = 520 \cdot \frac{1000 \text{ g}}{10^9 \text{ mm}^3} \\ \\ = 520 \cdot \frac{\text{g}}{10^6 \text{ mm}^3} = \frac{520}{10^6} \text{ g/mm}^3 \\ \\ V = 348,26... \text{ mm}^3 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{520}{10^6} \cdot 348,26... \\
&= 0,181... \text{ (g)}
\end{aligned}$$

Pois poratun massan suhde alkuperäiseen pallon massaan:

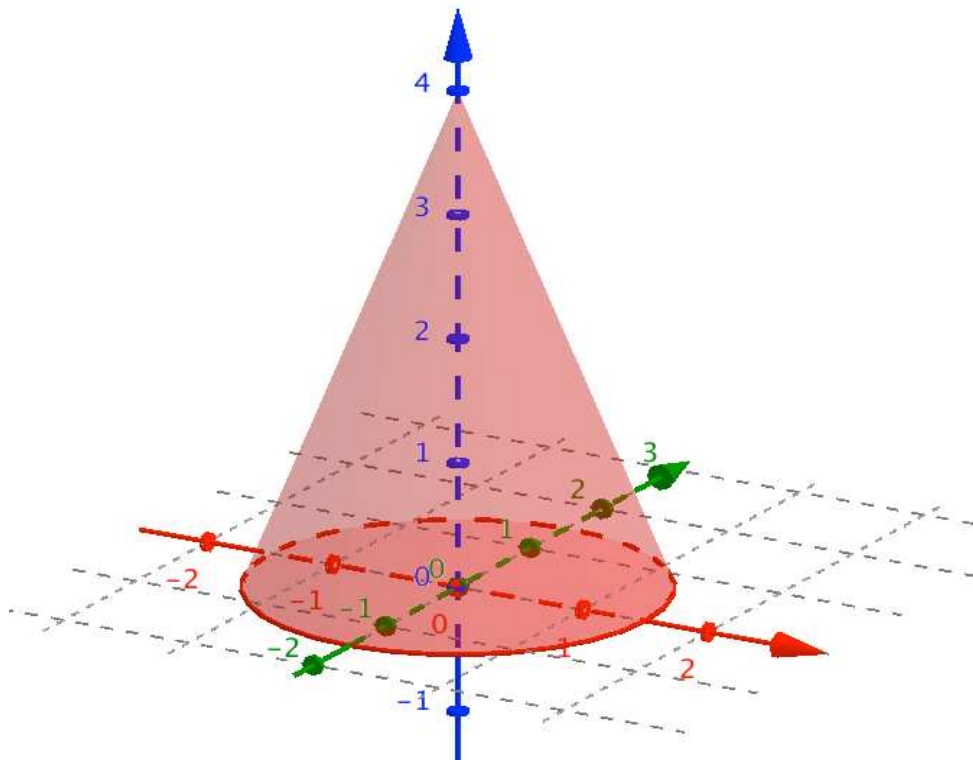
$$\frac{0,181... \text{ g}}{2,95 \text{ g}} = 0,0613... = 6,13... \% \approx 6,1 \%$$

Vastaus Pallon massa pienenee 6,1 %.

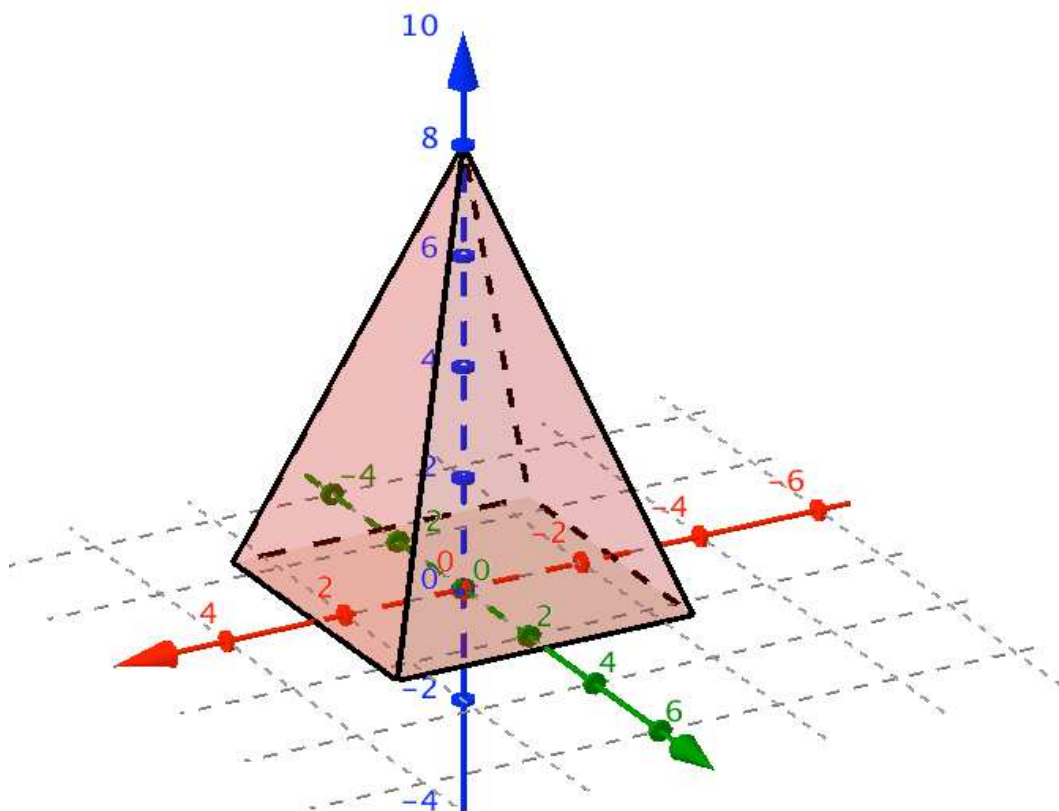
303

Piirrä tarvittaessa ensin sopivat kärkipisteet koordinaattien avulla.

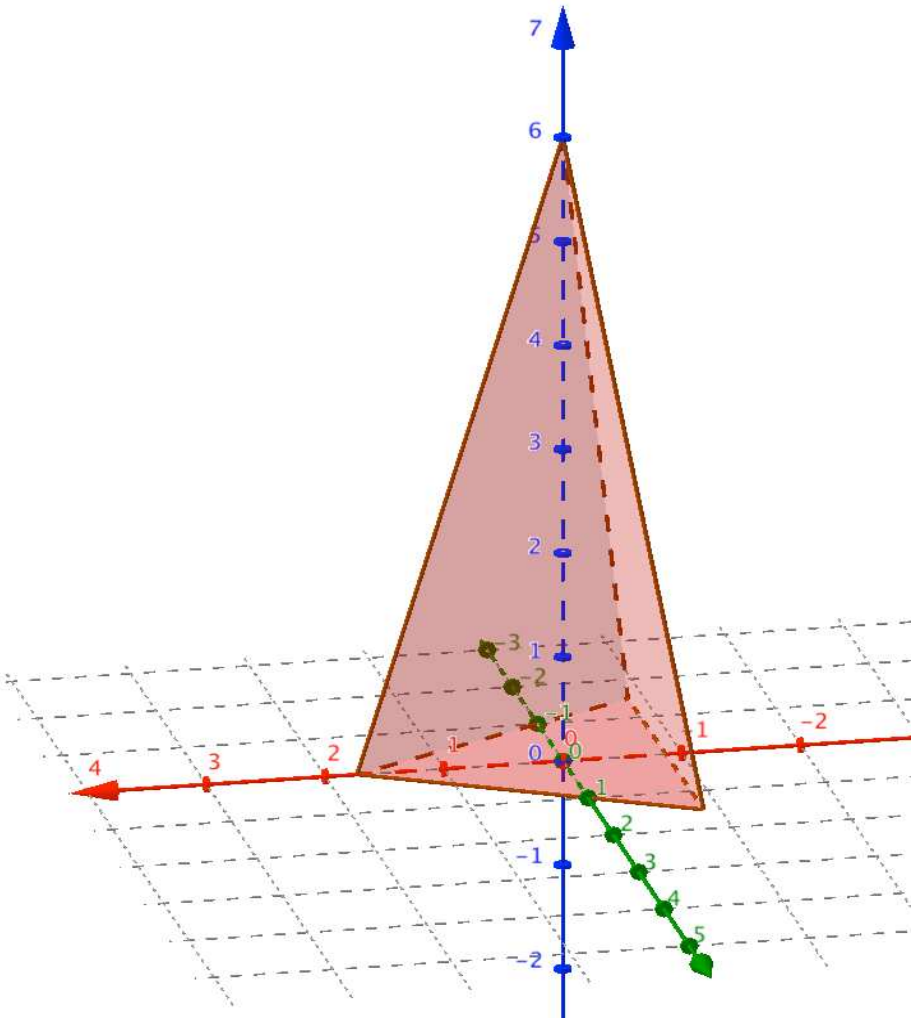
a)



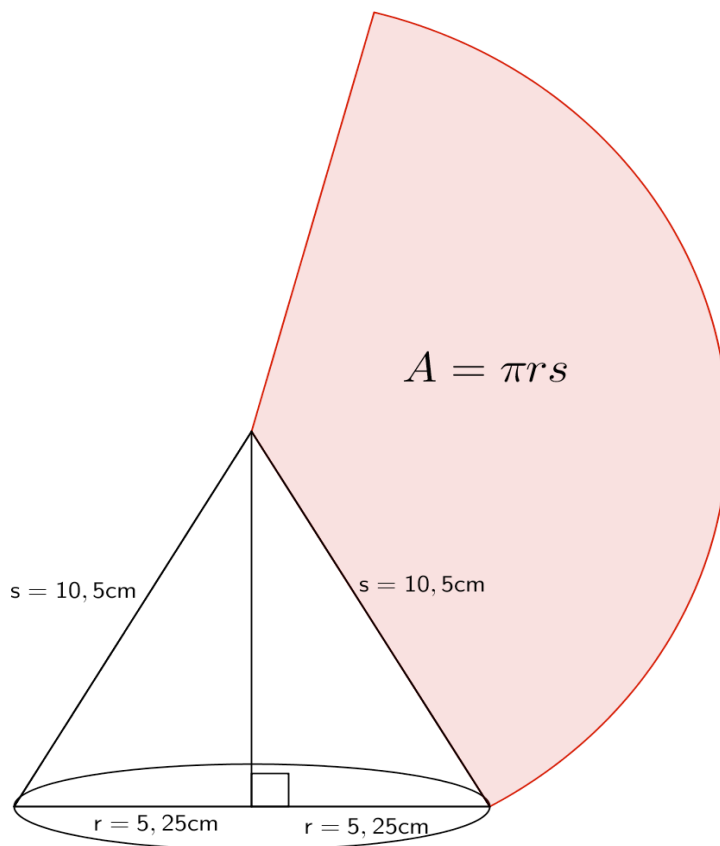
b)



c)



304



Kartion pohjan säde on $r = \frac{10,5\text{ cm}}{2} = 5,25\text{ cm}$.

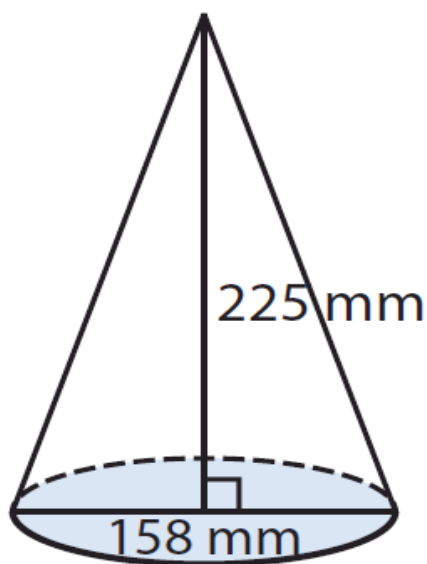
Sivujana on 10,5 cm.

Kartion vaipan pinta-ala on

$$A = \pi r s = \pi \cdot 5,25 \cdot 10,5 = 173,18... \approx 173\text{ (cm}^2\text{)}.$$

Vastaus 173 cm^2

305



Kartion pohjan säde on $r = \frac{158 \text{ mm}}{2} = 79 \text{ mm} = 7,9 \text{ cm} = 0,79 \text{ dm}$.

Kartion korkeus on $h = 225 \text{ mm} = 22,5 \text{ cm} = 2,25 \text{ dm}$.

Kartion tilavuus on

$$V = \frac{1}{3} A_p h$$

$$= \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 0,79^2 \cdot 2,25$$

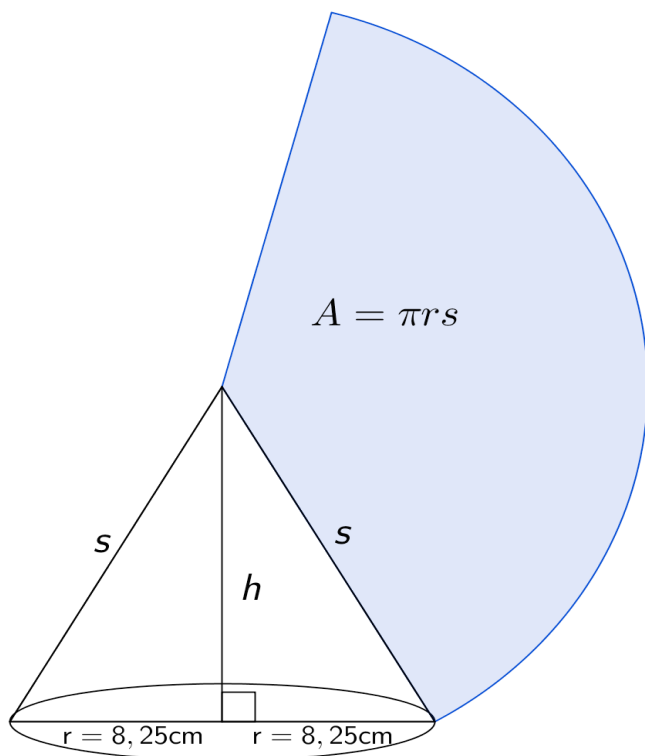
$$= 1,470\dots$$

$$\approx 1,47 \text{ (dm}^3\text{)}$$

Tilavuus on $1,47 \text{ dm}^3 = 1,47 \text{ L}$.

Vastaus 1,47 L

306



a) Kartion tilavuus on $V = 5,45 \text{ L} = 5,45 \text{ dm}^3$.

$$\text{Toisaalta } V = \frac{1}{3} A_p h = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h.$$

Muodostetaan yhtälö.

$$V = 5,45$$

$$\frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h = 5,45$$

$$h = \frac{3 \cdot 5,45}{\pi r^2} \quad \left| r = 8,25 \text{ cm} = 0,825 \text{ dm} \right.$$

$$= \frac{3 \cdot 5,45}{\pi \cdot 0,825^2} = 7,646... \text{ (dm)}$$

Kartion korkeus on $7,646... \text{ dm} = 76,46... \text{ cm} \approx 76,5 \text{ cm}$.

b) Lasketaan Pythagoraan lauseen avulla kartion sivujanan pituus s .

$$\begin{aligned}s^2 &= h^2 + r^2 \\&= (76,46\dots)^2 + 8,25^2 \\&= 5914,88\dots \text{ (cm}^2\text{)} \\s &= (\pm)\sqrt{5914,88\dots} = 76,908\dots \text{ (cm)}\end{aligned}$$

Kartion vaipan pinta-ala on

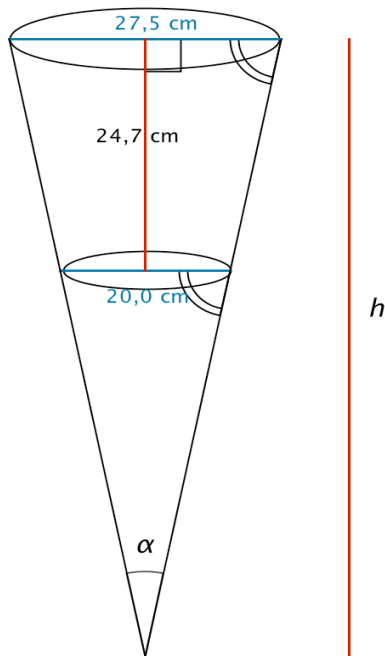
$$\begin{aligned}A_v &= \pi r s \\&= \pi \cdot 8,25 \cdot 76,908\dots \\&= 1993,31\dots \\&\approx 1990 \text{ (cm}^2\text{)}\end{aligned}$$

Vaipan pinta-ala on 1990 cm^2 .

Vastaus a) $76,5 \text{ cm}$ b) 1990 cm^2

307

Täydennetään katkaistu ympyräkartio kokonaiseksi kartioksi.



Poikkileikkauksen pieni ja iso tasakylkinen kolmio ovat yhdenmuotoiset (kk, molemmissa kulma α on yhteinen ja samankohlaiset kulmat ovat yhtä suuret). Muodostetaan yhtälö vastinjanojen suhteiden avulla ja lasketaan kokonaisen kartion korkeus h .

$$\frac{h}{h - 24,7} = \frac{27,5}{20,0}$$

$$20,0 \cdot h = 27,5 \cdot (h - 24,7)$$

$$20,0 \cdot h = 27,5 \cdot h - 27,5 \cdot 24,7$$

$$27,5 \cdot h - 20,0 \cdot h = 27,5 \cdot 24,7$$

$$(27,5 - 20,0) \cdot h = 27,5 \cdot 24,7$$

$$h = \frac{27,5 \cdot 24,7}{27,5 - 20,0} = 90,566... \text{ (cm)}$$

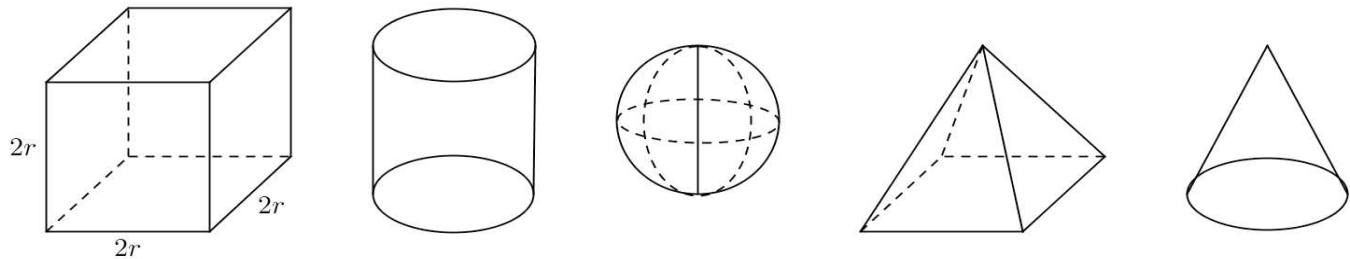
Katkaistun kartion tilavuus saadaan vähentämällä koko kartion tilavuudesta katkaistun kärkiosan tilavuus.

$$\begin{aligned} V &= V_{koko} - V_{kärki} \\ &= \frac{1}{3} A_{ylä} h - \frac{1}{3} A_{ala} \cdot (h - 24,7) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{27,5}{2} \right)^2 \cdot 90,566... - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{20,0}{2} \right)^2 \cdot (90,566... - 24,7) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 13,75^2 \cdot 90,566... - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 10,0^2 \cdot 65,866... \\ &= 11033,37... \text{ (cm}^3\text{)} \end{aligned}$$

Ämpärin tilavuus on $11033,37... \text{ cm}^3 = 11,03337 \text{ dm}^3 \approx 11,0 \text{ L}$.

Vastaus 11,0 L

308



Olkoon kuution muotoisen pakkauslaatikon särmä $2r$.

- Umpinaisen kuution särmä on $2r$.
- Suoran ympyrälieriön korkeus on $2r$ ja pohjan halkaisija $2r$.
- Pallon halkaisija on $2r$.
- Säännöllisen nelisivuisen pyramidin korkeus on $2r$ ja pohjana on neliö, jonka sivun pituus on $2r$.
- Suoran ympyräkartion pohjan halkaisija on $2r$ ja korkeus $2r$.

Kappaleiden massat (painot) suhtautuvat kuten niiden tilavuudet, koska umpinaiset kappaleet on valmistettu samasta materiaalista.

- Kuutio on suurin, pakkauslaatikko ei jää yhtään tyhjää tilaa.
- Suora ympyrälieriö mahtuu kuution sisään.
- Pallo mahtuu suoran ympyrälieriön sisään.
- Suora ympyräkartio mahtuu pyramidin sisään.

Verrataan pallon ja pyramidin tilavuuksien lausekkeita.

Pallon tilavuus on $V_{\text{pallo}} = \frac{4}{3} \pi r^3$.

Pyramidin tilavuus on $V_{\text{pyramidi}} = \frac{1}{3} \cdot (2r)^2 \cdot 2r = \frac{8}{3} r^3 = \frac{4}{3} \cdot 2 \cdot r^3$.

Koska $\pi > 2$, niin

$$V_{\text{pallo}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 > \frac{4}{3} \cdot 2 \cdot r^3 = V_{\text{pyramidi}},$$

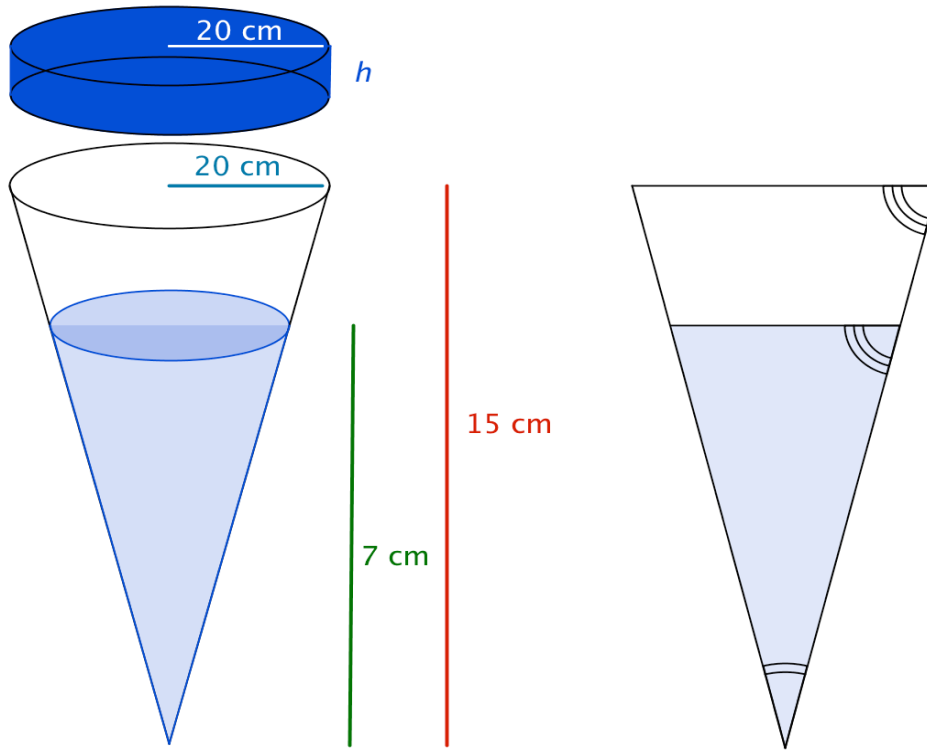
joten pyramidi on tilavuudeltaan palloa pienempi.

Kappaleiden massat pienimmästä suurimpaan ovat:

1. suora ympyräkartio
2. säännöllinen nelisivuinen pyramidi
3. pallo
4. suora ympyrälieriö
5. kuutio

Vastaus suora ympyräkartio, säännöllinen nelisivuinen
pyramidi, pallo, suora ympyrälieriö, kuutio

309



Sadevesimittariin päätyy suoran ympyrälieriön muotoinen vesipatsas, joka täyttää kärjellään seisovaan kartioon 7 cm korkean kartion muotoisen vesikerroksen.

Kysytty sademäärä on suoran ympyrälieriön korkeus h .

Suoran ympyrälieriön tilavuus on $V_{\text{lieriö}} = A_p h = \pi \cdot 20^2 \cdot h$.

Pystysuorassa seisova kartio ja sen sisällä oleva kartion mallinen vesikerros ovat yhdenmuotoisia (kaikki poikkileikkaukset ovat tasakylkisiä kolmioita, joilla on yhteinen kulma kartion kärjessä ja samankohtaiset kulmat kartion sivujanan ja pohjaympyrän halkaisijan välillä ovat yhtä suuret).

Kartion vesiosan ja koko tilavuuden suhde on mittakaavan kuutio.

$$\frac{V_{\text{vesi}}}{V_{\text{kartio}}} = \left(\frac{7}{15}\right)^3 \quad \Bigg| \quad V_{\text{vesi}} = V_{\text{lieriö}}$$

$$\frac{V_{\text{lieriö}}}{V_{\text{kartio}}} = \left(\frac{7}{15}\right)^3 \quad \Bigg| \quad \begin{aligned} V_{\text{lieriö}} &= \pi \cdot 20^2 \cdot h \\ V_{\text{kartio}} &= \frac{1}{3} \pi \cdot 20^2 \cdot 15 \end{aligned}$$

$$\frac{\cancel{\pi} \cdot \cancel{20^2} \cdot h}{\frac{1}{3} \cancel{\pi} \cdot \cancel{20^2} \cdot 15} = \left(\frac{7}{15}\right)^3$$

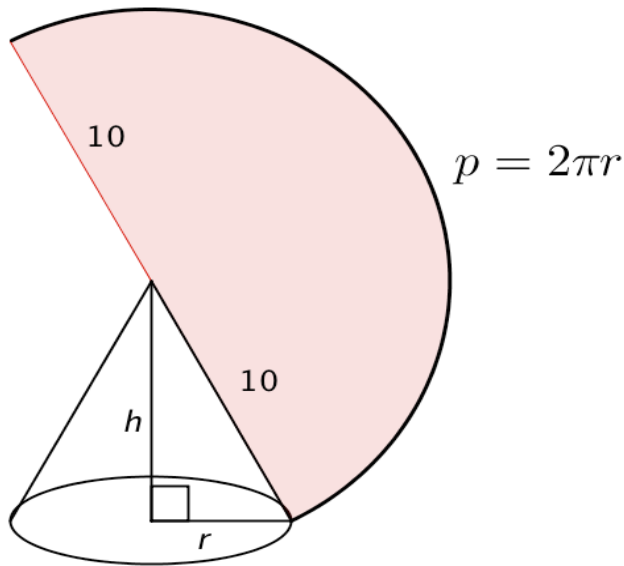
$$\frac{h}{5} = \left(\frac{7}{15}\right)^3$$

$$h = 5 \cdot \left(\frac{7}{15}\right)^3 = 0,508... \text{ (cm)}$$

Sademäärä oli $0,508... \text{ cm} = 5,08... \text{ mm} \approx 5 \text{ mm}$.

Vastaus 5 mm

310



Kysessä on suora ympyräkartio.

Kartion tilavuuden laskemiseksi on selvittävä kartion korkeus ja pohjaympyrän säde.

Vaippana olevan puoliympyrän kaaren pituus on yhtä suuri kuin kartion pohjaympyrän piiri. Muodostetaan yhtälö.

$$2\pi r = \frac{180^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 10 \quad \quad \quad | : 2\pi$$

$$r = \frac{1}{2} \cdot 10$$

$$r = 5$$

Lasketaan kartion korkeus h Pythagoraan lauseen avulla.

$$10^2 = r^2 + h^2$$

$$h^2 = 10^2 - r^2 \quad \Big| \quad r = 5$$

$$= 10^2 - 5^2$$

$$= 75$$

$$h = (\pm)\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = 5\sqrt{3}$$

Lasketaan kartion tilavuus.

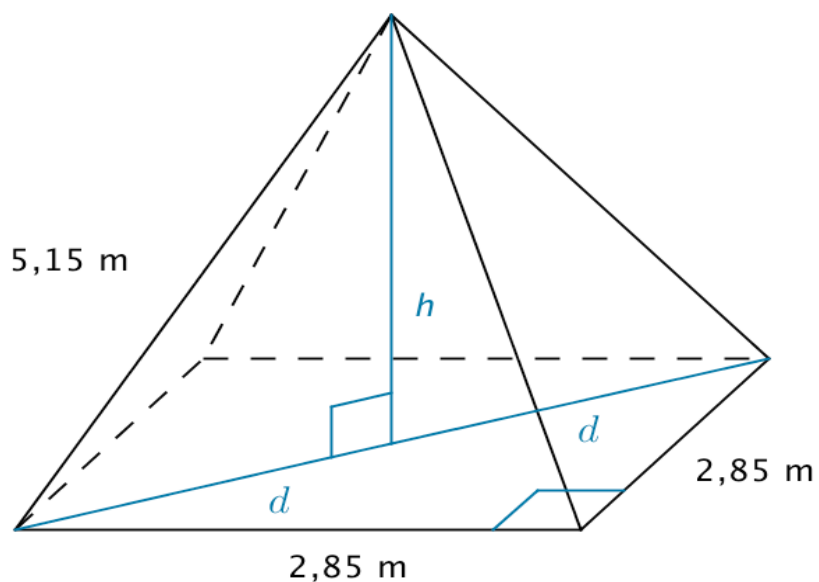
$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 5\sqrt{3}$$

$$= \frac{125\sqrt{3}}{3} \pi$$

Vastaus $\frac{125\sqrt{3}}{3} \pi$

311



Lasketaan pohjan lävistäjän puolikkaan pituus d .

$$(2d)^2 = 2,85^2 + 2,85^2$$

$$4d^2 = 2 \cdot 2,85^2$$

$$d = (\pm)\sqrt{\frac{2 \cdot 2,85^2}{4}} = 2,015... \text{ (m)}$$

Lasketaan pyramidin korkeus suorakulmaisesta kolmiosta.

$$5,15^2 = d^2 + h^2$$

$$\begin{aligned} h &= (\pm)\sqrt{5,15^2 - d^2} \\ &= \sqrt{5,15^2 - (2,015...)^2} \\ &= 4,739... \text{ (m)} \end{aligned}$$

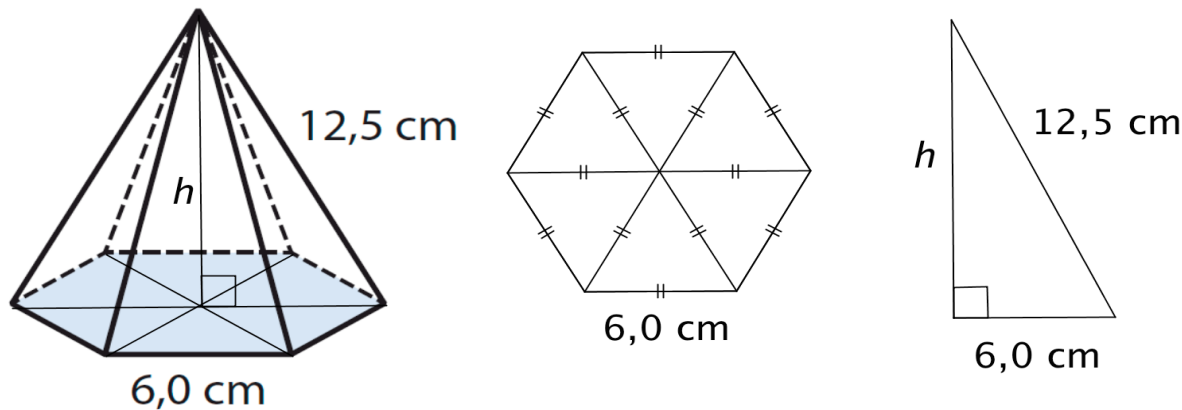
Lasketaan pyramidin tilavuus.

$$V = \frac{1}{3} A_p \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 2,85^2 \cdot 4,739... = 12,831... \approx 12,8 \text{ (m}^3\text{)}$$

Pyramidin tilavuus on 12,8 m³.

Vastaus 12,8 m³

312



Lasipyramidin pohja on säännöllinen kuusikulmio. Kun pohja jaetaan kuuteen kolmioon, muodostuu kuusi tasasivuista kolmiota, joiden kaikki sivut ovat pituudeltaan 6,0 cm ja kulmat 60° .

Lasketaan pyramidin korkeus Pythagoraan lauseen avulla.

$$12,5^2 = 6,0^2 + h^2$$

$$h^2 = 12,5^2 - 6,0^2$$

$$h = (\pm)\sqrt{12,5^2 - 6,0^2}$$

$$= 10,965... \text{ (cm)}$$

Lasketaan pyramidin pohjan ala.

$$A_p = 6 \cdot A_{\text{kolmio}} = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6,0 \cdot 6,0 \cdot \sin 60^\circ = 93,530... \text{ (cm}^2\text{)}$$

Lasketaan pyramidin tilavuus.

$$V = \frac{1}{3} A_p h = \frac{1}{3} \cdot 93,530... \cdot 10,965... = 341,881... \text{ (cm}^3\text{)}$$

Kun pyramidi täytetään korkeuden puoliväliin, täyttämättä jää alkuperäisen pyramidin kanssa yhdenmuotoinen pyramidi, jonka korkeus on puolet alkuperäisen pyramidin korkeudesta.

Yhdenmuotoisten kappaleiden tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio. Muodostetaan yhtälö.

$$\frac{V_{tyhjä}}{V_{pyramidi}} = \left(\frac{\frac{1}{2}h}{h} \right)^3$$

$$V_{tyhjä} = \frac{1}{2^3} \cdot V_{pyramidi} = \frac{1}{8} V_{pyramidi}$$

Hiekkaa tarvitaan

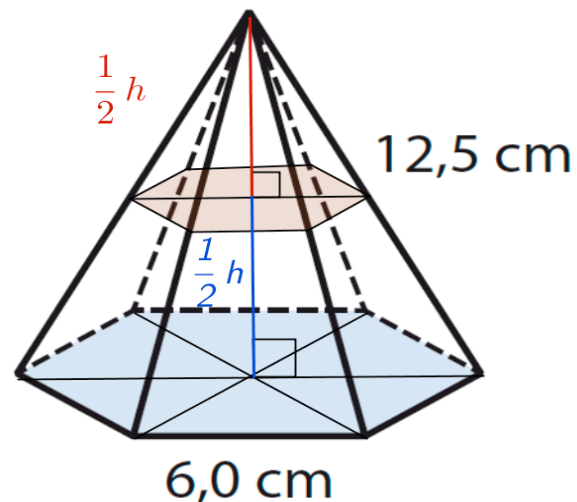
$$V_{pyramidi} - V_{tyhjä} = V_{pyramidi} - \frac{1}{8} V_{pyramidi}$$

$$= \frac{7}{8} V_{pyramidi}$$

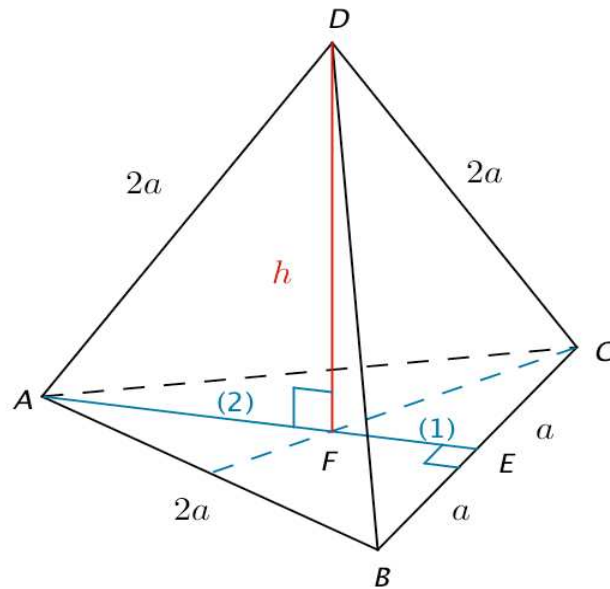
$$= \frac{7}{8} \cdot 341,881...$$

$$= 299,146... \approx 300 \text{ (cm}^3\text{)}$$

Vastaus 300 cm^3 (= 0,30 L)



313



Merkitään säännöllisen tetraedrin sivusärmän pituutta $2a$:lla.

Tetraedrin korkeus on huipun ja pohjakolmion painopisteen välinen etäisyys $|DF|$.

Lasketaan ensin pohjakolmion mediaanin pituus $|AE|$ suorakulmaisesta kolmiosta ABE . Pohjakolmio on tasasivuinen kolmio, joten mediaani on samalla pohjakolmion korkeusjana ja kolmio ABE suorakulmainen.

$$(2a)^2 = a^2 + |AE|^2$$

$$|AE|^2 = 4a^2 - a^2$$

$$|AE| = (\pm)\sqrt{3a^2} = \sqrt{3}|a| = \sqrt{3}a$$

Tetraedrin korkeus saadaan suorakulmaisesta kolmiosta AFD .

$$(2a)^2 = |AF|^2 + |DF|^2 \quad \left| \begin{array}{l} |DF|^2 = h^2 \\ |AF|^2 = \left(\frac{2}{3}|AE|\right)^2 = \frac{4}{9} \cdot (\sqrt{3}a)^2 \\ = \frac{4 \cdot 3}{9} \cdot a^2 = \frac{4}{3}a^2 \end{array} \right.$$

$$4a^2 = \frac{4}{3}a^2 + h^2$$

$$h^2 = 4a^2 - \frac{4}{3}a^2 = \frac{8}{3}a^2$$

$$h = \sqrt{\frac{8}{3}a^2} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}a = \frac{2\sqrt{2}}{3}a$$

Tetraedrin tilavuus on $1,20 \text{ L} = 1,20 \text{ dm}^3$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan a .

$$V = \frac{1}{3}A_p h \quad \left| \begin{array}{l} V = 1,20 \text{ dm}^3, \quad h = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a \\ A_p = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a \cdot \sin 60^\circ \end{array} \right.$$

$$1,20 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a \cdot \sin 60^\circ \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a \quad \text{Yhtälön voi ratkaista laskimella}$$

$$1,20 = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2\sqrt{2}}{6\sqrt{3}} \cdot \sin 60^\circ \cdot a^3 \quad \left| \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \right.$$

$$1,20 = \frac{\cancel{2} \cdot 2\sqrt{2}}{3\sqrt{\cancel{3}}} \cdot \frac{\sqrt{\cancel{3}}}{\cancel{2}} \cdot a^3$$

$$a^3 = \frac{1,20 \cdot 3}{2\sqrt{2}}$$

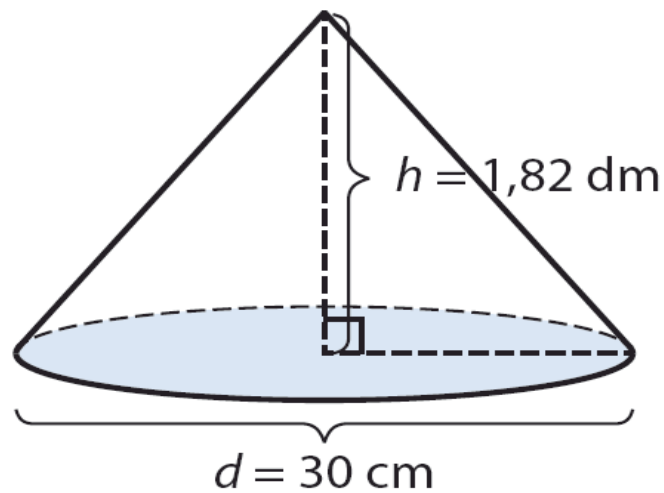
$$a = \sqrt[3]{\frac{1,20 \cdot 3}{2\sqrt{2}}} = 1,0837... \text{ (dm)}$$

Tetraedrin särmä on

$$2a = 2 \cdot 1,0837... \text{ dm} = 2,1674... \text{ dm} \approx 21,7 \text{ cm} .$$

Vastaus 21,7 cm

314



$$V = \frac{1}{3} A_p h$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h$$

$$\left| \begin{array}{l} r = \frac{30 \text{ cm}}{2} = 15 \text{ cm} = 1,5 \text{ dm} \\ h = 1,82 \text{ dm} \end{array} \right.$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1,5^2 \cdot 1,82$$

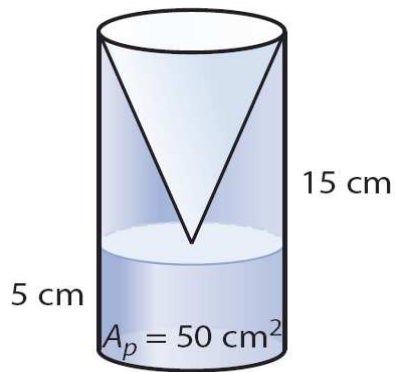
$$= 4,28\dots$$

$$\approx 4,3 \text{ (dm}^3\text{)}$$

Tilavuus on $4,3 \text{ dm}^3 = 4,3 \text{ L}$.

Vastaus 4,3 L

315



Lasketaan maljakon lasiosan tilavuus.

$$V_{\text{lasi}} = V_{\text{lieriö}} - V_{\text{kartio}}$$

$$= A_p h_{\text{lieriö}} - \frac{1}{3} A_p h_{\text{kartio}} \quad \left| \begin{array}{l} h_{\text{lieriö}} = 15 \text{ cm} \\ h_{\text{kartio}} = 15 \text{ cm} - 5 \text{ cm} = 10 \text{ cm} \end{array} \right.$$

$$= 50 \cdot 15 - \frac{1}{3} \cdot 50 \cdot 10 = 583,333... \text{ (cm}^3\text{)}$$

Lasketaan maljakon massa.

$$m = \rho V \quad \left| \rho = 2250 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 2250 \cdot \frac{1000 \text{ g}}{100^3 \text{ cm}^3} = 2,250 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \right.$$

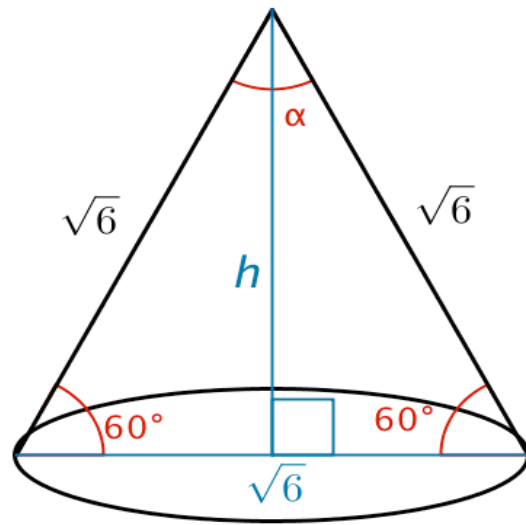
$$= 2,250 \cdot 583,333...$$

$$= 1312,5... \text{ (g)}$$

Maljakon massa on $1312,5... \text{ g} \approx 1,3 \text{ kg}$.

Vastaus 1,3 kg

316



Pohjan ja sivujanan välinen kulma on 60° , joten myös huippukulman α on oltava 60° ($\alpha = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$).

Kartion poikkileikkaus on tasasivuinen kolmio, joten pohjan halkaisija on yhtä pitkä kuin sivujana eli $\sqrt{6}$.

Kartion korkeus saadaan Pythagoraan lauseen avulla.

$$\sqrt{6}^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + h^2$$

$$h^2 = \sqrt{6}^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 = 6 - \frac{6}{4} = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$$

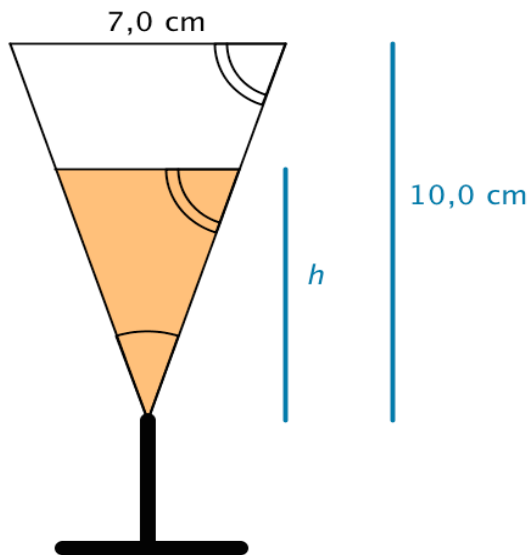
$$h = (\pm)\sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Kartion tilavuus:

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{1}{3} A_p h \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{2} \right)^2 \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} \\
 &= \frac{1}{\cancel{\beta}} \cdot \pi \cdot \frac{\overset{3}{\cancel{6}}}{\underset{2}{\cancel{4}}} \cdot \frac{\cancel{\beta}}{\sqrt{2}} \\
 &= \overset{\sqrt{2})}{=} \frac{3\pi}{2\sqrt{2}} \\
 &= \frac{3\sqrt{2}\pi}{4}
 \end{aligned}$$

Vastaus Kartion tilavuus on $\frac{3\sqrt{2}\pi}{4}$.

317



Kuhunkin lasiin tulee mehua $V_{\text{mehu}} = \frac{7,5 \text{ dl}}{9} = 0,8333... \text{ dl}$.

Lasin yläosan säde on $r = \frac{7,0 \text{ cm}}{2} = 3,5 \text{ cm}$.

Lasin poikkileikkauskuviossa on kaksi yhdenmuotoista tasakylkistä kolmiota (kk, huippukulma yhteinen, samankohtaiset kulmat yhtä suuret).

Yhdenmuotoisten kappaleiden tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio. Muodostetaan yhtälö.

$$\frac{V_{mehu}}{V_{lasi}} = \left(\frac{h}{10,0} \right)^3$$

$$h^3 = 10,0^3 \cdot \frac{V_{mehu}}{V_{lasi}}$$

$$\begin{aligned} V_{mehu} &= 0,8333... \text{ dl} \\ &= 83,33... \text{ ml} = 83,33... \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

$$V_{lasi} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3,5^2 \cdot 10,0 \text{ cm}^3$$

$$= 1000 \cdot \frac{83,33...}{\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3,5^2 \cdot 10,0}$$

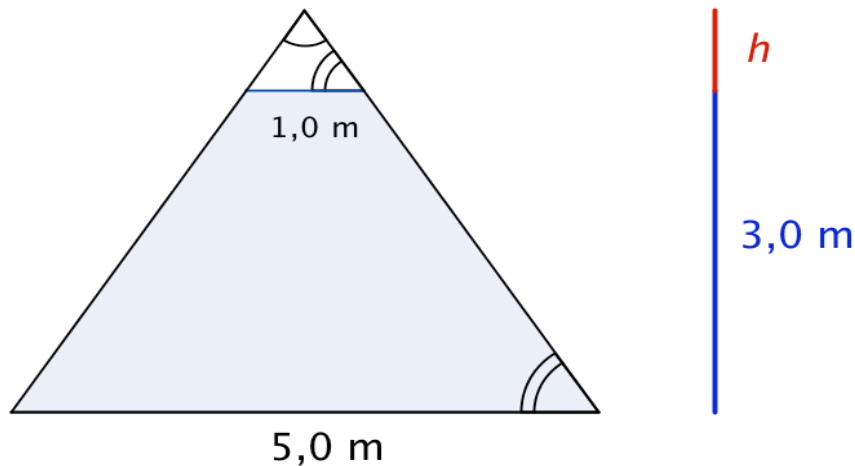
$$= 649,61... (\text{cm}^3)$$

$$h = \sqrt[3]{649,61...} = 8,66... = 8,7 \text{ (cm)}$$

Mehun pinta nousee laseissa 8,7 cm korkeuteen.

Vastaus 8,7 cm

318



Täydennetään säännölliseen nelisivuiseen pyramidiin puuttuva huippu. Piirretään pyramidin poikkileikkaus. Syntyvät kaksi tasakylkistä kolmiota ovat yhdenmuotoiset (kk, huippukulma on yhteinen ja samankohtaiset kulmat yhtä suuret).

Vastinjanojen pituuksien suhde on vakio. Muodostetaan yhtälö.

$$\frac{h}{h+3,0} = \frac{1,0}{5,0}$$

$$5,0 \cdot h = 1,0 \cdot (h + 3,0)$$

$$5,0 \cdot h = h + 3,0$$

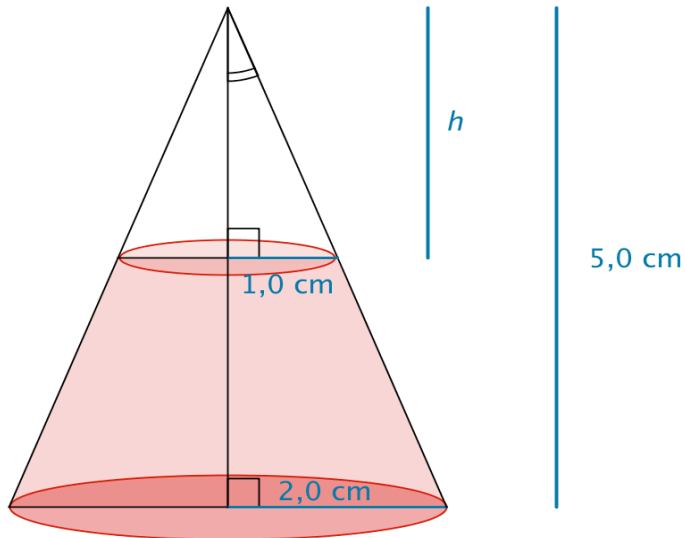
$$4,0 \cdot h = 3,0$$

$$h = \frac{3,0}{4,0} = 0,75 \text{ (m)}$$

Pyramidin lopullinen korkeus on $3,0 \text{ m} + 0,75 \text{ m} = 3,75 \text{ m} \approx 3,8 \text{ m}$.

Vastaus 3,8 m

319



Piirretään alkuperäinen suora ympyräkartio ja sille korkeusjana sekä katkaisukohta. Tutkitaan kartion poikkileikkauskuviota.

Alkuperäinen kartio ja pois katkaistu osa ovat yhdenmuotoisia, joten leikkauskuvion kaksi suorakulmaista kolmiota ovat yhdenmuotoiset (kk, huippukulman puolikas on yhteinen ja molemmissa suora kulma).

Lasketaan pois katkaistun osan korkeus.

Vastinjanojen pituuksien suhde on vakio.

$$\frac{h}{5,0} = \frac{1,0}{2,0}$$

$$h = \frac{5,0 \cdot 1,0}{2,0} = 2,5 \text{ (cm)}$$

- a) Katkaistun kartion tilavuus V_k saadaan vähentämällä alkuperäisen kartion tilavuudesta V_1 pois katkaistun huipun tilavuus V_2 .

$$\begin{aligned} V_k &= V_1 - V_2 \\ &= \frac{1}{3}\pi \cdot 2,0^2 \cdot 5,0 - \frac{1}{3}\pi \cdot 1,0^2 \cdot 2,5 \\ &= 18,325... \\ &\approx 18 \text{ (cm}^3\text{)} \end{aligned}$$

- b) Katkaistun kartion vaipan pinta-ala A_k saadaan vähentämällä alkuperäisen kartion vaipan pinta-alasta A_1 pois katkaistun osan vaipan pinta-ala A_2 .

Lasketaan ensin alkuperäisen kartion sivujana s_1 ja pois katkaistun kartion sivujana s_2 .

$$s_1^2 = 2,0^2 + 5,0^2 = 29,0$$

$$s_1 = (\pm)\sqrt{29,0}$$

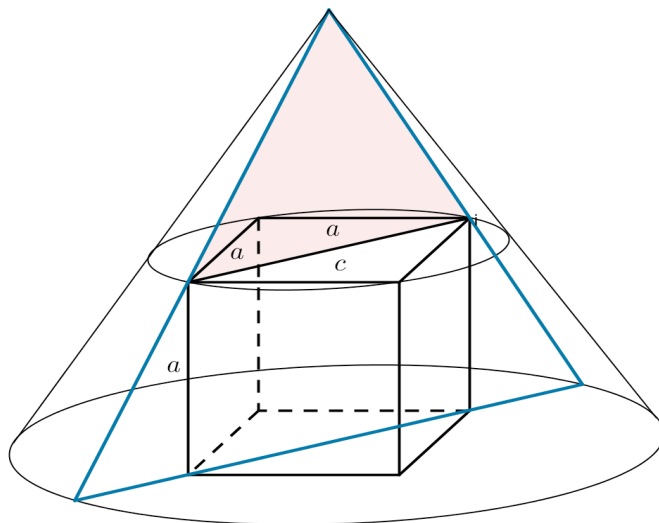
$$s_2^2 = 1,0^2 + 2,5^2 = 7,25$$

$$s_2 = (\pm)\sqrt{7,25}$$

$$\begin{aligned}
A_k &= A_1 - A_2 \\
&= \pi r_1 s_1 - \pi r_2 s_2 \\
&= \pi \cdot 2,0 \cdot \sqrt{29,0} - \pi \cdot 1,0 \cdot \sqrt{7,25} \\
&= 25,376... \\
&\approx 25 \text{ (cm}^2\text{)}
\end{aligned}$$

Vastaus a) 18 cm^2 b) 25 cm^2

320

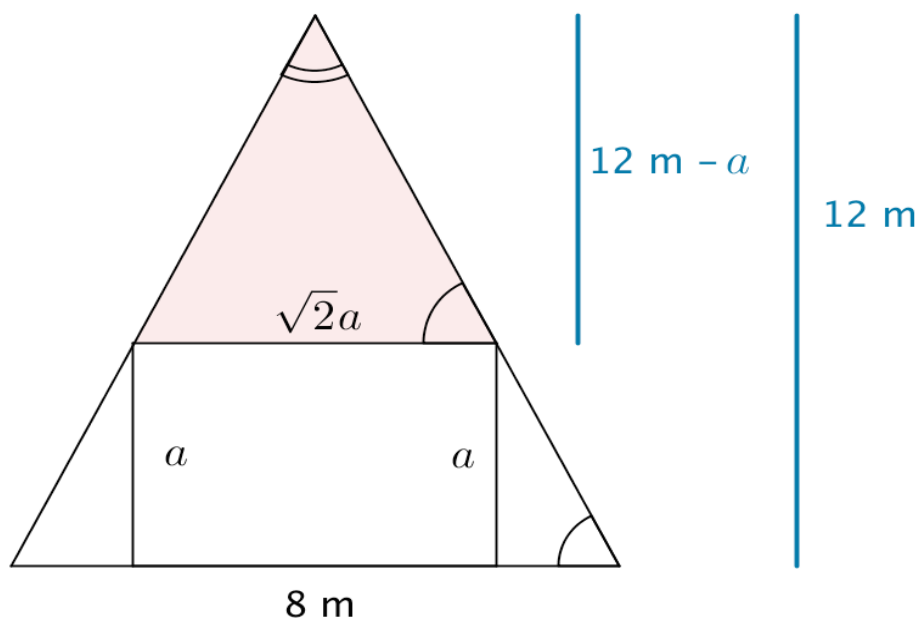


Piirretään tilanteesta poikkileikkauskuva tasossa, joka kulkee pitkin kuution ylä- ja alatahkojen lävistäjiä. Kuution ylätahkon kärjet ovat kartion vaipalla. Merkitään kuution särmää kirjaimella a .

Tahkon lävistäjän pituus on $\sqrt{2}a$:

$$c^2 = a^2 + a^2$$

$$c = (\pm)\sqrt{2a^2} = \sqrt{2}a$$



Poikkileikkauskuvioon syntyy kaksi tasakylkistä kolmiota, jotka ovat yhdenmuotoiset (kk, huippukulma yhteinen ja samankohtaiset kulmat yhtä suuret).

Vastinjanojen suhde on vakio.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan kuution särmän pituus a .

$$\frac{\sqrt{2}a}{8} = \frac{12-a}{12}$$

$$12 \cdot \sqrt{2}a = 8 \cdot (12 - a)$$

$$12\sqrt{2}a = 8 \cdot 12 - 8a$$

$$12\sqrt{2}a + 8a = 12 \cdot 8$$

$$(12\sqrt{2} + 8)a = 96$$

$$a = \frac{96}{12\sqrt{2} + 8} = 3,844... \text{ (m)}$$

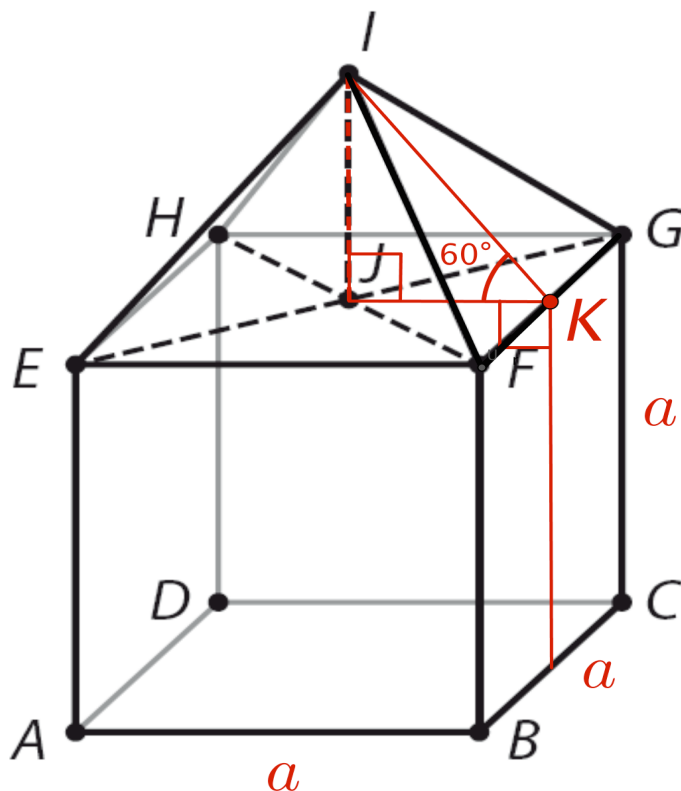
Lasketaan kuution tilavuus.

$$V = a^3 = \left(\frac{96}{12\sqrt{2} + 8} \right)^3 = 56,823... \approx 57 \text{ (m}^3\text{)}$$

Kuution tilavuus on 57 m^3 .

Vastaus 57 m^3

321



Lasketaan kattona olevan säännöllisen neliöpohjaisen pyramidin korkeus suorakulmaisesta kolmiosta KIJ .

$$\sphericalangle IKJ = 150^\circ - 90^\circ = 60^\circ$$

$$\tan 60^\circ = \frac{|IJ|}{|JK|}$$

$$|IJ| = |JK| \tan 60^\circ$$

$$\left| \begin{array}{l} |JK| = \frac{a}{2} \\ \tan 60^\circ = \sqrt{3} \end{array} \right.$$

$$= \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

a) Huoneen korkeus on

$$a + \frac{\sqrt{3}}{2}a = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)a$$

b) Huoneen tilavuus on

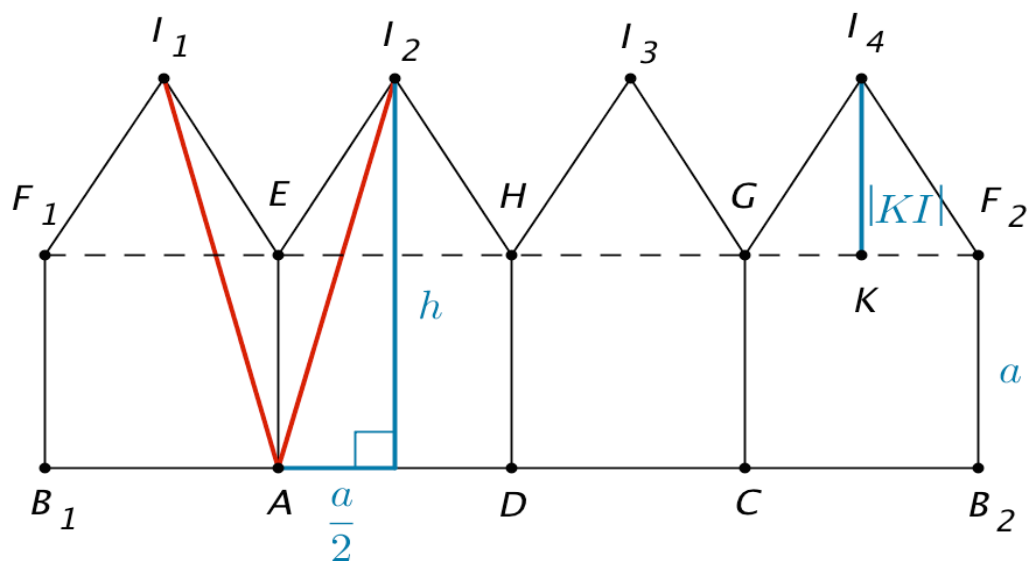
$$V = V_{kuutio} + V_{pyramidi}$$

$$= a^3 + \frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$= a^3 + \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a^3$$

$$= \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)a^3$$

c) Lyhimmän sähköjohdon pituuden selvittämiseksi piirretään huone levitettynä tasoon niin, että seinän sisäpinta näkyy.



Lyhin matka pisteiden A ja I välillä on suora reitti AI_1 tai AI_2 , jotka ovat yhtä pitkiä, mutta kulkevat viereisillä seinillä.

Lasketaan janan AI_2 pituus suorakulmaisesta kolmiosta Pythagoraan lauseen avulla. Tarvittava kattopyramidin tahkon korkeus $|KI|$ saadaan edellisen kuvan kolmiosta KIJ .

$$\cos 60^\circ = \frac{|JK|}{|KI|}$$

$$|KI| = \frac{|JK|}{\cos 60^\circ} \quad \left| \begin{array}{l} |JK| = \frac{a}{2} \\ \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

$$= \frac{\frac{a}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{1} = a$$

$$|AI_2|^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 \quad \left| \begin{array}{l} h = a + |KI| \\ = a + a = 2a \end{array} \right.$$

$$= \frac{a^2}{4} + (2a)^2 = \frac{a^2}{4} + 4a^2$$

$$= \frac{a^2}{4} + \frac{16}{4}a^2 = \frac{17}{4}a^2$$

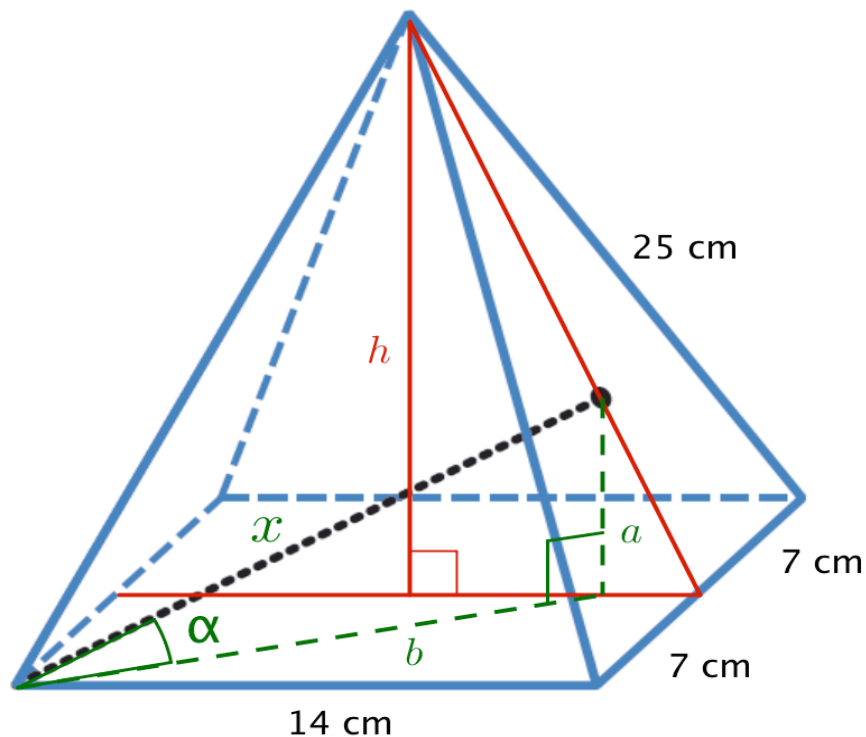
$$|AI_2| = (\pm)\sqrt{\frac{17}{4}a^2} = \frac{\sqrt{17}}{2}a$$

Johdon pituus on $\frac{\sqrt{17}}{2}a$.

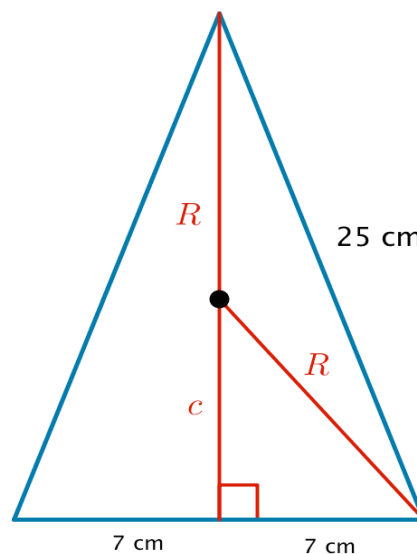
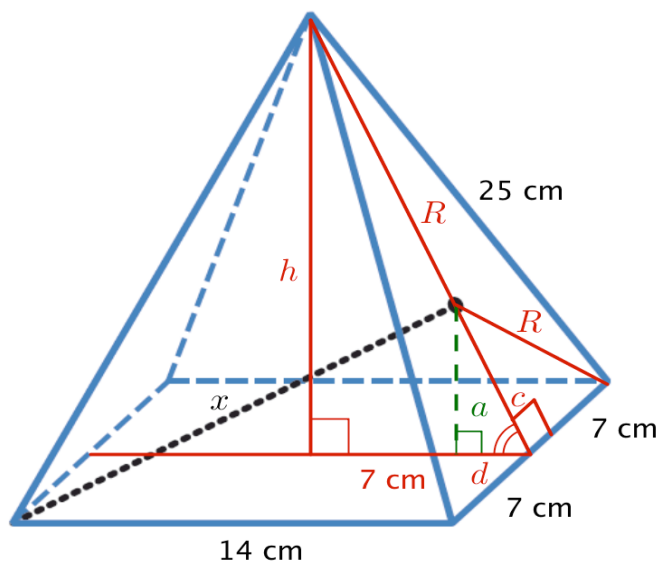
Vastaus

- a) $\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)a$
- b) $\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)a^3$
- c) $\frac{\sqrt{17}}{2}a$

322



Tavoitteena on laskea poratun reiän pituus x sekä reiän ja pohjan välinen kulma α suorakulmaisen kolmion kateettien a ja b avulla. Reiän aloituskohta on kolmion keskipisteessä, joka on yhtä kaukana sivutahkona olevan kolmion kärjistä.



Lasketaan ensin sivutahkon korkeus (kuvan merkinnöillä $R + c$). Tämän avulla saadaan pienen suorakulmaisen kolmion kateetin pituus c . Yhdenmuotoisten kolmioiden avulla saadaan pienen suorakulmaisen kolmion kateetit a ja d .

- Sivutahkon korkeus:

$$25^2 = (R + c)^2 + 7^2$$

$$R + c = \sqrt{25^2 - 7^2} = \sqrt{576} = 24 \text{ (cm)}$$

- Reiän aloituskohdan etäisyys sivutahkon kannasta:

$$R^2 = c^2 + 7^2$$

$$(24 - c)^2 = c^2 + 7^2$$

$$24^2 - 2 \cdot 24 \cdot c + c^2 = c^2 + 7^2$$

$$c = \frac{7^2 - 24^2}{-2 \cdot 24} = \frac{527}{48} \approx 10,97... \text{ (cm)}$$

- Pyramidin korkeus:

$$(R + c)^2 = h^2 + 7^2$$

$$h = \sqrt{(R + c)^2 - 7^2} = \sqrt{24^2 - 7^2} = \sqrt{527} \approx 22,95... \text{ (cm)}$$

- Pyramidin poikkileikkauskuvion suorakulmaiset kolmiot ovat yhdenmuotoiset (kk, molemmissa suora kulma ja terävä kulma yhteinen). Vasinjanojen suhde on vakio. Lasketaan pienen suorakulmaisen kolmion kateetti a .

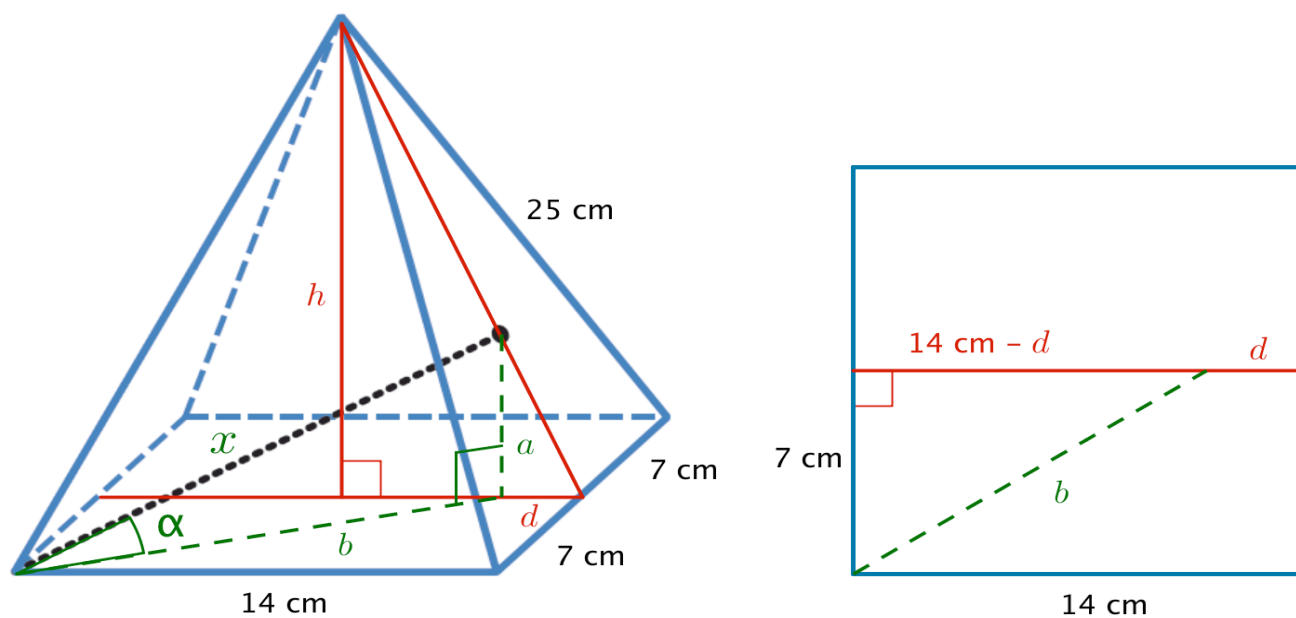
$$\frac{a}{h} = \frac{c}{R+c}$$

$$a = \frac{h \cdot c}{R+c} = \frac{\sqrt{527} \cdot \frac{527}{48}}{24} = 10,501... \text{ (cm)}$$

- Pienen suorakulmaisen kolmion kateetti d pyramidin pohjalla:

$$c^2 = a^2 + d^2$$

$$d = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{\left(\frac{527}{48}\right)^2 - (10,501...)^2} = 3,202... \text{ (cm)}$$



- Pyramidin pohjalla olevan suorakulmaisen kolmion kateetti b :

$$b^2 = 7^2 + (14-d)^2$$

$$b = \sqrt{7^2 + (14-d)^2} = \sqrt{7^2 + (14-3,202...)^2} = 12,868... \text{ (cm)}$$

- Poratun reiän pituus x sekä pohjan ja reiän välinen kulma α .

$$x^2 = a^2 + b^2$$

$$x = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(10,501\dots)^2 + (12,868\dots)^2} = 16,609\dots \approx 17 \text{ (cm)}$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{b}$$

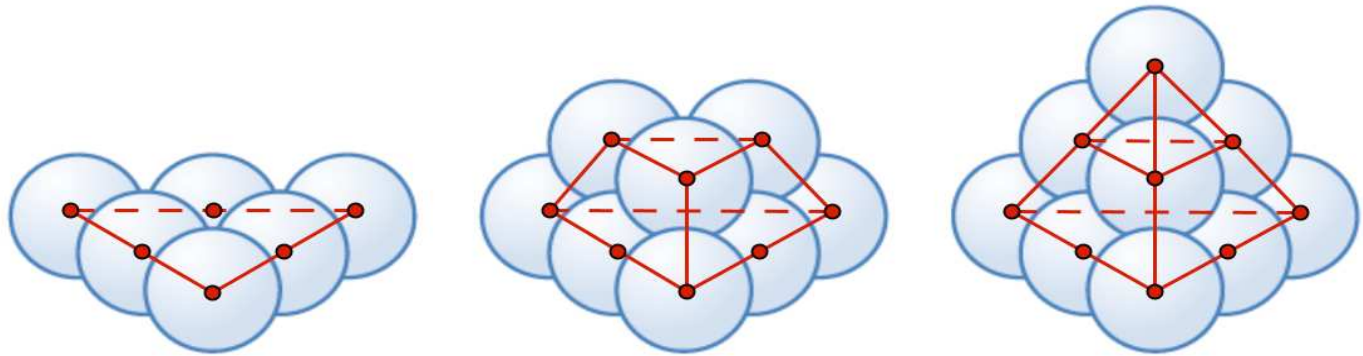
$$\alpha = \tan^{-1} \frac{a}{b} = \tan^{-1} \frac{10,501\dots}{12,868\dots} = 39,21\dots^\circ \approx 39^\circ$$

Poratun reiän pituus on 17 cm.

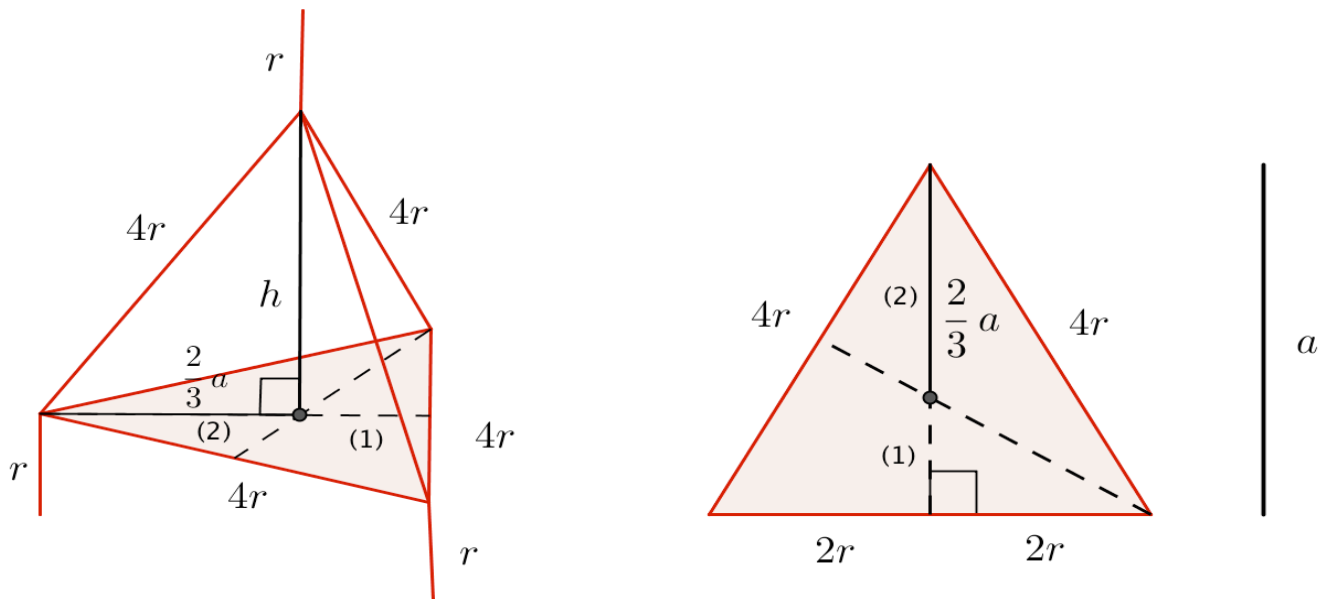
Reiän ja pohjan välinen kulma on 39° .

Vastaus pituus 17 cm, kulma 39°

323



Yhdistetään r -säteisten pallojen keskipisteet janoilla ja tutkitaan muodostuvaa säännöllistä kolmisivuista pyramidia (säännöllinen tetraedri), jonka särmän pituus on $4r$.



Pallopyramidin korkeus on keskipisteiden yhdysjanojen muodostaman pyramidin korkeus lisättynä kahdella pallon säteellä eli $10 \text{ cm} = h + 2r$. Pyramidin korkeusjana on pyramidin huipun ja pohjakolmion painopisteen välinen jana.

Lasketaan pohjakolmion korkeus. Pohjakolmio on tasasivuinen, joten mediaanit ovat samalla korkeusjanoja.

$$(4r)^2 = (2r)^2 + a^2$$

$$a^2 = 16r^2 - 4r^2$$

$$a = (\pm)\sqrt{12r^2} = 2\sqrt{3}r$$

Kolmion painopiste on mediaanien leikkauspiste, joka jakaa mediaanit 2 : 1 huipusta lukien.

Lasketaan pyramidin korkeus suorakulmaisesta kolmiosta.

$$(4r)^2 = \left(\frac{2}{3}a\right)^2 + h^2$$

$$h^2 = 16r^2 - \frac{4}{9}a^2$$

$$= 16r^2 - \frac{4}{9} \cdot (2\sqrt{3}r)^2$$

$$= {}^3)16r^2 - \frac{4}{\cancel{9}_3} \cdot 4 \cdot \cancel{3} \cdot r^2$$

$$= \frac{3 \cdot 16}{3}r^2 - \frac{16}{3}r^2$$

$$= \frac{2 \cdot 16}{3}r^2$$

$$h = (\pm)\sqrt{\frac{2 \cdot 16}{3}r^2} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}r$$

Muodostetaan yhtälö pallopyramidin korkeuden avulla ja ratkaistaan pallon säde r .

$$h + 2r = 10$$

$$\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}r + 2r = 10$$

$$4\sqrt{2}r + 2\sqrt{3}r = 10\sqrt{3}$$

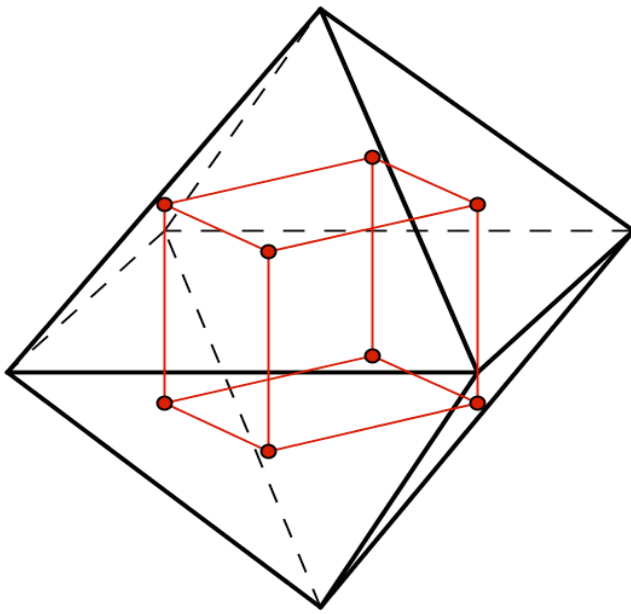
$$\begin{aligned} r &= \frac{10\sqrt{3}}{4\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} \stackrel{(2 \quad \sqrt{3})}{=} \frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{2} + \sqrt{3}} \\ &= \frac{5 \cdot 3}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{3}^2} = \frac{15}{3 + 2\sqrt{6}} = 1,89... \approx 1,9 \text{ (cm)} \end{aligned}$$

Pallon säde on $\frac{15}{3 + 2\sqrt{6}} \text{ cm} \approx 1,9 \text{ cm}$.

Vastaus $\frac{15}{3 + 2\sqrt{6}} \text{ cm} \approx 1,9 \text{ cm}$

324

Säännöllisessä oktaedrissa on kahdeksan tahkoa, joten syntyvässä kappaleessa on kahdeksan kärkeä. Kuutio on Platonin kappaleista ainoa, jossa on kahdeksan kärkeä. Syntyvän kappaleen on siis oltava kuutio.

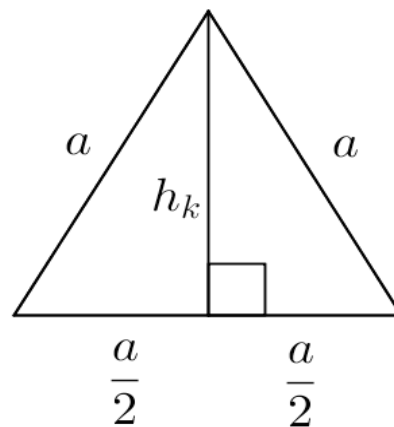


Oktaedrin tahkot ovat tasasivuisia kolmioita, joiden sivun pituus on a . Lasketaan sivutahkon korkeus.

$$a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h_k^2$$

$$h_k^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

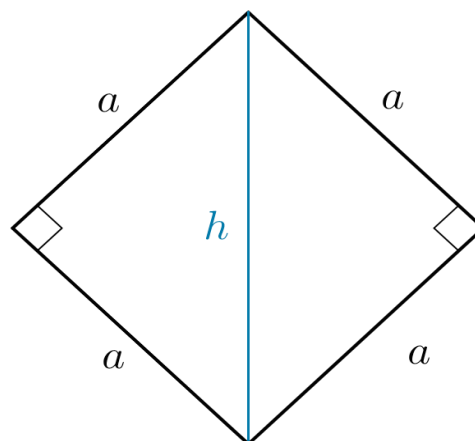
$$h_k = (\pm)\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$



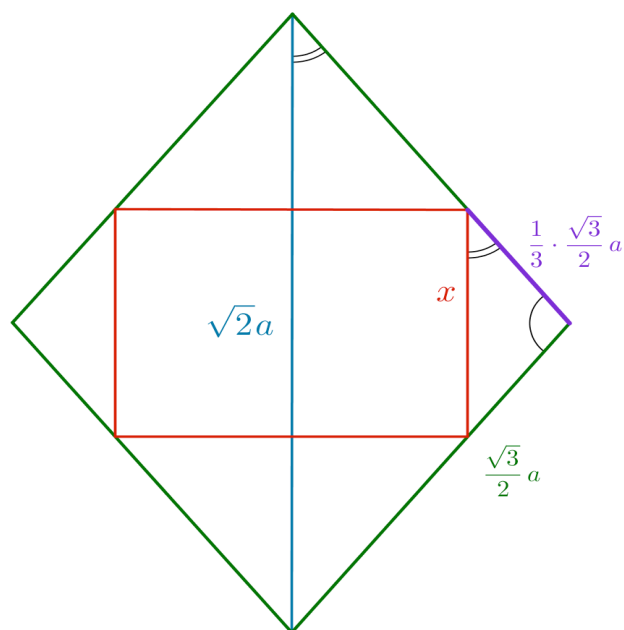
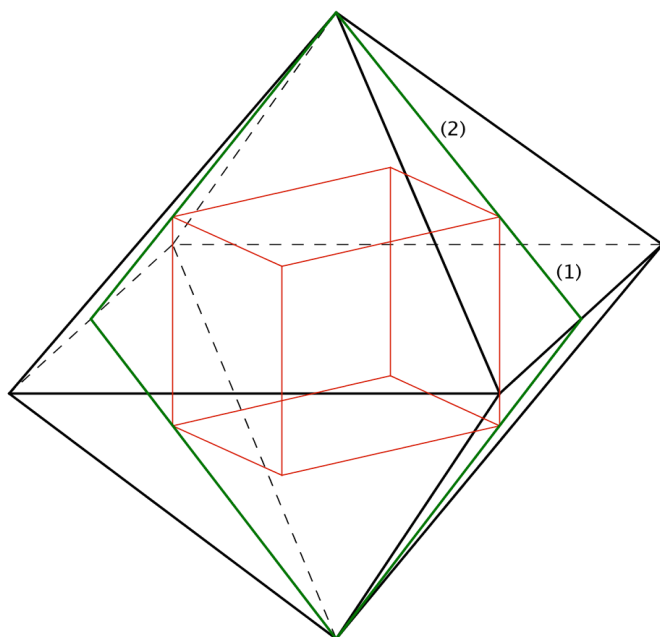
Lasketaan oktaedrin korkeus kärjestä vastakkaiseen kärkeen.
Oktaedrin kärkien kautta piirretty poikkileikkaus on neliö.

$$h^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

$$h = \sqrt{2}a$$



Piirretään kappaleesta poikkileikkaus pitkin tasoa, joka kulkee kuution ylä- ja alatahkojen lävistäjien kautta. Kuution kärjet ovat tahkojen painopisteissä eli mediaanien leikkauspisteissä Mediaanien leikkauspiste jakaa mediaanit suhteessa 2 : 1 kärjestä lukien. Tasasivuisen kolmion mediaani on samalla kolmion korkeusjana, joten mediaanin pituus on $\frac{\sqrt{3}}{2}a$.



Poikkileikkauskuvioon muodostuu yhdenmuotoiset tasakylkiset kolmiot (kk, huippukulma yhteinen, samankohtaiset kulmat yhtä suuret).

Vastinjanojen suhde on vakio. Muodostetaan yhtälö.

$$\frac{x}{\sqrt{2}a} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a}{\frac{\sqrt{3}}{2} a}$$

$$\frac{x}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{3}$$

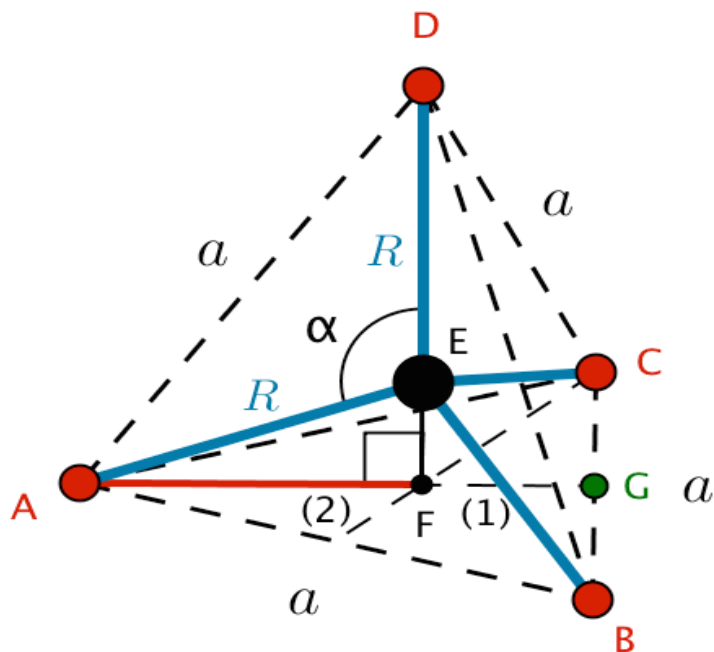
$$x = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2}a$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3} a$$

Kuution särmän pituus on $\frac{\sqrt{2}}{3} a$.

Vastaus Kuutio, jonka särmän pituus on $\frac{\sqrt{2}}{3} a$.

325



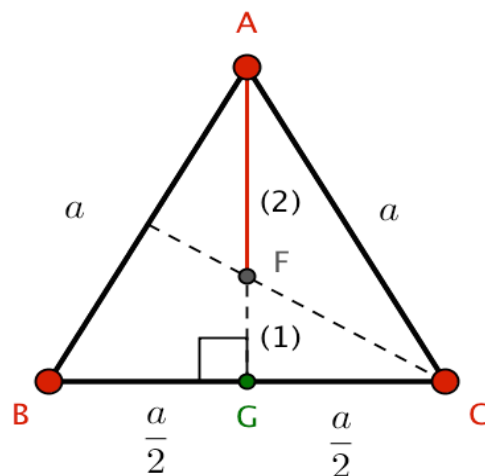
Lasketaan tetraedrin pohjana olevan tasasivuisen kolmion korkeus eli mediaanin AG pituus.

$$|AB|^2 = |BG|^2 + |AG|^2$$

$$a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + |AG|^2$$

$$|AG|^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3}{4}a^2$$

$$|AG| = (\pm)\sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

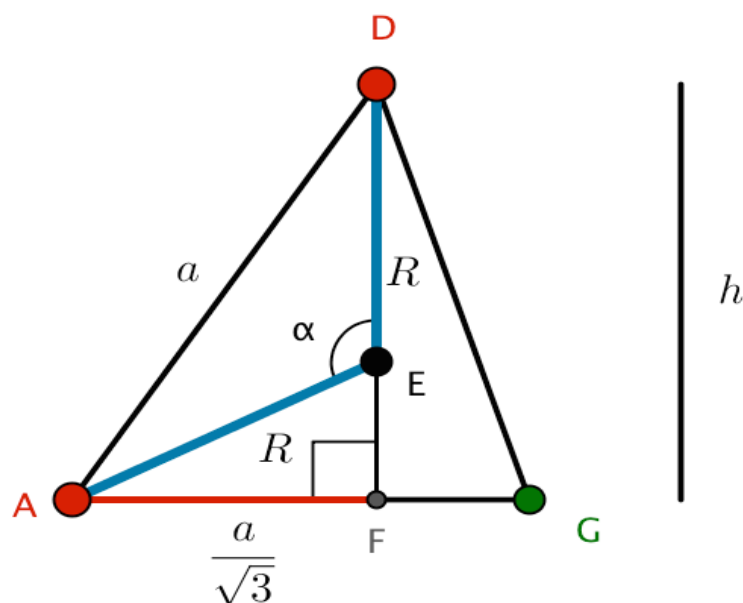


Tetraedrin korkeusjanan päätepiste F on pohjakolmion painopiste eli mediaanien leikkauspiste. Painopiste jakaa mediaanit suhteessa 2 : 1 huipusta lukien.

Lasketaan suorakulmaisen kolmion AFD kateetti AF .

$$|AF| = \frac{2}{3}|AG| = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

Piirretään molekyylistä poikkileikkauskuva tasossa, joka kulkee tetraedrin huipun D ja pohjan mediaanin AG kautta.



Lasketaan tetraedrin korkeus eli etäisyys huipun D ja pohjan painopisteen F välillä:

$$|AD|^2 = |AF|^2 + |FD|^2$$

$$a^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 + h^2$$

$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{2}{3}a^2$$

$$h = (\pm)\sqrt{\frac{2}{3}a^2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a$$

Lasketaan etäisyys R suorakulmaisen kolmion AFE avulla.

$$|AE|^2 = |AF|^2 + |EF|^2$$

$$R^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{3}} \right)^2 + (h - R)^2$$

$$R^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{3}} \right)^2 + h^2 - 2 \cdot h \cdot R + R^2$$

$$2 \cdot h \cdot R = \frac{a^2}{3} + h^2$$

$$R = \frac{a^2}{3 \cdot 2 \cdot h} + \frac{h^2}{2 \cdot h} = \frac{a^2}{6 \cdot h} + \frac{h}{2} \quad \left| \quad h = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} a \right.$$

$$= \frac{a^2}{6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} a} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} a}{2} = \overset{\sqrt{2})}{\frac{\sqrt{3}a}{6\sqrt{2}}} + \overset{2\sqrt{3})}{\frac{\sqrt{2}a}{2\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{\sqrt{6}a}{12} + \frac{2\sqrt{6}a}{12} = \frac{3\sqrt{6}a}{12} = \frac{\sqrt{6}a}{4}$$

Kysytty kulma α saadaan kosinilauseen avulla.

$$a^2 = R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cdot \cos \alpha$$

$$a^2 = 2R^2 - 2R^2 \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{a^2 - 2R^2}{-2R^2} = \frac{a^2 - 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{6}a}{4}\right)^2}{-2 \cdot \left(\frac{\sqrt{6}a}{4}\right)^2}$$

$$= \frac{a^2 - \frac{3a^2}{4}}{-\frac{3a^2}{4}} = \frac{a^2 \left(1 - \frac{3}{4}\right)}{-\frac{3a^2}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{-\frac{3}{4}} = -\frac{1}{3}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right) = 109,47...^\circ \approx 109,5^\circ$$

Sidoskulma on $109,5^\circ$.

Vastaus $109,5^\circ$

K1

Kulma $\alpha = \beta - 35^\circ$.

a) Komplementtikulmien summa on 90° .

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

$$\beta - 35^\circ + \beta = 90^\circ \quad | +35^\circ$$

$$2\beta = 125^\circ \quad | :2$$

$$\beta = 62,5^\circ$$

Tällöin $\alpha = 62,5^\circ - 35^\circ = 27,5^\circ$.

b) Suplementtikulmien summa on 180° .

$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

$$\beta - 35^\circ + \beta = 180^\circ \quad | +35^\circ$$

$$2\beta = 215^\circ \quad | :2$$

$$\beta = 107,5^\circ$$

Tällöin $\alpha = 107,5^\circ - 35^\circ = 72,5^\circ$.

c) Eksplementtikulmien summa on 360° .

$$\alpha + \beta = 360^\circ$$

$$\beta - 35^\circ + \beta = 360^\circ \quad | +35^\circ$$

$$2\beta = 395^\circ \quad | :2$$

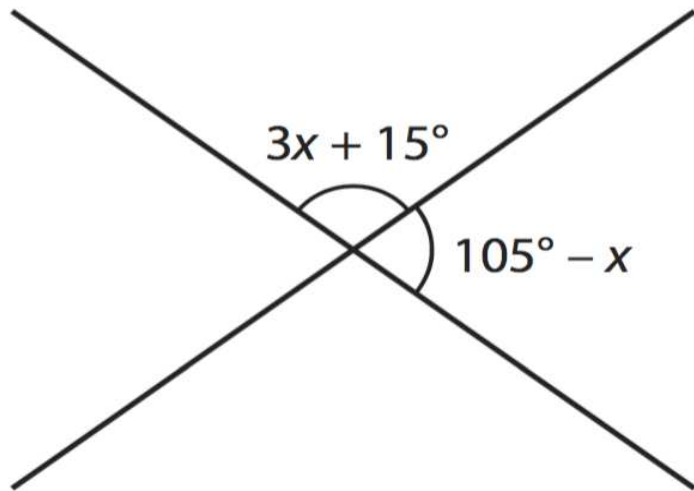
$$\beta = 197,5^\circ$$

Tällöin $\alpha = 197,5^\circ - 35^\circ = 162,5^\circ$.

Vastaus

- a) $\alpha = 27,5^\circ$
- b) $\alpha = 72,5^\circ$
- c) $\alpha = 162,5^\circ$

K2



Vieruskulmien summa on 180° . Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan muuttuja x .

$$3x + 15^\circ + 105^\circ - x = 180^\circ$$

$$2x + 120^\circ = 180^\circ \quad | -120^\circ$$

$$2x = 60^\circ \quad | :2$$

$$x = 30^\circ$$

Määritetään kulmat.

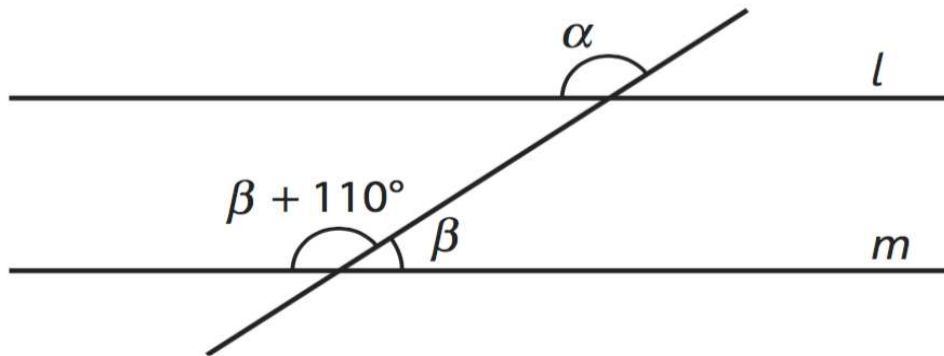
$$3x + 15^\circ = 3 \cdot 30^\circ + 15^\circ = 105^\circ$$

$$105^\circ - x = 105^\circ - 30^\circ = 75^\circ$$

Suorien välinen kulma on näistä pienempi eli 75° .

Vastaus 75°

K3



Kulmat β ja $\beta + 110^\circ$ ovat vieruskulmia. Muodostetaan yhtälö.

$$\beta + \beta + 110^\circ = 180^\circ \quad | -110^\circ$$

$$2\beta = 70^\circ \quad | :2$$

$$\beta = 35^\circ$$

Koska suorat l ja m ovat yhdensuuntaiset, niin samankohtaiset kulmat α ja $\beta + 110^\circ$ ovat yhtä suuret. Määritetään kulma α .

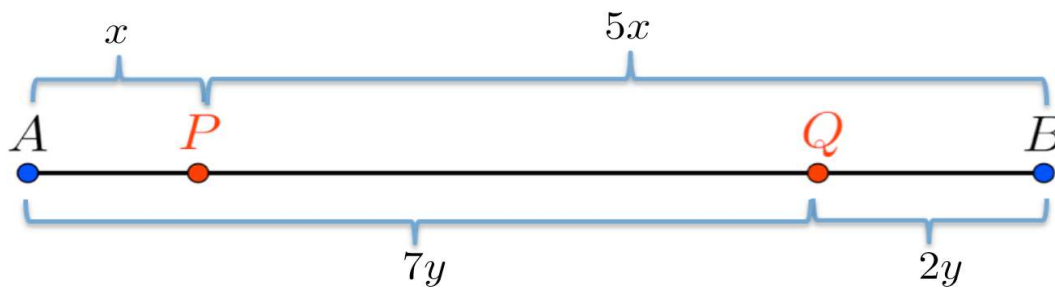
$$\alpha = \beta + 110^\circ = 35^\circ + 110^\circ = 145^\circ$$

Vastaus $\alpha = 145^\circ$ ja $\beta = 35^\circ$

K4

Koska piste P jakaa janan AB suhteessa $1 : 5$, niin $|AP| = x$ ja $|PB| = 5x$.

Vastaavasti, koska piste Q jakaa janan AB suhteessa $7 : 2$, niin $|AQ| = 7y$ ja $|QB| = 2y$.



Jana AB pituus on 18. Lasketaan janan AP pituus.

$$x + 5x = 18$$

$$6x = 18 \quad |:6$$

$$x = 3$$

Siis $|AP| = x = 3$.

Lasketaan janan AQ pituus.

$$7y + 2y = 18$$

$$9y = 18 \quad |:9$$

$$y = 2$$

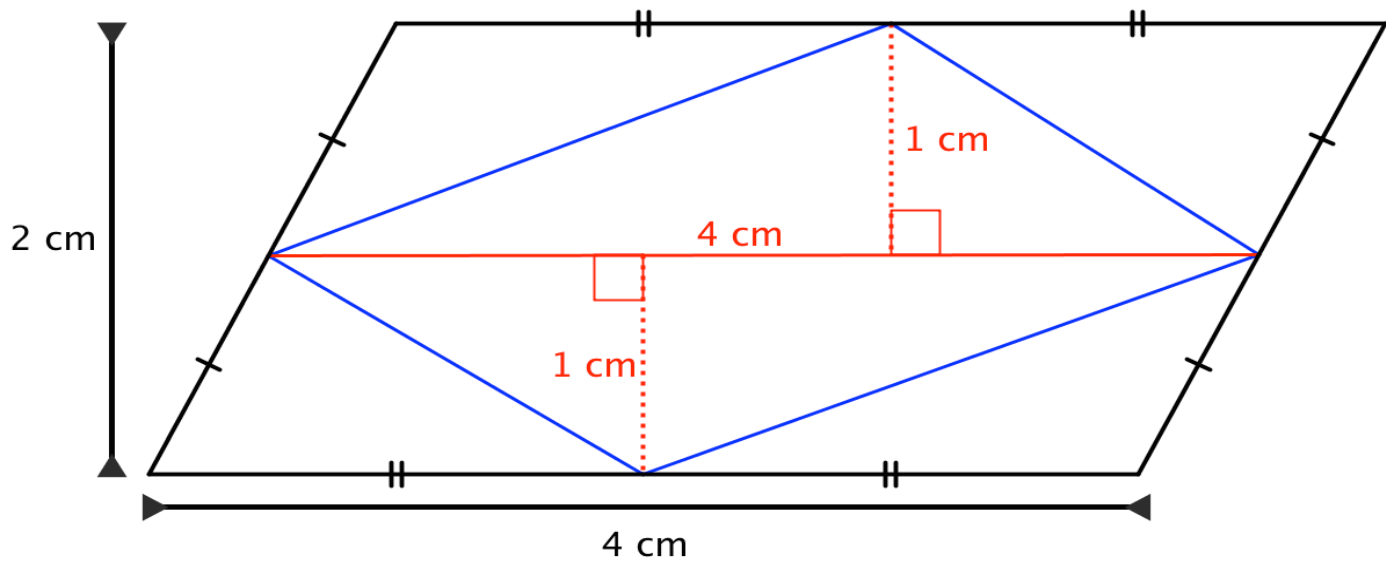
Siis $|AQ| = 7y = 7 \cdot 2 = 14$

Lasketaan lopuksi janan PQ pituus.

$$|PQ| = |AQ| - |AP| = 14 - 3 = 11$$

Vastaus $|PQ| = 11$

K5



Kun sisempi suunnikas jaetaan kuvan mukaisesti kahteen osaan lävistäjällä, saadaan kaksi kolmiota, joiden molempien kanta on 4 cm ja korkeus 1 cm.

Lasketaan suunnikkaan pinta-ala näiden kolmioiden pinta-alojen summana.

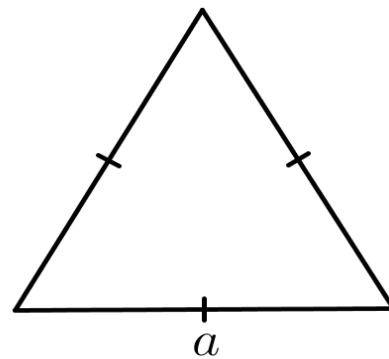
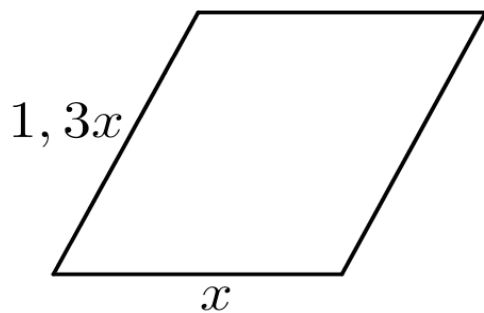
$$A = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \text{ cm} \cdot 1 \text{ cm} = 4 \text{ cm}^2$$

Vastaus 4 cm^2

K6

Merkitään suunnikkaan lyhyempää sivua kirjaimella x . Tällöin pidempi sivu on tällöin $1,3x$.

Merkitään kolmion sivun pituutta kirjaimella a .



Kolmion piiri on yhtä suuri kuin suunnikkaan piiri. Muodostetaan yhtälö.

$$3a = 2x + 2 \cdot 1,3x$$

$$3a = 4,6x \quad | :3$$

$$a = 1,533...x \approx 1,53x$$

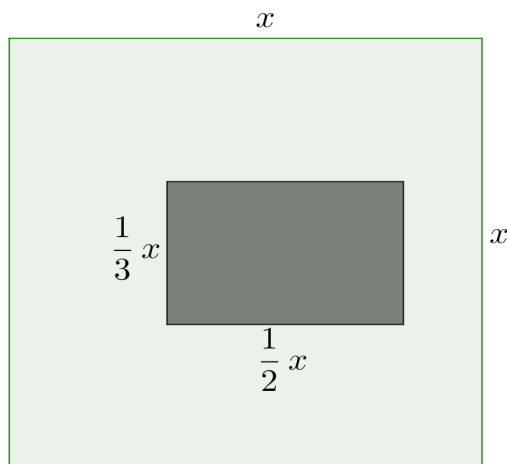
Kolmion sivu on siis $1,53 - 1 = 0,53 = 53 \%$ pidempi kuin suunnikkaan lyhyempi sivu.

Vastaus 53 %

K7

Merkitään neliön muotoisen tontin sivun pituutta kirjaimella x .

Talon pitempi sivu on tällöin $\frac{1}{2}x$ ja lyhyempi sivu $\frac{1}{3}x$.



Piha-alueen pinta-ala saadaan vähentämällä tontin pinta-alasta talon pinta-ala. Muodostetaan piha-alueen pinta-alan avulla yhtälö ja ratkaistaan tontin pinta-ala x^2 .

$$x \cdot x - \frac{1}{2}x \cdot \frac{1}{3}x = 400$$

$$\frac{5}{6}x^2 = 400 \quad \left| \cdot \frac{6}{5} \right.$$

$$x^2 = 480 \text{ (m}^2\text{)}$$

Vastaus 480 m^2

K8

Lasketaan kymmenkulmion kulmien summa.

$$(10 - 2) \cdot 180^\circ = 1440^\circ$$

Lasketaan monikulmion kulmien summa.

$$1,75 \cdot 1440^\circ = 2520^\circ$$

Muodostetaan kulmien summan avulla yhtälö ja ratkaistaan kulmien lukumäärä n .

$$(n - 2) \cdot 180^\circ = 2520^\circ$$

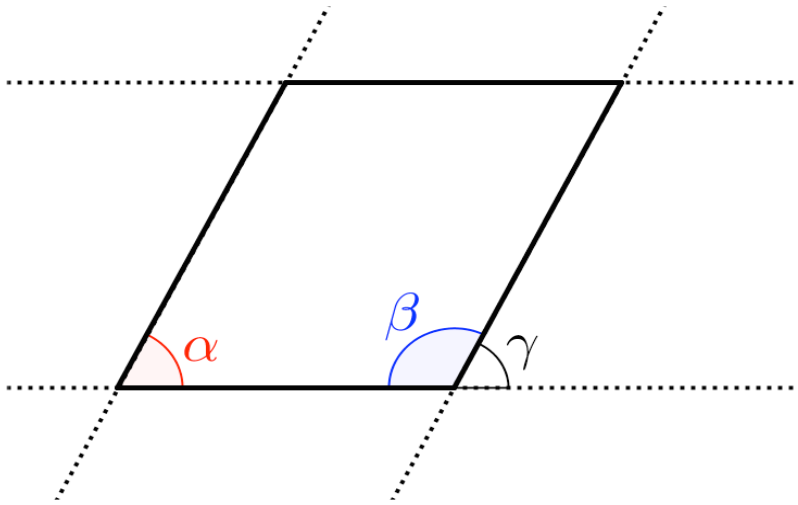
$$n = 16$$

Vastaus 16 kulmaa

K9

Tapa 1

Piirretään suunnikas ja jatketaan sen sivuja. Käytetään kuvan merkintöjä.



Koska suunnikkaan vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset, niin samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuret. Siis $\gamma = \alpha$.

Kulmat γ ja β ovat vieruskulmia, joten niiden summa on 180° .

Saadaan siis

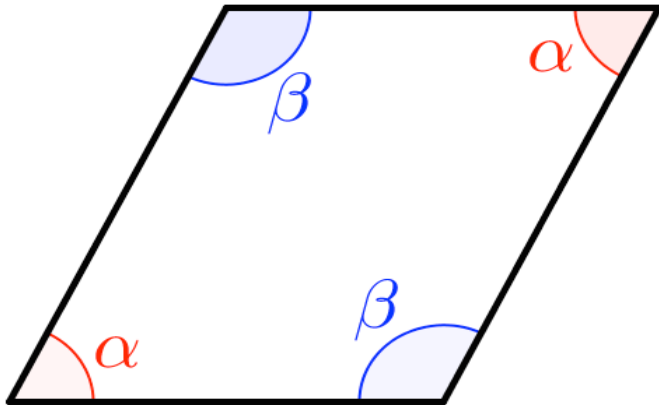
$$\gamma + \beta = 180^\circ \quad | \gamma = \alpha$$

$$\alpha + \beta = 180^\circ.$$

On siis osoitettu, että vierekkäisten kulmien α ja β summa on 180° . $\square$

Tapa 2

Suunnikkaan vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuret ja nelikulmion kulmien summa on 360° .



Muodostetaan yhtälö.

$$2\alpha + 2\beta = 360^\circ$$

$$2(\alpha + \beta) = 360^\circ \quad | :2$$

$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

On siis osoitettu, että vierekkäisten kulmien α ja β summa on 180° . $\square$

K10

Merkitään kysyttyä leveyttä kirjaimella x ja ratkaistaan se vastinpituuksien verrantoyhtälöstä.

$$\frac{x}{71} = \frac{55}{32}$$

Kerrotaan ristiin.

$$32x = 3905$$

$$| : 32$$

$$x = 122,03125$$

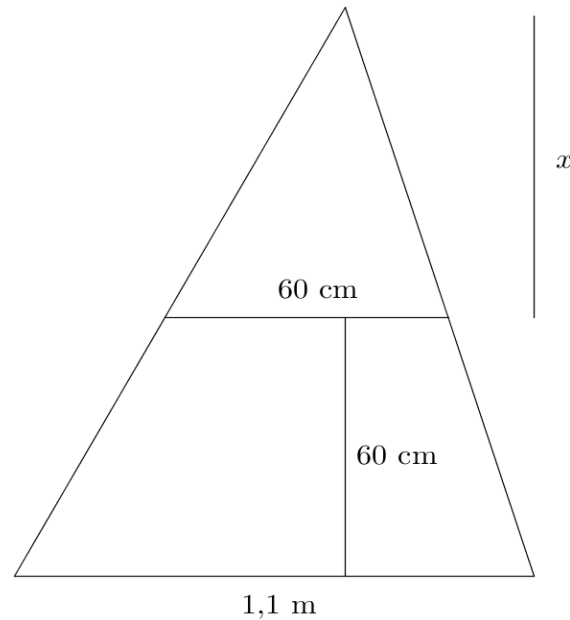
$$x \approx 122 \text{ (cm)}$$

55 tuumaisen television ruudun leveys on noin 122 cm.

Vastaus Ruudun leveys on 122 cm.

K11

Käytetään oheisen kuvan merkintöjä.



Kuvion sisäkkäiset kolmiot ovat kk-lauseen nojalla yhdenmuotoiset, sillä niillä on yhteinen huippukulma ja kyljen, sekä vaakasuorien kantojen rajaamat samankohtaiset, yhtä suuret kantakulmat.

Ratkaistaan pienen kolmion korkeus x verrantoyhtälöstä.
Huomataan vielä, että $1,1 \text{ m} = 110 \text{ cm}$.

$$\frac{x}{x+60} = \frac{60}{110}$$

$$110x = 60(x+60)$$

$$110x = 60x + 3600$$

$$50x = 3600$$

$$x = 72 \text{ (cm)}$$

Kerrotaan ristiin.

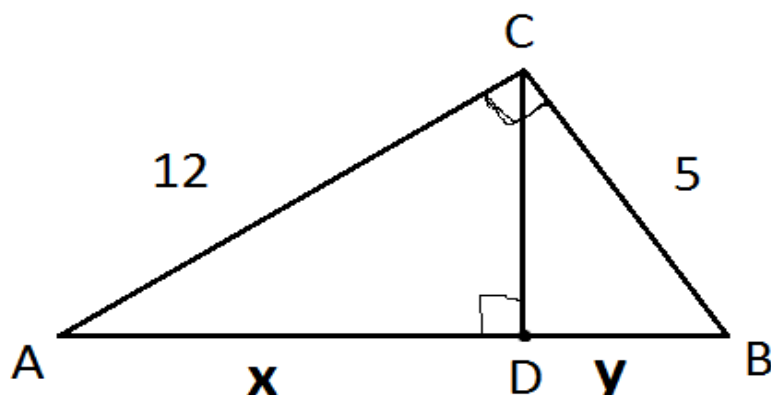
$$| : 50$$

Suuren kolmion korkeus on $x + 60 \text{ cm} = 72 \text{ cm} + 60 \text{ cm} = 132 \text{ cm} \approx 1,3 \text{ m}$.

Vastaus Korkeus on $1,3 \text{ m}$.

K12

Käytetään oheisen kuvan merkintöjä.



Harjoitustehtävän 60 perusteella kaikki kuvan suorakulmaiset kolmiot ovat keskenään yhdenmuotoisia. Ratkaistaan ensin pituus x kolmioista ABC ja ACD .

$\frac{ AB }{ AC } = \frac{ AC }{ AD }$	
$\frac{13}{12} = \frac{12}{x}$	Kerrotaan ristiin.
$13x = 144$	$: 13$
$x = \frac{144}{13}$	

Ratkaistaan sitten y kolmioista ABC ja CBD .

$\frac{ AB }{ CB } = \frac{ CB }{ DB }$	
$\frac{13}{5} = \frac{5}{y}$	Kerrotaan ristiin.
$13y = 25$	$: 13$
$y = \frac{25}{13}$	

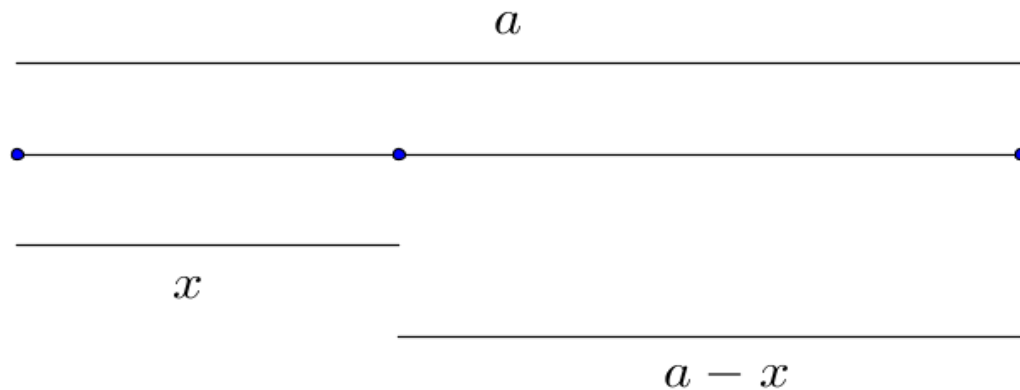
Suhteeksi saadaan

$$x : y = \frac{144}{13} : \frac{25}{13} = \frac{144}{13} \cdot \frac{13}{25} = \frac{144}{25} = 144 : 25.$$

Vastaus $x : y = 144 : 25.$

K13

Käytetään oheisen kuvan merkintöjä.



Ratkaistaan ensin lauseke lyhyemmän osan pituudelle x verrantoyhtälöstä ja lasketaan sitten suhde $x : (a - x)$.

$$\frac{x}{a-x} = \frac{a-x}{a}$$

Kerrotaan ristiin.

$$(a-x)^2 = ax$$

$$a^2 - 2ax + x^2 = ax$$

$$x^2 - 3ax + a^2 = 0$$

$$x = \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \right) a$$

Ratkaistaan yhtälö laskimella.
 x on lyhyempi pituus.

$$\left(\text{tai } x = \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \right) a \right)$$

Kun $x = \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \right) a = \frac{3-\sqrt{5}}{2} a$, niin

$$a-x = a - \frac{3-\sqrt{5}}{2} a = \left(1 - \frac{3-\sqrt{5}}{2} \right) a = \frac{\sqrt{5}-1}{2} a.$$

Kysytyksi suhteeksi saadaan tällöin

$$(a-x):a = \frac{\sqrt{5}-1}{2} a \cdot \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618. \quad (x:(a-x) = (a-x):a)$$

Mittakaava on siis $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618$.

Vastaus Mittakaava on $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618$.

K14

Lasketaan pienoismallin mittakaava k . Tilavuuksien suhde on 1 : 100 ja toisaalta tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio.

$$k^3 = \frac{1}{100}$$

$$k = \sqrt[3]{\frac{1}{100}} = \frac{1}{\sqrt[3]{100}}$$

Pienoismallin mitata saadaan nyt kertomalla alkuperäiset arvot mittakaavan arvolla.

$$\text{Leveys: } \frac{1}{\sqrt[3]{100}} \cdot 2,00 \text{ m} = 0,4308... \text{ m} \approx 0,431 \text{ m} = 43,1 \text{ cm}$$

$$\text{Pituus: } \frac{1}{\sqrt[3]{100}} \cdot 1,00 \text{ m} = 0,2154... \text{ m} \approx 0,215 \text{ m} = 21,5 \text{ cm}$$

$$\text{Korkeus: } \frac{1}{\sqrt[3]{100}} \cdot 3,00 \text{ m} = 0,6463... \text{ m} \approx 0,646 \text{ m} = 64,6 \text{ cm}$$

Vastaus Leveys on 43,1 cm, pituus on 21,5 cm,
korkeus on 64,6 cm.

K15

Merkitään pienoismallin siiven alaa A . Pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö ja ala ratkeaa verrantoyhtälöstä.

$$\frac{A}{190} = \left(\frac{1}{75}\right)^2 \quad | \cdot 190$$

$$A = \left(\frac{1}{75}\right)^2 \cdot 190$$

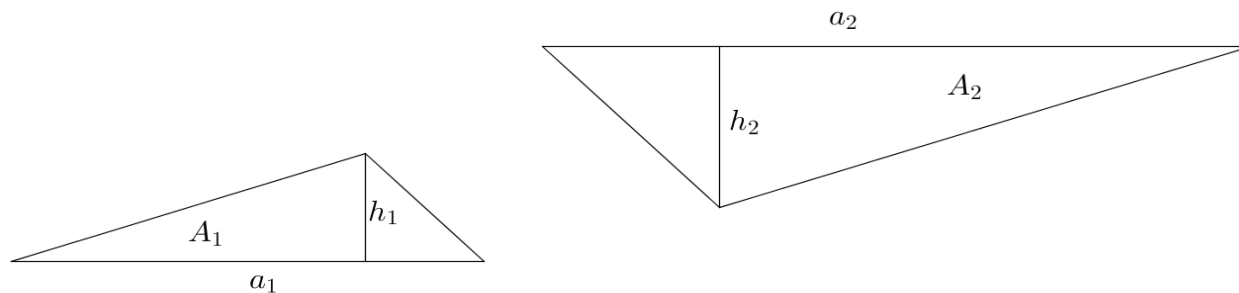
$$A = 0,03377... \text{ (m}^2\text{)}$$

Pienoismallin siiven ala on siis noin
 $0,03377... \text{ m}^2 = 337,7... \text{ cm}^2 \approx 340 \text{ cm}^2$.

Vastaus Pinta-ala on 340 cm^2 .

K16

Käytetään oheisen kuvan merkintöjä.



Kolmioiden välinen mittakaava on k vastinpituuksien suhde, eli

$k = \frac{a_2}{a_1}$ ja $k = \frac{h_2}{h_1}$. Tutkitaan pinta-alojen suhdetta.

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{\frac{1}{2}a_2h_2}{\frac{1}{2}a_1h_1} = \frac{a_2h_2}{a_1h_1} = \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{h_2}{h_1} = k \cdot k = k^2$$

Täten pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö.



K17

a) Uudet pituudet saadaan suoraan prosenttikertoimen avulla. Nyt 15% pienennystä vastaa kerroin $100\% - 15\% = 85\% = 0,85$. Uudet pituudet ovat

$$0,85 \cdot 18 \text{ cm} = 15,3 \text{ cm} \approx 15 \text{ cm} \quad \text{ja}$$

$$0,85 \cdot 30 \text{ cm} = 25,5 \text{ cm} \approx 26 \text{ cm}.$$

b) Lasketaan ensin mittakaava käyttäen hyväksi tietoa, jonka mukaan pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö. Pinta-alojen suhde on nyt

$$\frac{0,85A}{A} = 0,85.$$

Saadaan seuraava yhtälö.

$$k^2 = 0,85$$

$$k = \sqrt{0,85}$$

Uudet pituudet saadaan nyt kertomalla vanhat mittakaavan arvolla.

$$\sqrt{0,85} \cdot 18 \text{ cm} = 16,5951... \text{ cm} \approx 17 \text{ cm}$$

$$\sqrt{0,85} \cdot 30 \text{ cm} = 27,6586... \text{ cm} \approx 28 \text{ cm}$$

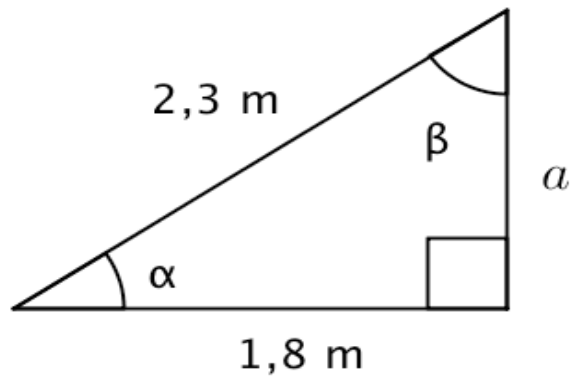
Vastaus

Uudet pituudet ovat

a) 15 cm ja 26 cm

b) 17 cm ja 28 cm.

K18



a) Lasketaan toisen kateetin pituus a Pythagoraan lauseella.

$$2,3^2 = 1,8^2 + a^2$$

$$a^2 = 2,3^2 - 1,8^2$$

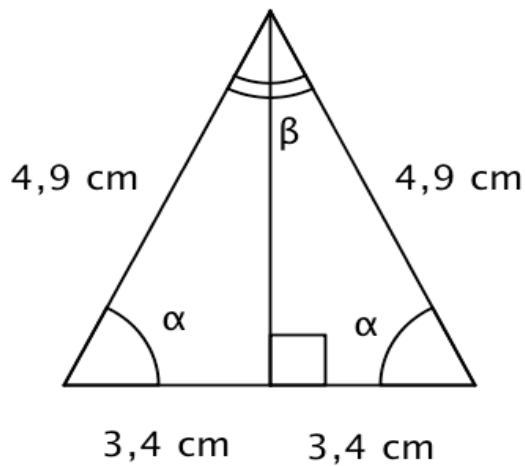
$$a = (\pm)\sqrt{2,3^2 - 1,8^2} = 1,43... \approx 1,4 \text{ (m)}$$

b) Pienin kulma on lyhimmän sivun vastainen kulma. Lasketaan kulma α .

$$\cos \alpha = \frac{1,8}{2,3} = 38,49...^\circ \approx 38^\circ$$

Vastaus a) 1,4 m b) 38°

K19



Kantakulmat:

$$\cos \alpha = \frac{3,4}{4,9}$$

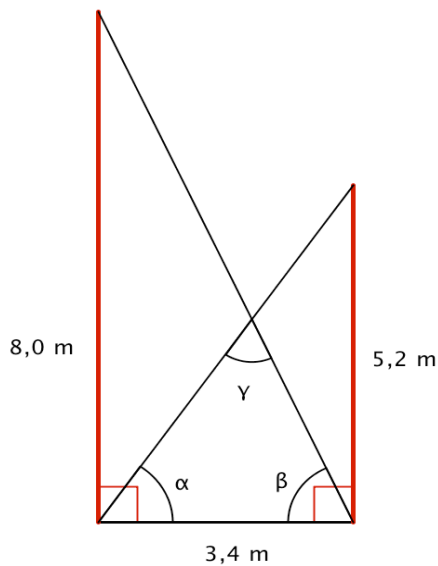
$$\alpha = \cos^{-1} \frac{3,4}{4,9} = 46,06...^{\circ} \approx 46^{\circ}$$

Huippukulma:

$$\beta = 180^{\circ} - 2\alpha = 180^{\circ} - 2 \cdot 46,06...^{\circ} = 87,87...^{\circ} \approx 88^{\circ}$$

Vastaus 46° , 46° ja 88°

K20



Lasketaan kulmat α ja β suorakulmaisista kolmioista.

$$\tan \alpha = \frac{5,2}{3,4} = 1,52...$$

$$\alpha = \tan^{-1} 1,52... = 56,82...^{\circ}$$

$$\tan \beta = \frac{8,0}{3,4} = 2,35...$$

$$\beta = \tan^{-1} 2,35... = 66,97...^{\circ}$$

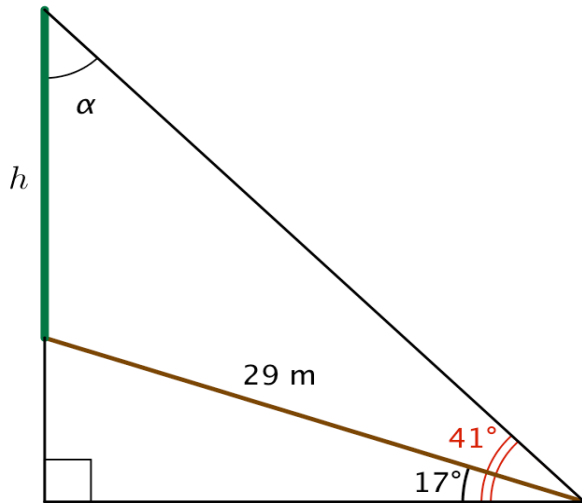
Lasketaan kulma γ .

$$\gamma = 180^{\circ} - \alpha - \beta = 180^{\circ} - 56,82...^{\circ} - 66,97...^{\circ} = 56,20...^{\circ} \approx 56^{\circ} (< 90^{\circ})$$

Vaijerien välinen kulma on 56° .

Vastaus 56°

K21



Lasketaan kysytty puun korkeus h sinilauseella.

$$\alpha = 180^\circ - 90^\circ - 41^\circ = 49^\circ$$

$$\frac{h}{\sin(41^\circ - 17^\circ)} = \frac{29}{\sin \alpha}$$

$$h = \frac{29}{\sin \alpha} \cdot \sin 24^\circ$$

$$= \frac{29}{\sin 49^\circ} \cdot \sin 24^\circ$$

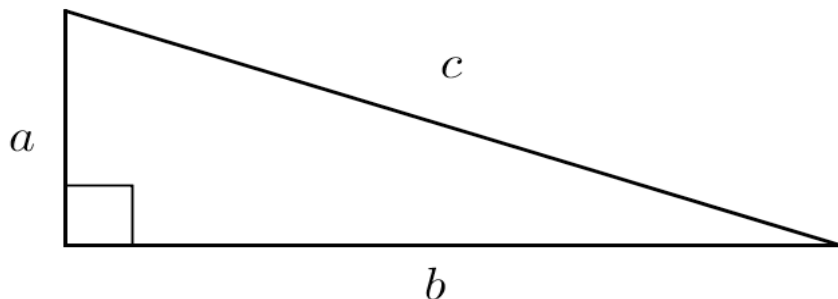
$$= 15,62\dots$$

$$\approx 16 \text{ (m)}$$

Puun pituus on 16 m.

Vastaus 16 m

K22



Sivuista pisin on hypotenuusa.

Pythagoraan lauseen mukaan $c^2 = a^2 + b^2$.

- a) Jono a, b, c on geometrinen, joten jonon peräkkäisten termien suhde on vakio q .

Tällöin $b = a \cdot q$ ja $c = b \cdot q = a \cdot q^2$.

Pythagoraan lauseen mukaan

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$(a \cdot q^2)^2 = a^2 + (a \cdot q)^2$$

$$a^2 \cdot q^4 = a^2 + a^2 \cdot q^2 \quad \Big| : a^2 \ (\neq 0)$$

$$q^4 = 1 + q^2$$

$$q^4 - q^2 - 1 = 0$$

$$(q^2)^2 - q^2 - 1 = 0$$

Ratkaistaan bikvadraattinen
yhtälö.

$$q^2 = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$q > 0$, koska jonon
kaikki termit positiivisia.
Vain +-merkki kelpaa.

$$q^2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$q = (\pm) \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$$

Jonon suhdeluku on $q = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$.

- b) Jono a, b, c on aritmeettinen, joten jonon peräkkäisten termien erotus on vakio d .

Tällöin $a = b - d$ ja $c = b + d$.

Pythagoraan lauseen mukaan

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$(b + d)^2 = (b - d)^2 + b^2$$

$$b^2 + 2 \cdot b \cdot d + d^2 = b^2 - 2 \cdot b \cdot d + d^2 + b^2$$

$$b^2 - 4bd = 0 \quad | : b (> 0)$$

$$b - 4d = 0$$

$$b = 4d$$

Koska $b = 4d$, niin

$$a = b - d = 4d - d = 3d \quad \text{ja} \quad c = b + d = 4d + d = 5d.$$

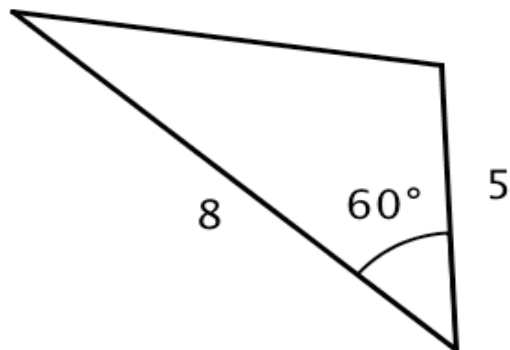
Saadaan kysytty suhde

$$a : b : c = 3d : 4d : 5d = 3 : 4 : 5.$$

Vastaus a) $q = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$

b) $3 : 4 : 5$

K23



Kolmion pinta-ala on

$$A = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot \sin 60^\circ \quad \left| \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \right.$$

$$= 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

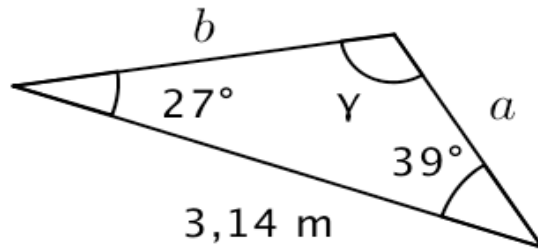
$$= 10\sqrt{3}$$

$$= 17,320\dots$$

$$\approx 17,32$$

Vastaus a) $10\sqrt{3}$ b) 17,32

K24



- a) Kolmion kolmas kulma on $\gamma = 180^\circ - 27^\circ - 39^\circ = 114^\circ$.

Lasketaan sivut a ja b sinilauseella.

$$\frac{a}{\sin 27^\circ} = \frac{3,14}{\sin 114^\circ}$$

$$a = \frac{3,14 \cdot \sin 27^\circ}{\sin 114^\circ} = 1,560... \approx 1,56 \text{ (m)}$$

$$\frac{b}{\sin 39^\circ} = \frac{3,14}{\sin 114^\circ}$$

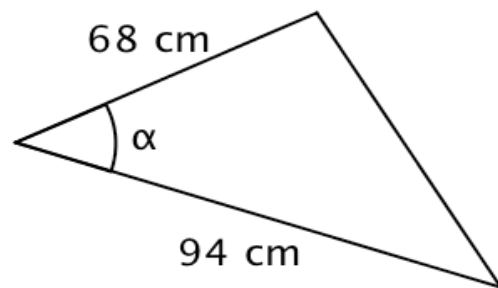
$$b = \frac{3,14 \cdot \sin 39^\circ}{\sin 114^\circ} = 2,163... \approx 2,16 \text{ (m)}$$

- b) Kolmion pinta-ala:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \cdot 3,14 \cdot a \cdot \sin 39^\circ = \frac{1}{2} \cdot 3,14 \cdot 1,560... \cdot \sin 39^\circ \\ &= 1,541... \approx 1,54 \text{ (m}^2\text{)} \end{aligned}$$

Vastaus a) 114° , 1,56 m ja 2,16 m b) $1,54 \text{ m}^2$

K25



Pinta-ala on mahdollisimman suuri, kun kulma $\alpha = 90^\circ$.

Pinta-ala on tällöin $A = \frac{0,68 \text{ m} \cdot 0,94 \text{ m}}{2} = 0,3196 \text{ m}^2 < 0,40 \text{ m}^2$

Ei siis ole mahdollista valmistaa puusepän suunnittelemaa pöytää.

Vastaus ei mahdollista

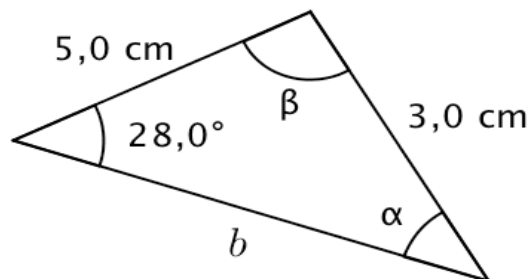
K26

Lasketaan 5,0 cm pituisen sivun vastainen kulma sinilauseella.

$$\frac{5,0}{\sin \alpha} = \frac{3,0}{\sin 28,0^\circ}$$

$$\sin \alpha = \frac{5,0 \cdot \sin 28,0^\circ}{3,0} = 0,782...$$

$$\alpha = \sin^{-1} 0,782... = 51,48...^\circ \text{ tai } \alpha = 180^\circ - 51,48...^\circ = 128,51...^\circ$$



Kolmion kolmas kulma on tällöin

- Jos $\alpha = 51,48...^\circ$, niin
 $\beta = 180^\circ - 28,0^\circ - 51,48...^\circ = 100,51...^\circ \approx 100,5^\circ$ (kelpaa).
- Jos $\alpha = 128,51...^\circ$, niin
 $\beta = 180^\circ - 28,0^\circ - 128,51...^\circ = 23,48...^\circ \approx 23,5^\circ$ (ei kelpaa, koska kolmion pienin kulma on 28°).

Siis kolmion suurin kulma on $100,5^\circ$ ja pisin sivu on tämän suurimman kulman vastainen sivu b .

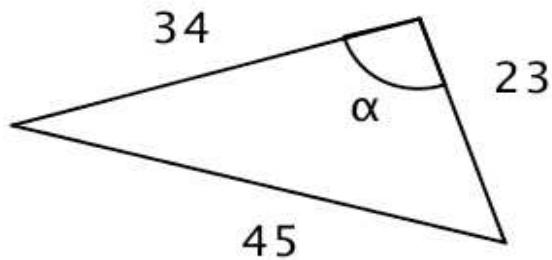
Lasketaan pisimmän sivun pituus sinilauseella.

$$\frac{b}{\sin 100,51...^\circ} = \frac{3,0}{\sin 28,0^\circ}$$

$$b = \frac{3,0 \cdot \sin 100,51...^\circ}{\sin 28,0^\circ} = 6,28... \approx 6,3 \text{ (cm)}$$

Vastaus Pisin sivu 6,3 cm, suurin kulma $100,5^\circ$.

K27



Kolmion suurin kulma on pisimmän sivun vastainen kulma α .

Käytetään kosinilausetta.

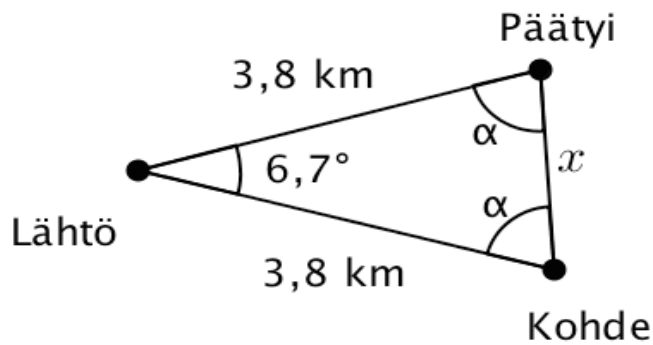
$$45^2 = 34^2 + 23^2 - 2 \cdot 34 \cdot 23 \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{45^2 - 34^2 - 23^2}{-2 \cdot 34 \cdot 23} = -0,217...$$

$$\alpha = \cos^{-1} -0,217... = 102,55...^\circ \approx 102,6^\circ$$

Vastaus $102,6^\circ$

K28



Syntyy tasakylkinen kolmio.

Kantakulmat ovat

$$\alpha = \frac{180^\circ - 6,7^\circ}{2} = 86,65^\circ$$

Lasketaan kysytty etäisyys x sinilauseella.

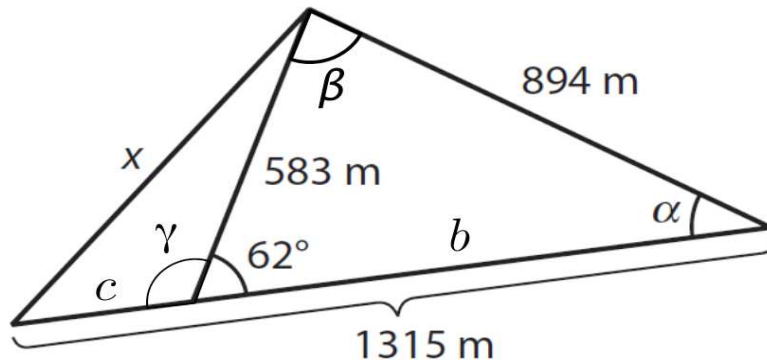
$$\frac{x}{\sin 6,7^\circ} = \frac{3,8}{\sin 86,65^\circ}$$

$$x = \frac{3,8 \cdot \sin 6,7^\circ}{\sin 86,65^\circ} = 0,4441... \approx 0,44 \text{ (km)}$$

Veneilijä päätyy 0,44 km eli 440 metrin päähän kohteestaan.

Vastaus 440 m

K29



Kulma α saadaan sinilauseella.

$$\frac{583}{\sin \alpha} = \frac{894}{\sin 62^\circ}$$

$$583 \sin 62^\circ = 894 \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{583 \sin 62^\circ}{894} = 0,575...$$

$$\alpha = 35,155...^\circ \approx 35,2^\circ$$

$$\text{tai } \alpha = 180^\circ - 35,155...^\circ = 144,844...^\circ \approx 145^\circ$$

Kulma β :

- Jos $\alpha = 35,155...^\circ$, niin $\beta = 180^\circ - 35,155...^\circ - 62^\circ = 82,844...^\circ$.
Tämä kelpaa kolmion kulmaksi.
- Jos $\alpha = 144,844...^\circ$, niin $\beta = 180^\circ - 144,844...^\circ - 62^\circ = -26,844...^\circ$.
Tämä ei kelpaa kolmion kulmaksi, joten tapaus $\alpha = 144,844...^\circ$ hylätään.

Sivujen pituudet b ja c :

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{894}{\sin 62^\circ}$$

$$\frac{b}{\sin 82,844...^\circ} = \frac{894}{\sin 62^\circ}$$

$$b = \frac{894 \cdot \sin 82,844...^\circ}{\sin 62^\circ} = 1004,632... \text{ (km)}$$

$$c = 1315 \text{ m} - 1004,632... \text{ m} = 310,367... \text{ m}$$

Kulma γ :

$$\gamma = 180^\circ - 62^\circ = 118^\circ$$

Sivun pituus x saadaan kosinilauseella.

$$x^2 = c^2 + 583^2 - 2 \cdot c \cdot 583 \cdot \cos \gamma$$

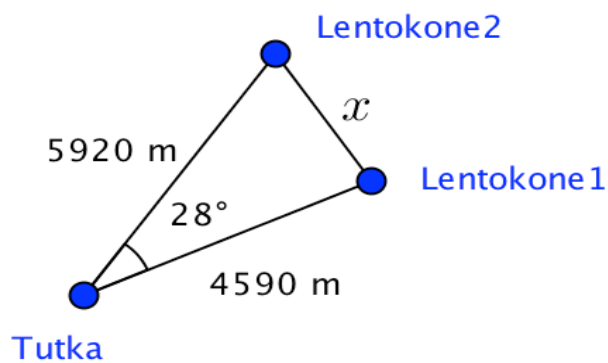
$$= (310,367...)^2 + 583^2 - 2 \cdot 310,367... \cdot 583 \cdot \cos 118^\circ$$

$$= 606\,113,16...$$

$$x = (\pm)\sqrt{606\,113,16...} = 778,53... \approx 779 \text{ (m)}$$

Vastaus $x = 779 \text{ m}$, $\alpha = 35,2^\circ (\approx 35^\circ)$

K30



Lentokoneiden välinen etäisyys saadaan kosinilauseella.

$$x^2 = 5920^2 + 4590^2 - 2 \cdot 5920 \cdot 4590 \cdot \cos 28^\circ$$

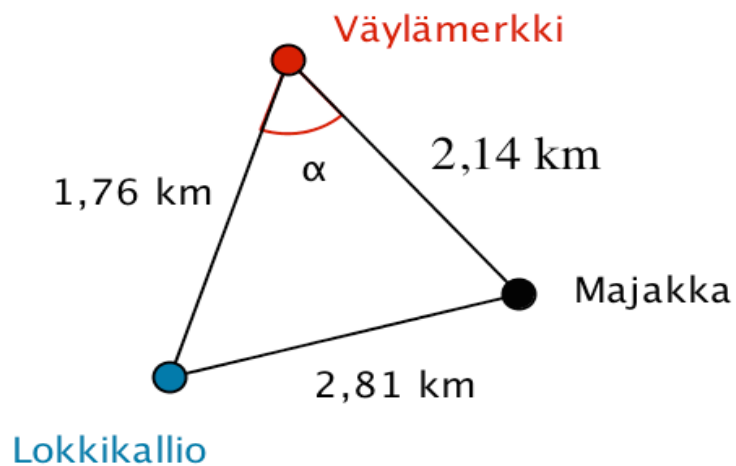
$$= 8\,130\,183,29... \text{ (m}^2\text{)}$$

$$x = \sqrt{8\,130\,183,29...} = 2851,34... \approx 2850 \text{ (m)}$$

Lentokoneiden välinen etäisyys on 2850 m.

Vastaus 2850 m

K31



Kysytty kulma saadaan laskettua kosinilauseen avulla.

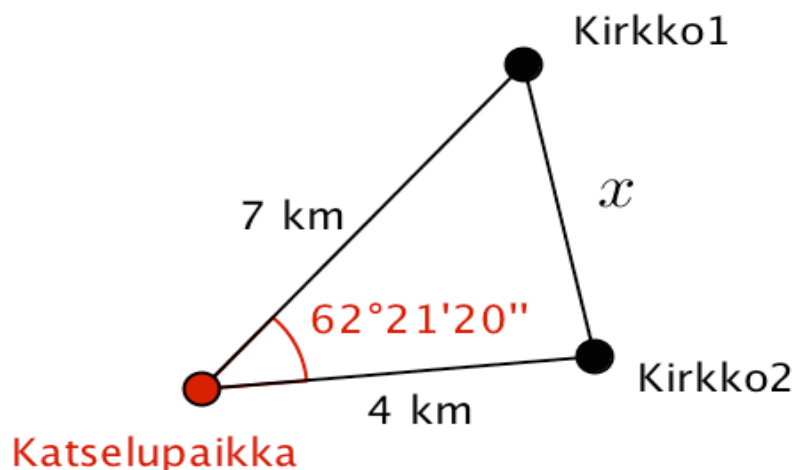
$$2,81^2 = 1,76^2 + 2,14^2 - 2 \cdot 1,76 \cdot 2,14 \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{2,81^2 - 1,76^2 - 2,14^2}{-2 \cdot 1,76 \cdot 2,14} = -0,029...$$

$$\alpha = \cos^{-1}(-0,029...) = 91,66...^\circ \approx 92^\circ$$

Vastaus 92°

K32



Katselusuuntien välinen kulma on

$$62^{\circ} 21' 20'' = 62^{\circ} + \frac{21^{\circ}}{60} + \frac{20^{\circ}}{60 \cdot 60} = 62,3555...^{\circ}$$

Kysytty etäisyys saadaan kosinilauseen avulla.

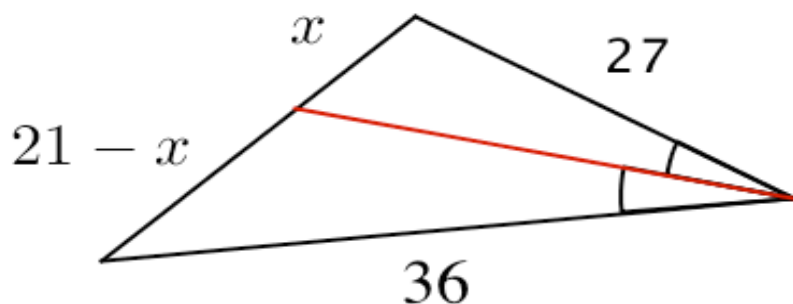
$$\begin{aligned} x^2 &= 7^2 + 4^2 - 2 \cdot 7 \cdot 4 \cdot \cos 62,3555...^{\circ} \\ &= 39,016... (\text{km}^2) \end{aligned}$$

$$x = (\pm)\sqrt{39,016...} = 6,246... \approx 6 \text{ (km)}$$

Kirkot ovat 6 km etäisyydellä toisistaan.

Vastaus 6 km

K33



Pienin kulma on lyhimmän sivun vastainen kulma.

Merkitään osien pituuksia x ja $21 - x$.

Kulmanpuolittajalauseen avulla saadaan yhtälö.

$$\frac{x}{21 - x} = \frac{27}{36}$$

$$36x = 27 \cdot (21 - x)$$

$$36x = 27 \cdot 21 - 27x$$

$$36x + 27x = 567$$

$$63x = 567$$

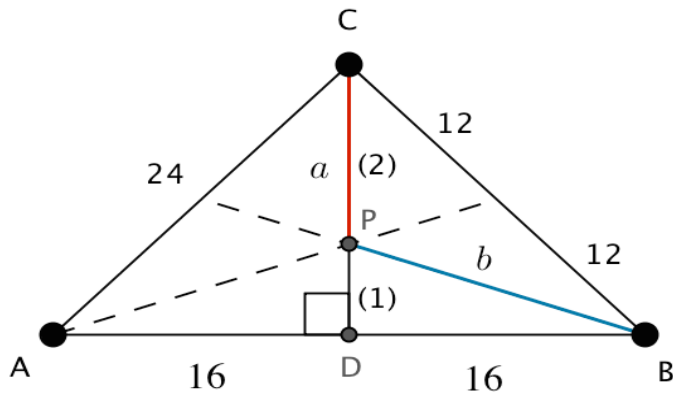
$$x = \frac{567}{63} = 9$$

$$21 - x = 21 - 9 = 12$$

Osien pituudet ovat 9 ja 12.

Vastaus 9 ja 12

K34



Kolmion painopiste on mediaanien leikkauspiste, joka jakaa mediaanit suhteessa 2 : 1 kärjestä lukien.

Tasakylkisen kolmion kannalle piirretty korkeusjana on samalla mediaani. Lasketaan kolmion korkeus.

$$24^2 = 16^2 + |CD|^2$$

$$|CD|^2 = 24^2 - 16^2 = 320$$

$$|CD| = (\pm)\sqrt{320} = \sqrt{16 \cdot 20} = \sqrt{16 \cdot 4 \cdot 5} = 4 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} = 8\sqrt{5}$$

a) Painopisteen P etäisyys huippukulman kärjestä:

$$a = \frac{2}{3}|CD| = \frac{2}{3} \cdot 8\sqrt{5} = \frac{16}{3}\sqrt{5}$$

b) Painopisteen P etäisyys kantakulman kärjestä:

$$b^2 = |PD|^2 + 16^2$$

$$= \left(\frac{1}{3} |CD| \right)^2 + 16^2$$

$$= \left(\frac{1}{3} \cdot 8\sqrt{5} \right)^2 + 16^2$$

$$= \frac{2624}{9}$$

$$b = (\pm) \sqrt{\frac{2624}{9}} = \frac{\sqrt{64 \cdot 41}}{3} = \frac{8\sqrt{41}}{3}$$

Vastaus a) $\frac{16}{3}\sqrt{5}$ b) $\frac{8\sqrt{41}}{3}$

K35

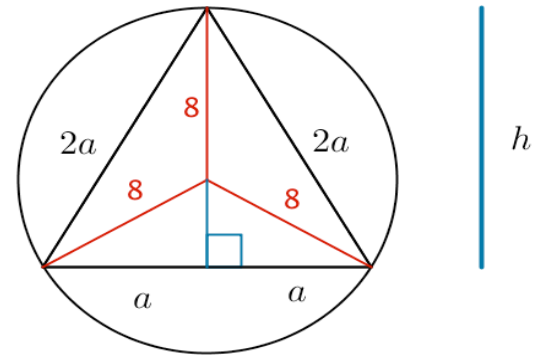
Merkitään tasasivuisen kolmion sivun pituutta $2a$:lla ja korkeutta h :lla.

Lasketaan korkeus h .

$$(2a)^2 = a^2 + h^2$$

$$h^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2$$

$$h = (\pm)\sqrt{3a^2} = \sqrt{3}|a| = \sqrt{3}a \quad | \quad a > 0$$



Muodostetaan yhtälö Pythagoraan lauseen avulla.

$$8^2 = a^2 + (h-8)^2$$

$$8^2 = a^2 + (\sqrt{3}a - 8)^2$$

$$8^2 = a^2 + (\sqrt{3}a)^2 - 2 \cdot \sqrt{3}a \cdot 8 + 8^2$$

$$a^2 + 3a^2 = 16\sqrt{3}a$$

$$4a^2 = 16\sqrt{3}a \quad | :4a (>0)$$

$$a = 4\sqrt{3}$$

Kolmion sivun pituus on

$$2a = 2 \cdot 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$$

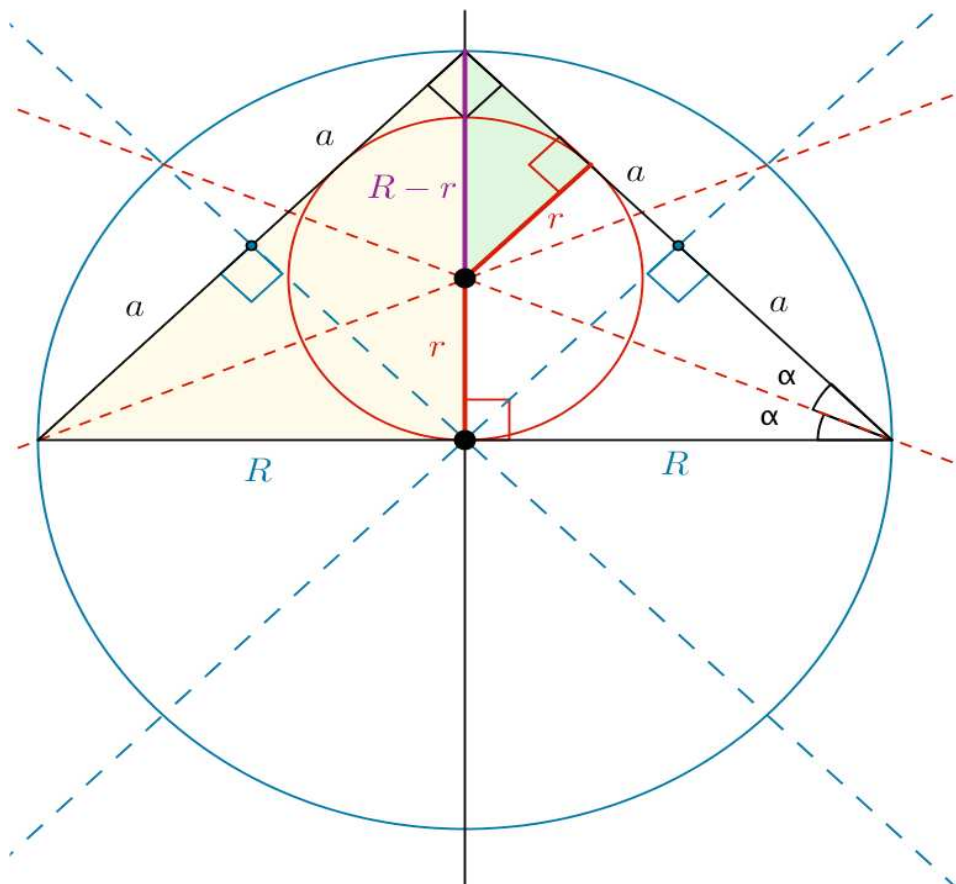
Vastaus $8\sqrt{3}$

K36

Piirretään tilanteesta mallikuva. Merkitään kolmion kyljen pituutta $2a$:lla.

Kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste on sivujen keskinormaalien leikkauspiste. Tasakylkisen kolmion korkeusjana on eräs keskinormaaleista.

Kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste on kulmanpuolittajien leikkauspiste. Tasakylkisen kolmion korkeusjana on eräs kulmanpuolittaja.



On laskettava suhde $\frac{R}{r}$.

Kolmion kannan puolikas on ympäri piirretyn ympyrän säde R .

$$(2R)^2 = (2a)^2 + (2a)^2$$

$$4R^2 = 4a^2 + 4a^2$$

$$4R^2 = 8a^2$$

$$R^2 = 2a^2$$

$$R = (\pm)\sqrt{2}a = \sqrt{2}a$$

Kuvaan merkityt keltainen ja vihreä kolmio ovat yhdenmuotoiset (kk, molemmissa huippukulman puolikas ja suora kulma).

Vastinjanojen suhde on vakio. Muodostetaan yhtälö.

$$\frac{R-r}{2a} = \frac{r}{R}$$

$$R^2 - rR = 2ar \quad \Big| \quad R = \sqrt{2}a$$

$$(\sqrt{2}a)^2 - r \cdot \sqrt{2}a = 2ar$$

$$2a^2 = 2ar + \sqrt{2}ar$$

$$2a^2 = ar(2 + \sqrt{2})$$

$$r = \frac{2a^2}{a(2 + \sqrt{2})} = \frac{2a}{2 + \sqrt{2}}$$

Kysytty suhde on

$$\begin{aligned}\frac{R}{r} &= \frac{\sqrt{2}a}{\frac{2a}{2+\sqrt{2}}} \\ &= \frac{\sqrt{2}\cancel{a} \cdot (2+\sqrt{2})}{2\cancel{a}} \\ &= \frac{2\sqrt{2}+2}{2} \\ &= \frac{2(\sqrt{2}+1)}{2} \\ &= \sqrt{2}+1\end{aligned}$$

Vastaus $\sqrt{2}+1$

K37

Perhepizza: halkaisija $d = 35$ cm

$$\text{säde} \quad r_p = \frac{35}{2}$$

Normaalipizza ja perhepizza ovat yhdenmuotoiset. Pinta-alojen suhde on 1 : 2. Säteiden suhteen neliö on pinta-alojen suhde. Olkoon normaalipizzan säde r_n .

$$\left(\frac{r_n}{r_p} \right)^2 = \frac{1}{2}$$

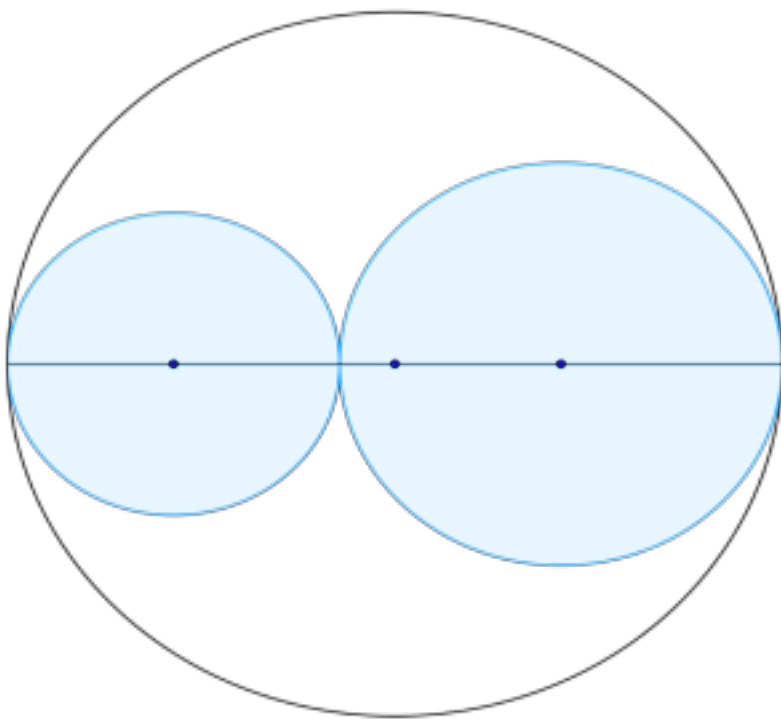
$$\frac{r_n}{r_p} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$r_n = \frac{1}{\sqrt{2}} r_p = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{35}{2}$$

$$d = 2r_n = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{35}{2} \approx 25$$

Vastaus 25 cm

K38



Pienten ympyröiden säteet ovat $\frac{3}{2} \text{ cm} = 1,5 \text{ cm}$ ja $\frac{4}{2} \text{ cm} = 2 \text{ cm}$.

Pienten ympyröiden pinta-ala yhteensä on $\pi \cdot 1,5^2 + \pi \cdot 2^2 = 6,25\pi$.

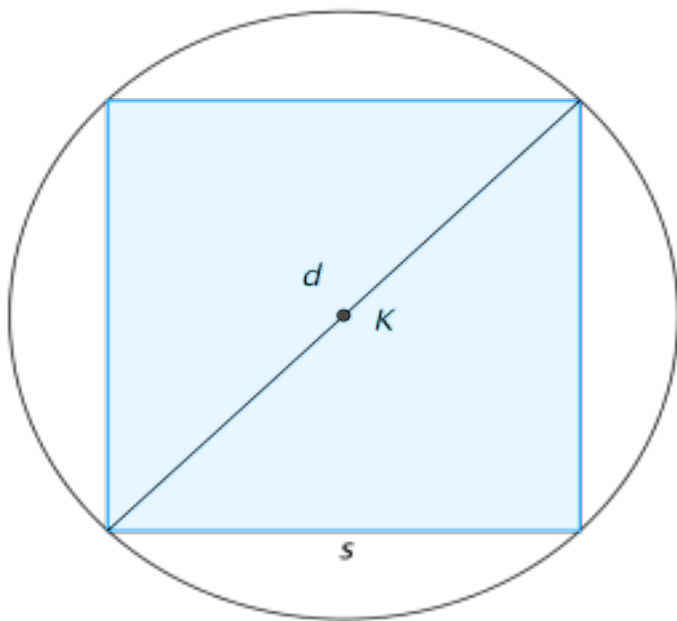
Ison ympyrän halkaisija on pikkuympyröiden halkaisijoiden summa, joten sen säde on $\frac{3+4}{2} \text{ cm} = 3,5 \text{ cm}$.

Ison ympyrän ala $\pi \cdot 3,5^2 = 12,25\pi$.

Alojen suhde $\frac{6,25\pi}{12,25\pi} = \frac{6,25}{12,25} = 0,510... \approx 0,51 = 51\%$

Vastaus 51 %

K39



Neliön piirin pituus on $4s$.

Olkoon neliön sivun pituus s , tällöin ympyrän halkaisija $d = s\sqrt{2}$.

Ympyrän kehän pituus $p = \pi d = \pi s\sqrt{2}$.

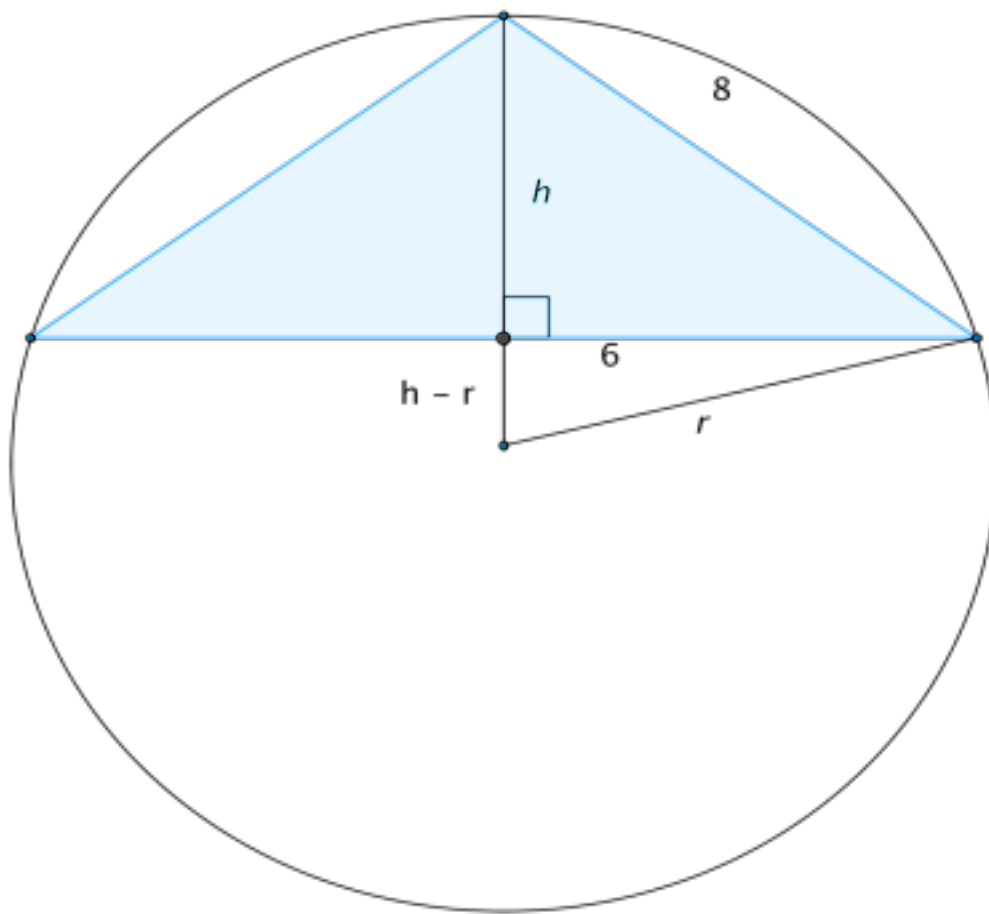
Lasketaan kehän pituuden ja neliön piirin suhde.

$$\frac{\pi s\sqrt{2}}{4s} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} \approx 1,11$$

Neliön piiri on 11 % pidempi

Vastaus 11 %

K40



Ratkaistaan kolmion korkeus h Pythagoraan lauseella.

$$h^2 = 8^2 - 6^2 = 18$$

Ratkaistaan ympyrän säde Pythagoraan lauseella.

$$r^2 = (h - r)^2 + 6^2$$

$$r^2 = h^2 - 2hr + r^2 + 36$$

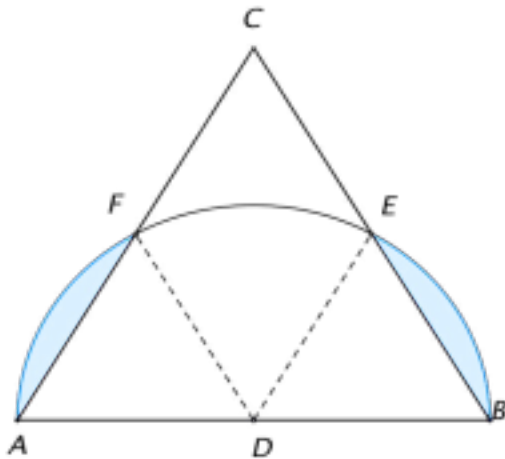
$$2hr = h^2 + 36$$

$$r = \frac{h^2 + 36}{2h} = \frac{18 + 36}{2 \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{9}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Kehän pituus } p = 2\pi r = 2\pi \cdot \frac{9}{\sqrt{2}} = 9\sqrt{2}\pi \approx 40,0$$

$$\text{Vastaus } 9\sqrt{2}\pi \approx 40,0$$

K41



b) Olkoon puoliympyrän säde r . Ympyrän kaaria vastaavat keskuskulmat ovat 60° , koska kolmiot DBE ja ADE ovat tasasivuisia kolmioita, sivun pituus on r .

Puoliympyrästä jää kolmion ulkopuolelle kaksi segmenttiä.

Lasketaan segmentin pinta-ala.

$$A_s = \frac{60}{360} \cdot \pi r^2 - \frac{r^2 \sqrt{3}}{4}$$

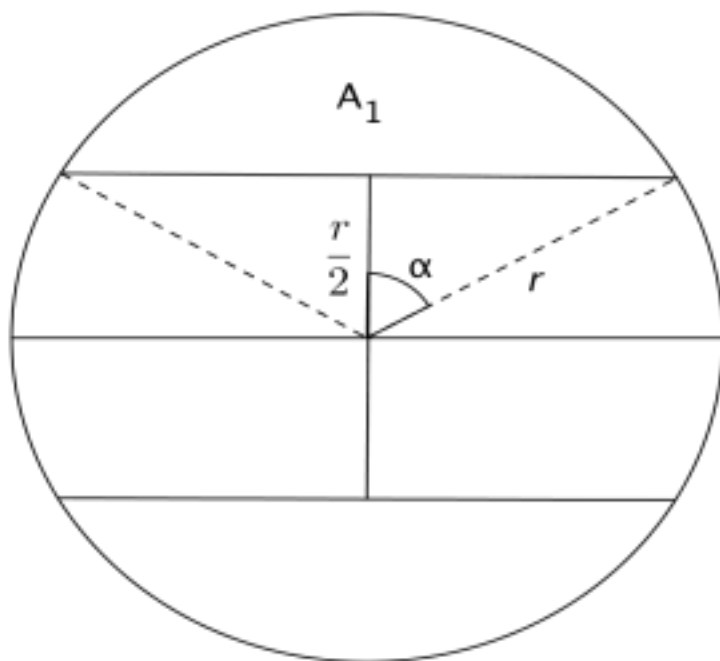
Puoliympyrän ala $A_p = \frac{1}{2} \pi r^2$,

$$\frac{2A_s}{A_p} = \frac{2 \left(\frac{\pi r^2}{6} - \frac{r^2 \sqrt{3}}{4} \right)}{\frac{1}{2} \pi r^2} = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{\pi} = 0,1153... \approx 0,12$$

Puoliympyrästä jää kolmion ulkopuolelle 12 %

Vastaus 12 %

K42



Viipaleita on kahdenlaisia, kaksi ympyräsegmenttiä ja neljä keskelle jäävää viipaletta.

Pizzan pinta-ala $A = \pi r^2$

Lasketaan segmentin A_1 pinta-ala.

Määritetään kulma α

$$\cos \alpha = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = 60^\circ$$

Keskuskulma $2\alpha = 120^\circ$

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{120}{360} \cdot \pi r^2 - \frac{1}{2} \cdot \sin 120^\circ r^2 \\ &= \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) r^2 \approx 0,614 r^2 \end{aligned}$$

Keskelle jäävän viipaleen pinta-ala

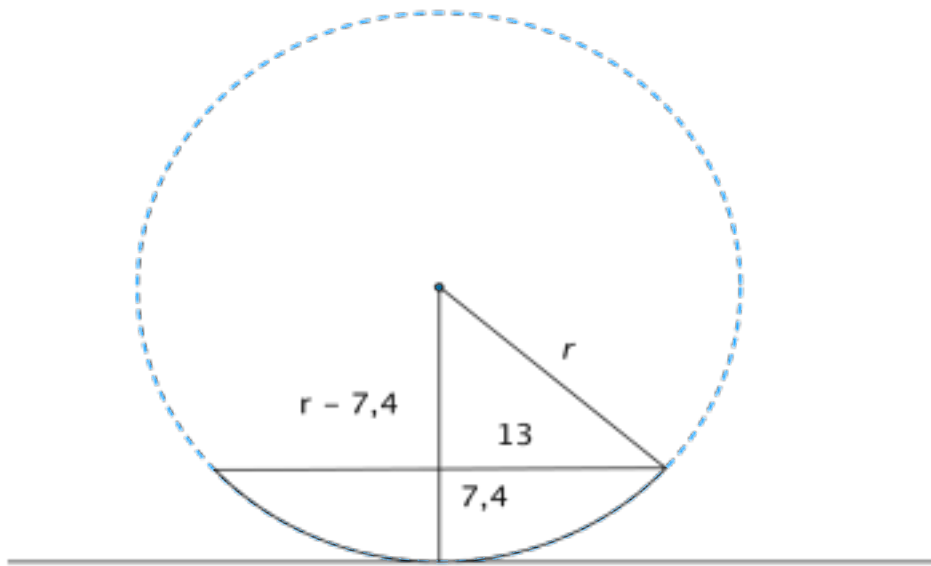
$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{1}{4}(A - 2A_1) \\ &= \frac{1}{4}\left(\pi r^2 - 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)r^2\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)r^2 \approx 0,478r^2 \end{aligned}$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)r^2}{\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)r^2} \approx 1,284$$

Reunaviipaleen viipaleen pinta-ala on 28 % suurempi.

Vastaus Reunaviipale, 28 %

K43



Käytetään kuvan merkintöjä.

Pythagoraan lauseella saadaan

$$r^2 = (r - 7,4)^2 + 13^2$$

$$r^2 = r^2 - 14,8r + 54,76 + 169$$

$$14,8r = 223,76$$

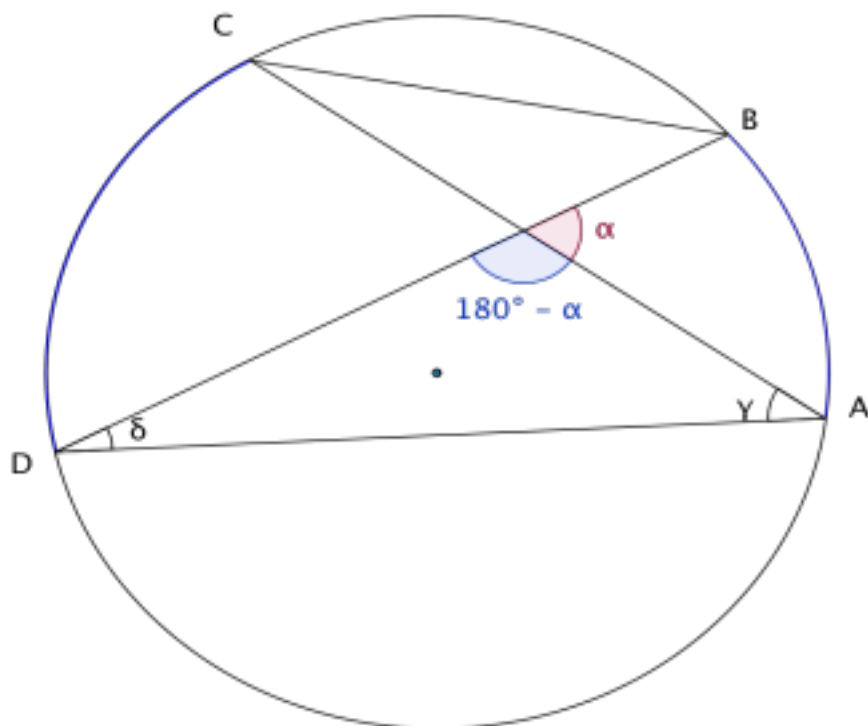
$$r = 15,11\dots$$

$$d = 2r = 30,23\dots$$

Halkaisija on 30 cm

Vastaus 30 cm

K44



Kuvan merkinnöillä kaaren AB asteluku on 2δ ja kaaren CD asteluku on 2γ . Kaarten astelukujen keskiarvo on

$$\frac{2\gamma + 2\delta}{2} = \gamma + \delta$$

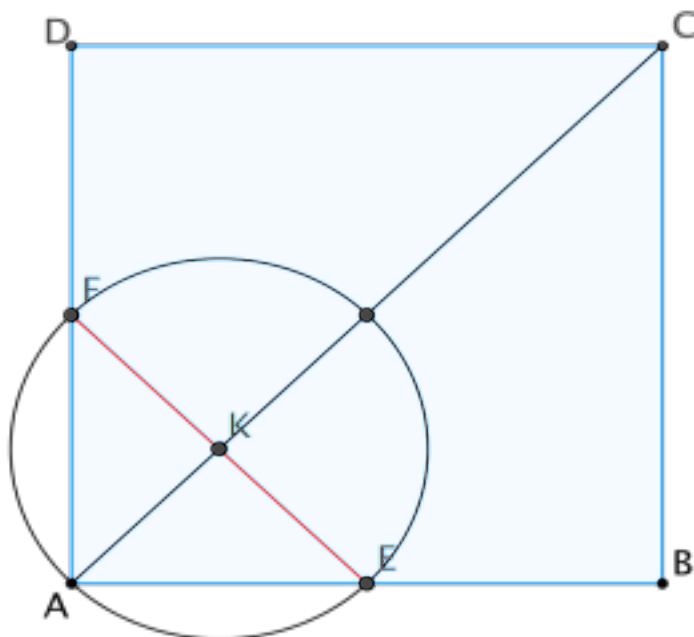
Kolmion DAE kulmien summan avulla saadaan yhtälö

$$\gamma + \delta + 180^\circ - \alpha = 180^\circ$$

$$\alpha = \gamma + \delta$$

Siis kulman α asteluku on kaarten AB ja CD astelukujen keskiarvo.

K45



Olkoon neliön sivun pituus s . Merkitään ympyrän halkaisijaa kirjaimella d .

Lasketaan ympyrän halkaisija $d = AE$.

$$d^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$$

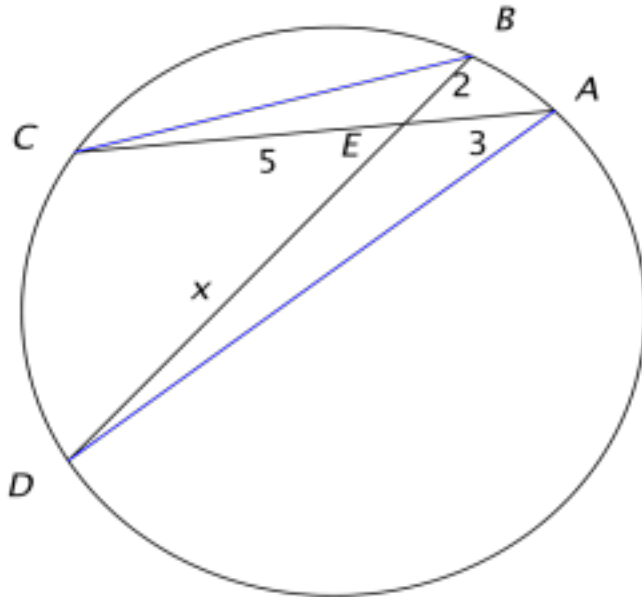
$$d = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$r = \frac{d}{2} = \frac{a}{2\sqrt{2}}$$

Vastaus $\frac{a}{2\sqrt{2}}$

K46

a)

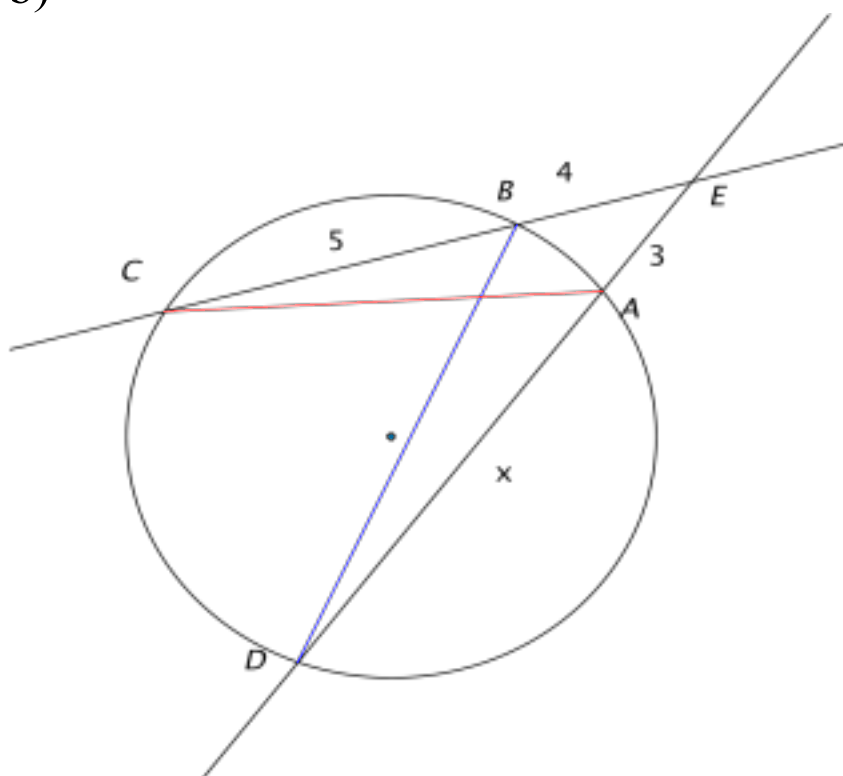


Kolmiot DAE ja CBE ovat yhdenmuotoiset (kk). Kulmat AED ja BEC ovat ristikulmia sekä kulmat EDA ja ECB ovat samaa kaarta vastaavia kehäkulmia.

$$\frac{x}{5} = \frac{3}{2}$$

$$x = 5 \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{2}$$

b)



Kolmiot DBE ja CAE ovat yhdenmuotoiset (kk). Kulma E on yhteinen sekä kulmat D ja C ovat samaa kaarta vastaavat kehäkulmat.

Yhdenmuotoisten kolmioiden vastinosien suhteena saadaan

$$\frac{x+3}{5+4} = \frac{4}{3}$$

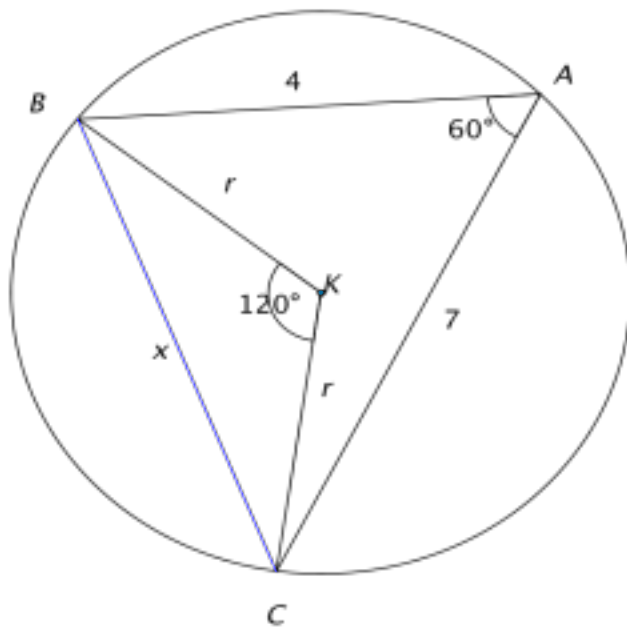
$$\frac{x+3}{9} = \frac{4}{3}$$

$$x+3 = 12$$

$$x = 9$$

Vastaus a) $7\frac{1}{2}$ b) 9

K47



Ratkaistaan jänne AC kosinilauseella.

$$x^2 = 4^2 + 7^2 - 2 \cdot 4 \cdot 7 \cos 60^\circ$$

$$x^2 = 37$$

$$x = \sqrt{37}$$

Ratkaistaan ympyrän säde kosinilauseella.

$$x^2 = r^2 + r^2 - 2r \cdot r \cos 120^\circ$$

$$37 = 3r^2$$

$$r = \sqrt{\frac{37}{3}}$$

Kolmion ABC pinta-ala

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 7 \cdot \sin 60^\circ = 7\sqrt{3}$$

Segmentin pinta-ala

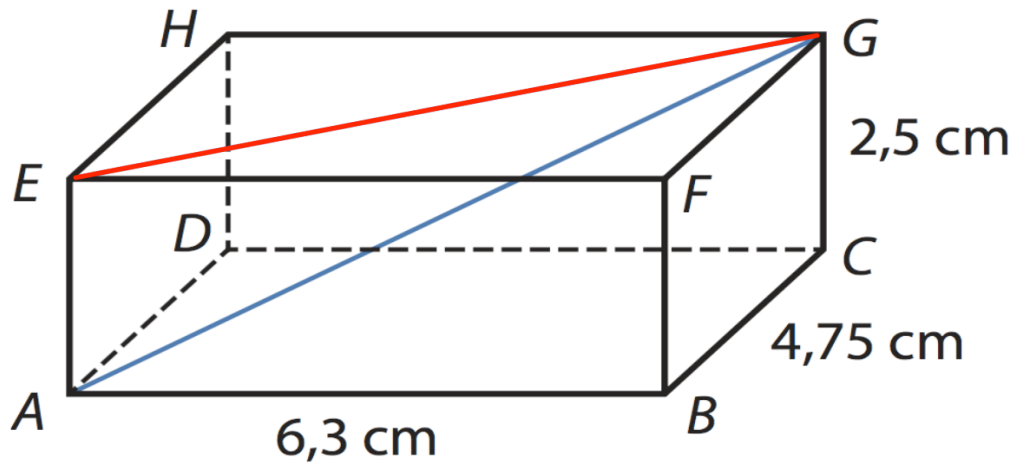
$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{120}{360} \pi \cdot \frac{37}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{37}{3} \cdot \sin 120^\circ \\ &= \frac{37\pi}{9} - \frac{37\sqrt{3}}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 = 7\sqrt{3} + \frac{37\pi}{9} - \frac{37\sqrt{3}}{12} \\ &= \frac{47\sqrt{3}}{12} + \frac{37\pi}{9} \end{aligned}$$

$$\text{Vastaus } \frac{47\sqrt{3}}{12} + \frac{37\pi}{9} \approx 45,5$$

K48

- a) Lasketaan lävistäjän EG pituus suorakulmaisesta kolmiosta EGF .

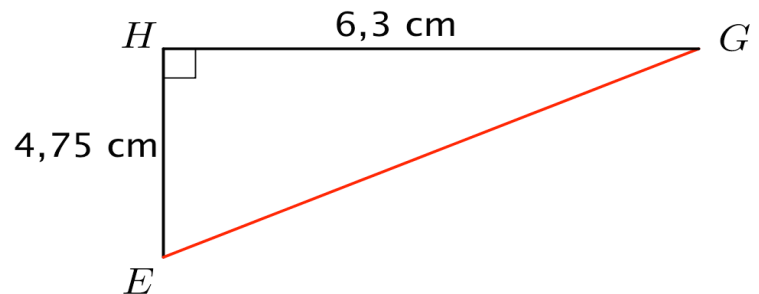


$$|EG|^2 = 4,75^2 + 6,3^2$$

$$|EG|^2 = 62,2525$$

$$|EG| = \pm\sqrt{62,2525}$$

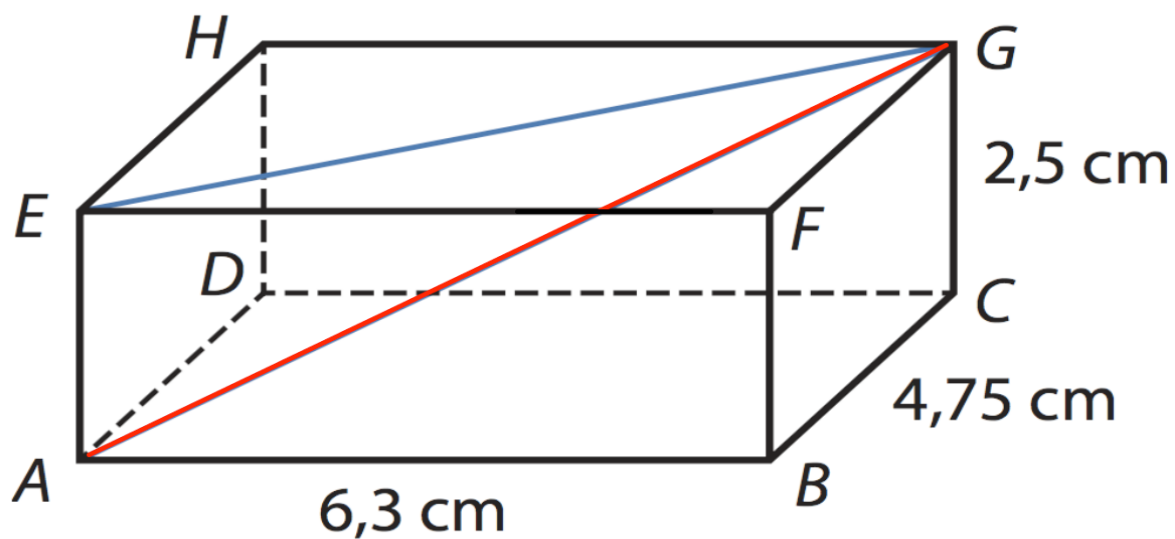
$$= \pm 7,890... \text{ (cm)}$$



Lävistäjän pituus on positiivinen, joten

$$|EG| = 7,890... \text{ cm} \approx 7,9 \text{ cm} .$$

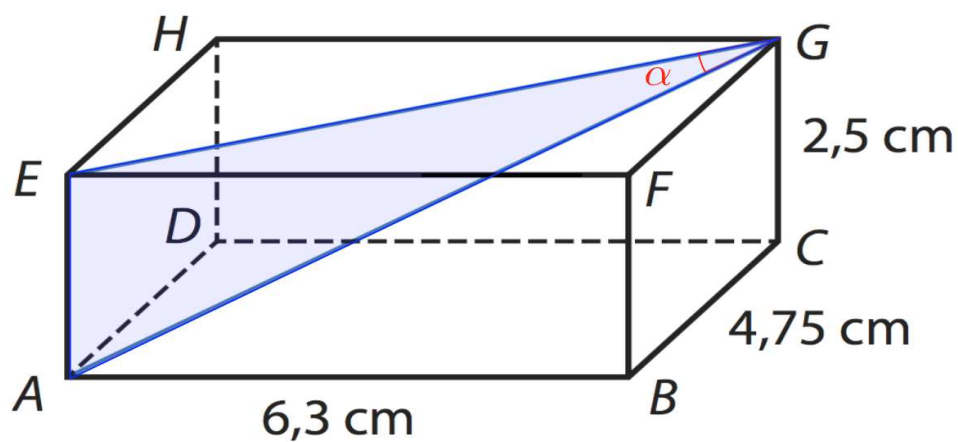
- b) Lasketaan avaruuslävistäjän pituus suorakulmaisen särmiön särmien pituuksien perusteella.



$$|AG| = \sqrt{6,3^2 + 4,75^2 + 2,5^2} = 8,276... \approx 8,3 \text{ (cm)}.$$

Avaruuslävistäjän pituus on 8,3 cm.

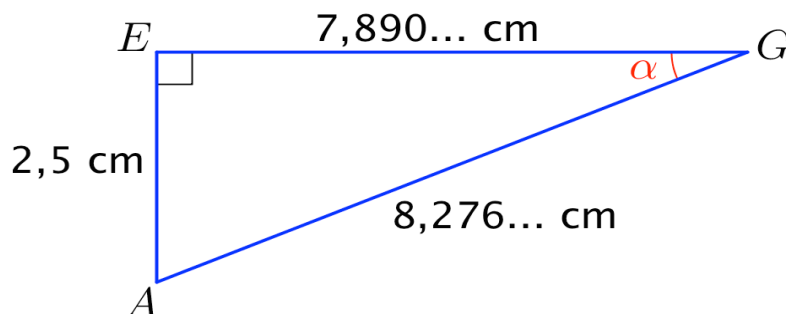
c) Lasketaan lävistäjien välinen kulma α suorakulmaisesta kolmiosta AGE .



$$\tan \alpha = \frac{2,5}{7,890\dots}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{2,5}{7,890\dots}\right)$$

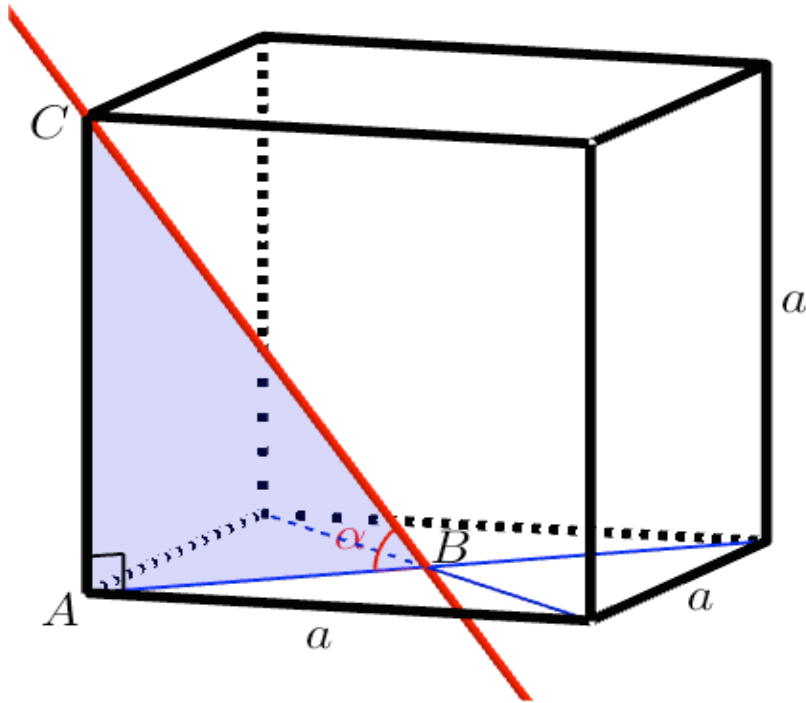
$$= 17,581\dots^\circ \approx 18^\circ$$



Vastaus a) 7,9 cm b) 8,3 cm c) 18°

K49

Merkitään kuution särmän pituutta kirjaimella a . Kysytty kulma α voidaan määrittää suorakulmaisesta kolmiosta ABC .



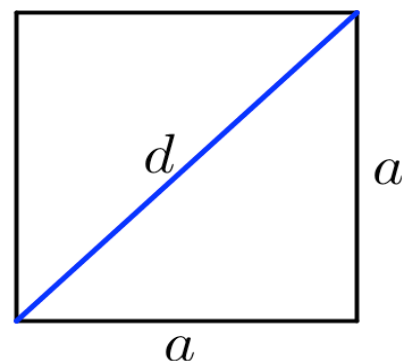
Sivun AB pituus on puolet pohjan lävistäjästä. Lasketaan ensin pohjaneliön lävistäjän pituus.

$$d^2 = a^2 + a^2$$

$$d = \pm\sqrt{2a^2}$$

$$= \pm\sqrt{2} \cdot |a| \quad | \ a > 0$$

$$= \pm a\sqrt{2}$$



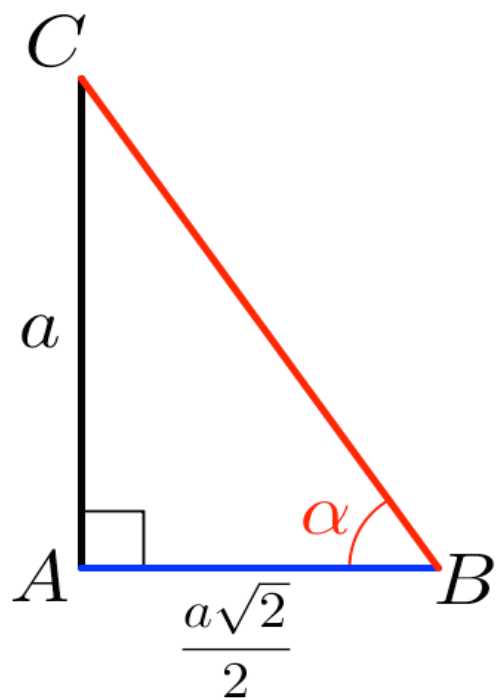
Lävistäjän pituus on positiivinen, joten $d = a\sqrt{2}$.

$$\text{Siis } |AB| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Määritetään kysytty kulma α .

$$\tan \alpha = \frac{a}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \cancel{a} \cdot \frac{2}{\cancel{a}\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\alpha = \tan^{-1} \sqrt{2} = 54,735\dots^\circ \approx 54,7^\circ$$



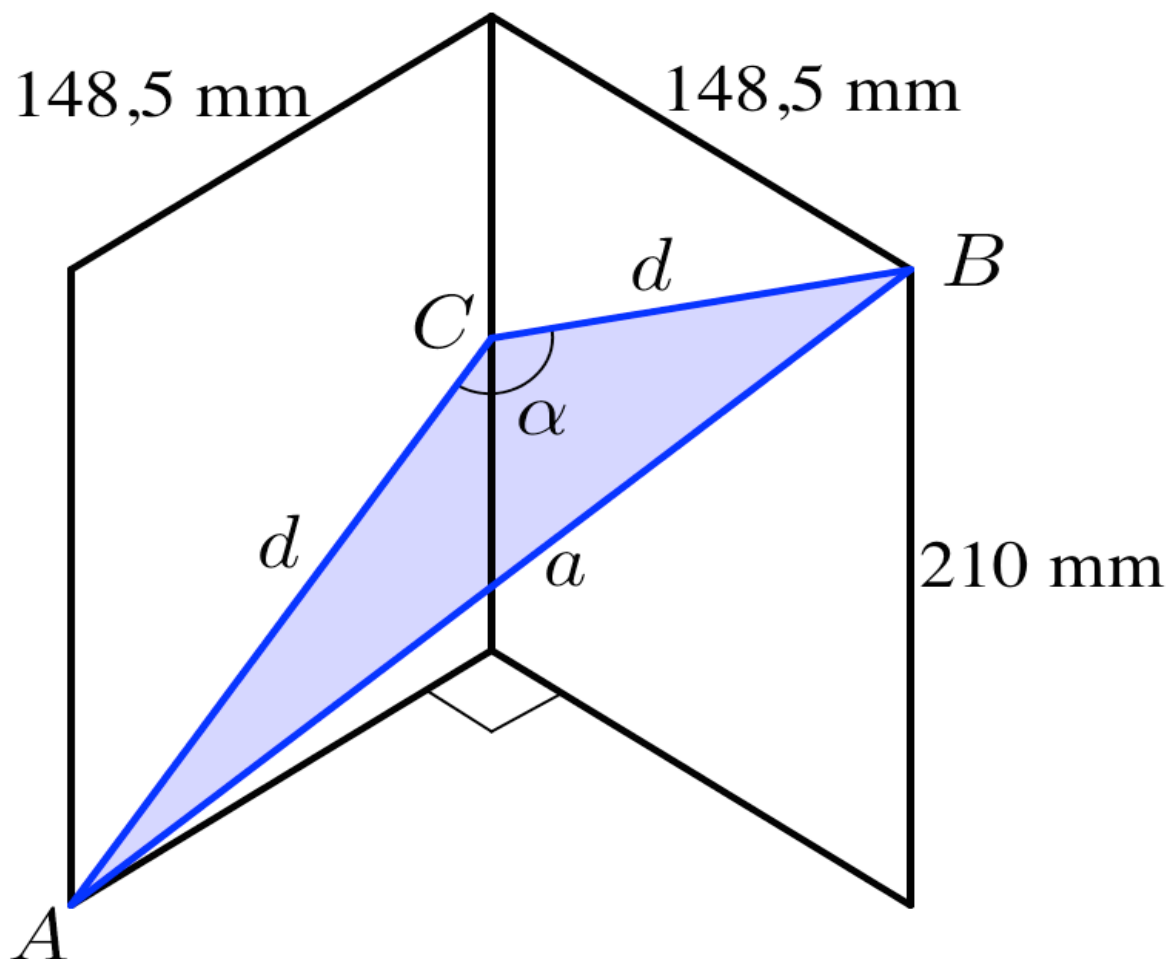
Vastaus $54,7^\circ$

K50

Piirretään mallikuva. Pahvi taitetaan lyhyemmän sivun (210 mm) suuntaisesti, joten taitoksen sivujen pituudet ovat

$$\frac{297 \text{ mm}}{2} = 148,5 \text{ mm} . \text{ Kysytty kulma } \alpha \text{ voidaan ratkaista}$$

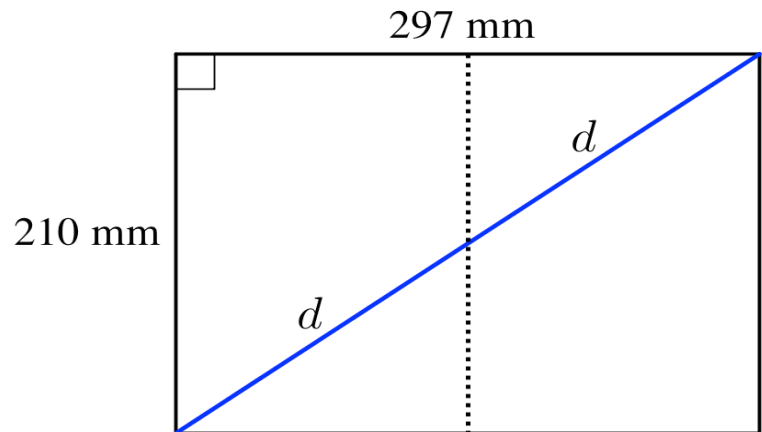
kolmiosta ABC . Merkitään lävistäjän puolikkaan pituutta kirjaimella d ja lävistäjän kärkien etäisyyttä kirjaimella a . Lasketaan ensin näiden sivujen pituudet.



Lasketaan pahvilevyn lävistäjän puolikkaan pituus d Pythagoraan lauseella. Piirretään mallikuva pahvilevystä ennen taittamista

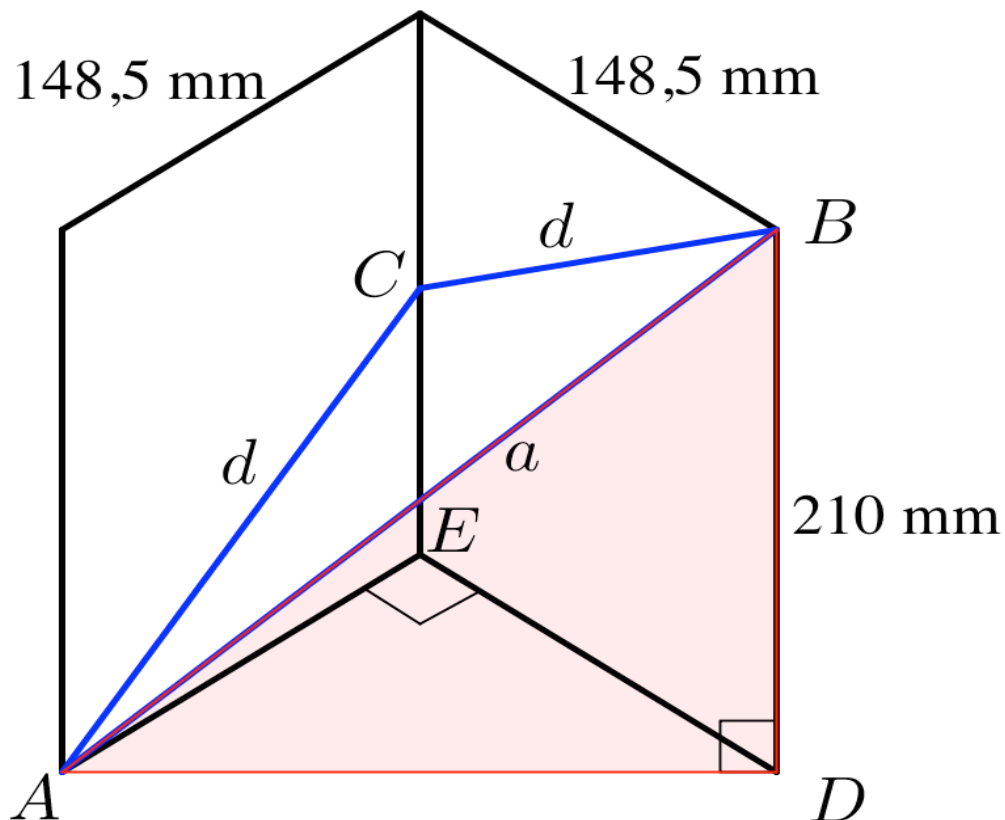
$$(2d)^2 = 210^2 + 297^2$$

$$d = \pm \frac{3\sqrt{14701}}{2} \text{ (mm)}$$



Lävistäjän pituus on positiivinen, joten $d = \frac{3\sqrt{14701}}{2}$ mm.

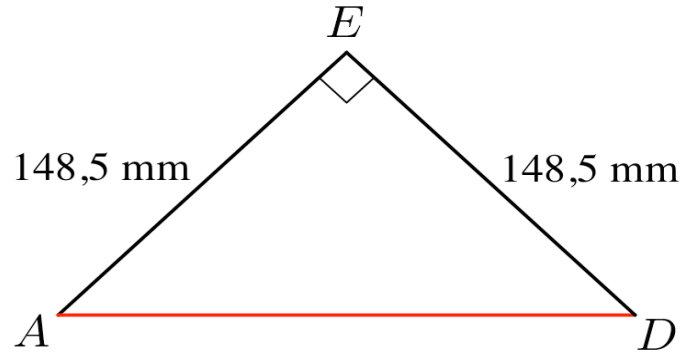
Lävistäjän kärkien välinen etäisyys taitetussa pahvilevyssä a voidaan laskea suorakulmaisesta kolmiosta ADB , kunhan ensin ratkaistaan sivun AD pituus suorakulmaisesta kolmiosta ADE .



Lasketaan sivun AD pituus.

$$|AD|^2 = 148,5^2 + 148,5^2$$

$$|AD| = \pm \frac{297\sqrt{2}}{2} \text{ (mm)}$$

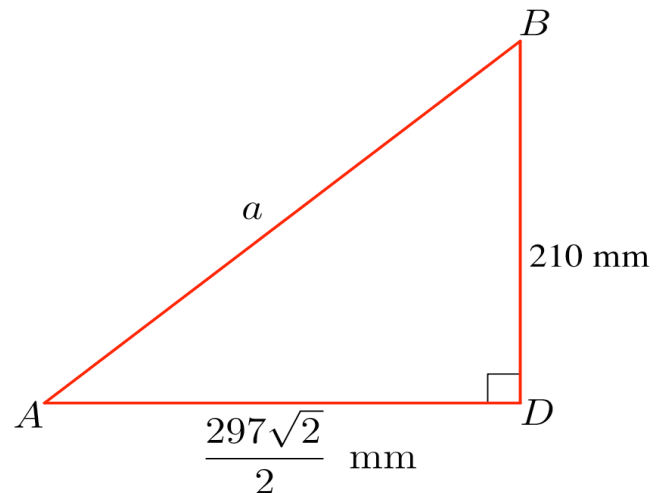


Sivun pituus on positiivinen, joten $|AD| = \frac{297\sqrt{2}}{2}$.

Lasketaan sivun AB pituus eli a .

$$a^2 = 210^2 + \left(\frac{297\sqrt{2}}{2} \right)^2$$

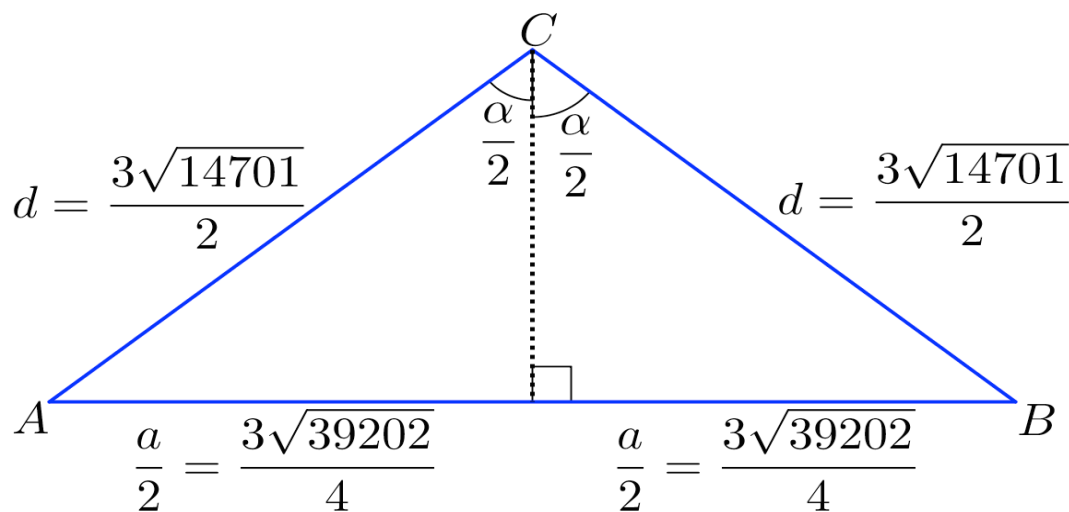
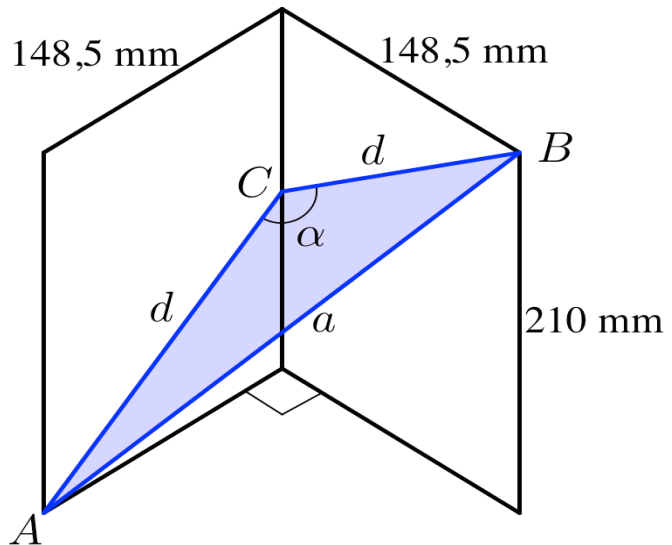
$$a = \pm \frac{3\sqrt{39202}}{2} \text{ (mm)}$$



Sivun pituus on positiivinen, joten $a = \frac{3\sqrt{39202}}{2} \text{ mm}$.

Lasketaan lopuksi kysytyn kulman α suuruus tasakylkisestä kolmiosta ABC .

Koska kolmio on tasakylkinen, niin huippukulmasta piirretty korkeusjana jakaa kolmion kahdeksi suorakulmaiseksi kolmioksi.



$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{3\sqrt{39202}}{4}}{\frac{3\sqrt{14701}}{2}} = 0,816...$$

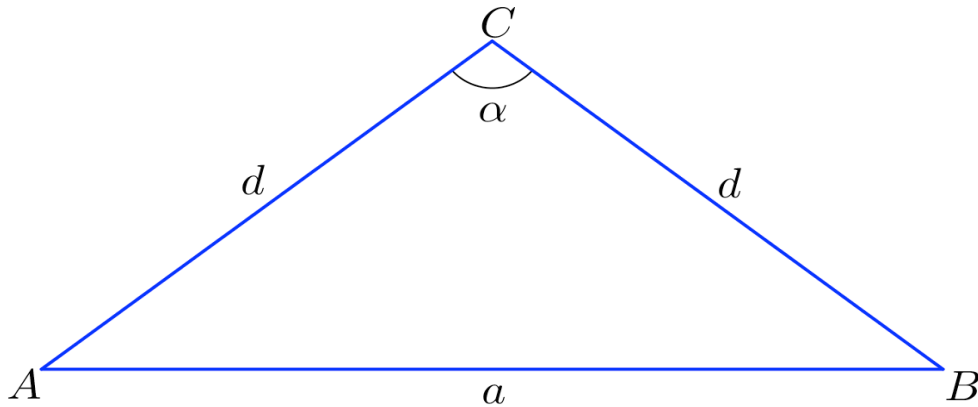
$$\frac{\alpha}{2} = \sin^{-1} 0,816... = 54,734...^{\circ} \quad | \cdot 2$$

$$\alpha = 109,469...^{\circ} \approx 109^{\circ}$$

Vastaus 109°

Huomautus 1:

Kulma α voidaan määrittää kolmiosta ABC myös kosinilauseella.



$$a^2 = d^2 + d^2 - 2 \cdot d \cdot d \cdot \cos \alpha$$

Huomautus 2

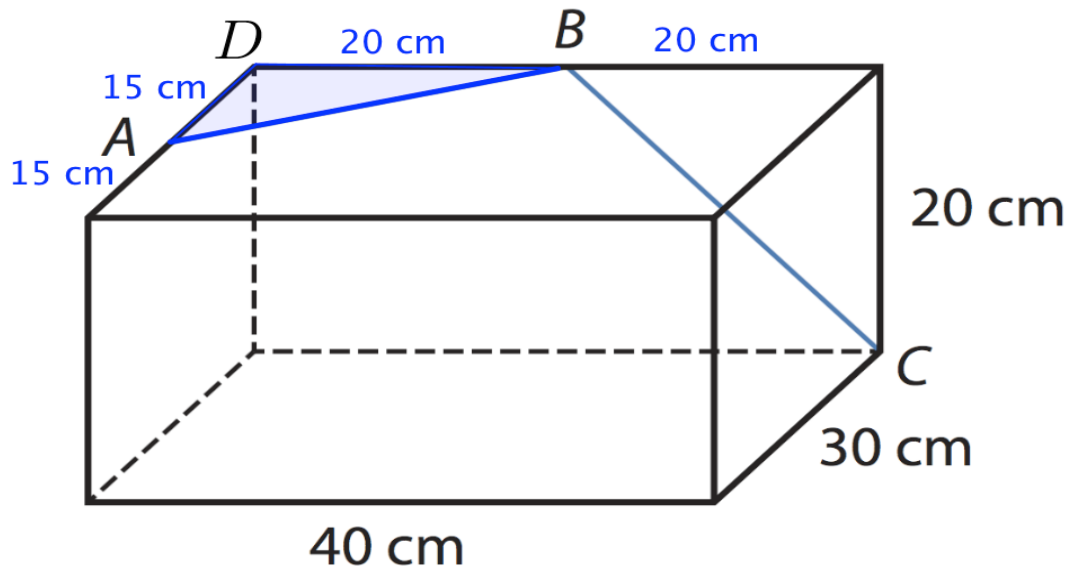
Laskuissa voi käyttää pituuksista a ja d myös tarkkoja desimaalimuotoja laskimella:

$$d = 181,871... \text{ (mm)}$$

$$a = 292,992... \text{ (mm)}.$$

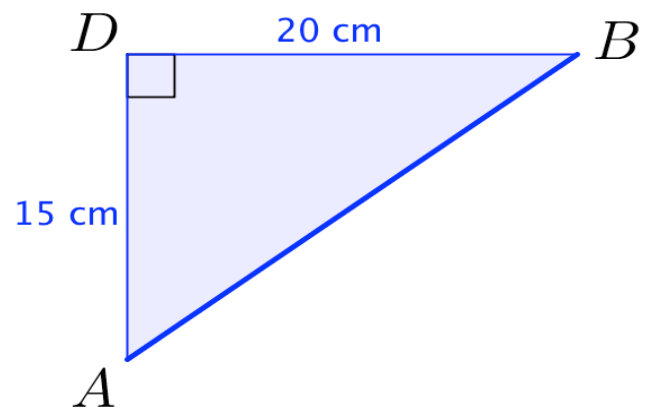
K51

- a) Lasketaan janan AB pituus suorakulmaisesta kolmiosta ABD Pythagoraan lauseella.



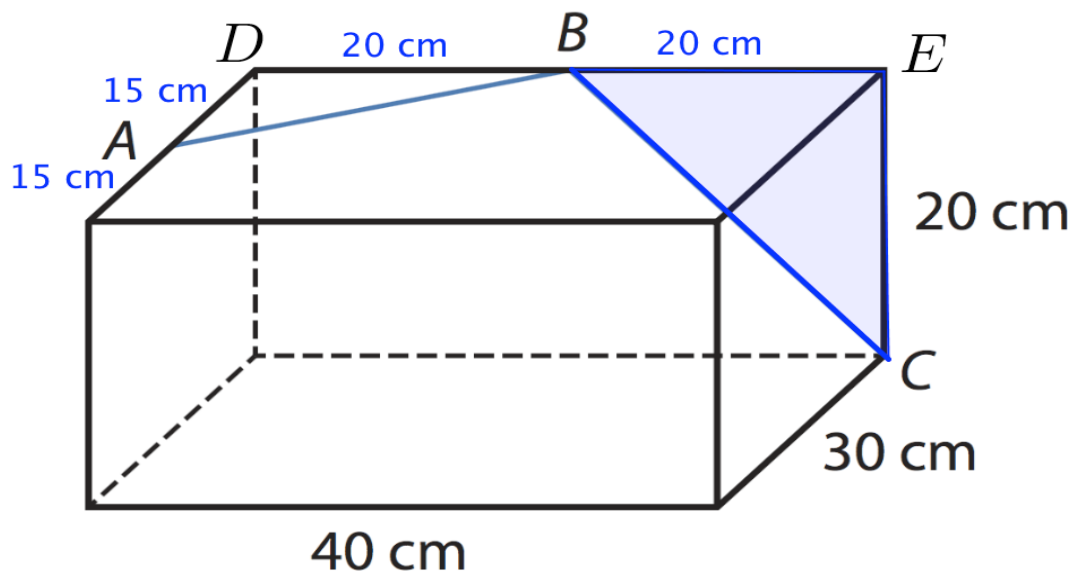
$$|AB|^2 = 15^2 + 20^2$$

$$|AB| = \pm\sqrt{625} = \pm 25 \text{ (cm)}$$



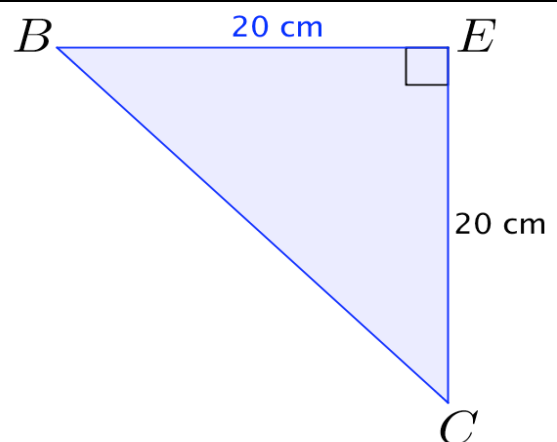
Janan pituus on positiivinen, joten $|AB| = 25 \text{ cm}$.

- b) Lasketaan janan BC pituus suorakulmaisesta kolmiosta BCE Pythagoraan lauseella.



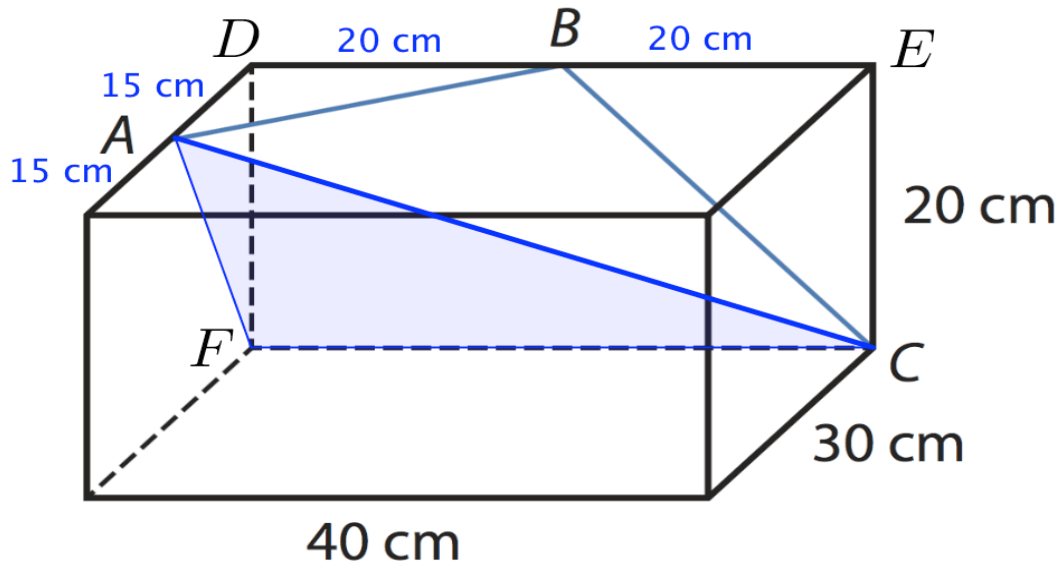
$$|BC|^2 = 20^2 + 20^2$$

$$|BC| = \pm 20\sqrt{2} = \pm 28,284... \text{ (cm)}$$



Janan pituus on positiivinen, joten $|BC| = 28,284... \text{ cm} \approx 28 \text{ cm}$.

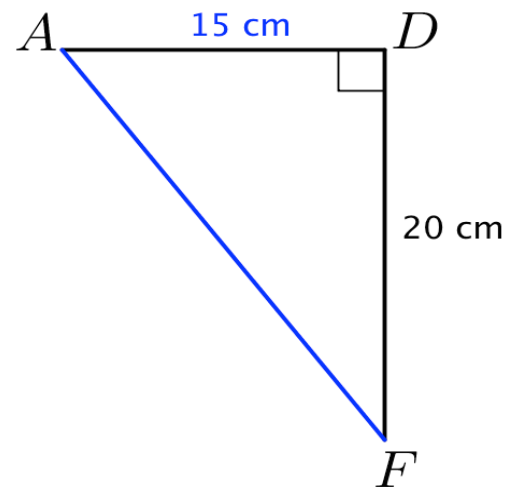
- c) Lasketaan janan AC pituus suorakulmaisesta kolmiosta AFC .
Ensin pitää laskea janan AF pituus suorakulmaisesta kolmiosta AFD .



$$|AF|^2 = 15^2 + 20^2$$

$$|AF| = \pm\sqrt{625} = \pm 25 \text{ (cm)}$$

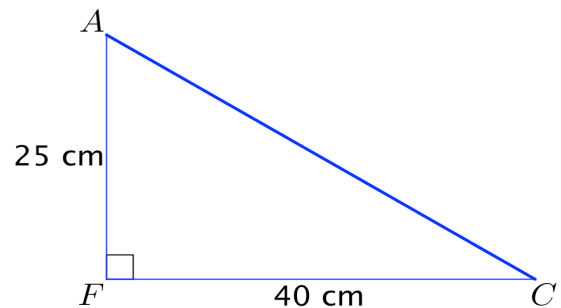
Janan pituus on positiivinen,
joten $|AF| = 25 \text{ cm}$.



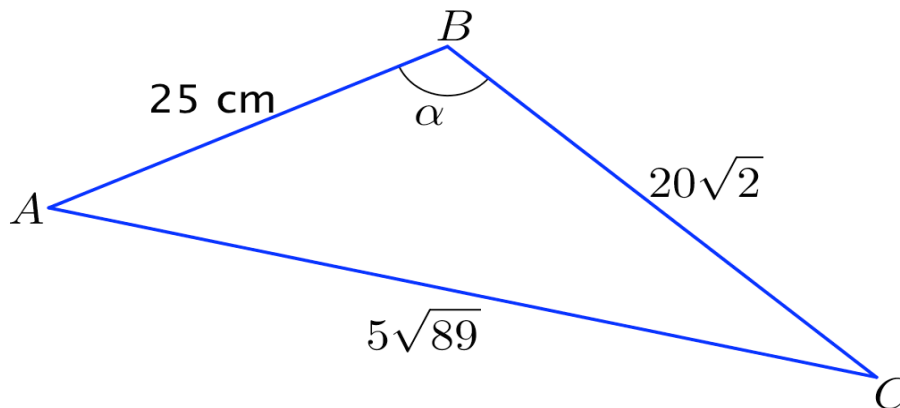
$$|AC|^2 = 25^2 + 40^2$$

$$|AC| = \pm 5\sqrt{89} = \pm 47,169... \text{ (cm)}$$

Janan pituus on positiivinen, joten
 $|AC| = 47,169... \text{ cm} \approx 47 \text{ cm}$.



- d) Lasketaan janojen AB ja BC välinen kulma kolmiosta ACB kosinilauseella.



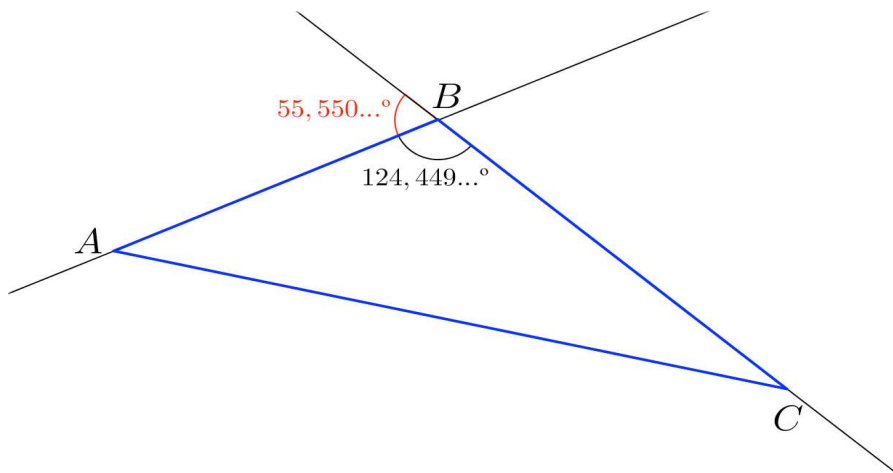
$$\left(5\sqrt{89}\right)^2 = 25^2 + \left(20\sqrt{2}\right)^2 - 2 \cdot 25 \cdot 20\sqrt{2} \cdot \cos \alpha$$

$$1000\sqrt{2} \cdot \cos \alpha = 625 + 800 - 2225$$

$$\cos \alpha = \frac{-800}{1000\sqrt{2}}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{-800}{1000\sqrt{2}}\right) = 124,449\dots^\circ$$

Koska suorien välinen kulma on välillä $[0^\circ, 90^\circ]$, niin suorien AB ja BC välinen kulma on $180^\circ - 124,449\dots^\circ = 55,550\dots^\circ \approx 56^\circ$.



Vastaus a) 25 cm b) 28 cm
 c) 47 cm d) 56°

K52

Lasketaan pallon säde tilavuuden avulla.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \left| V = 7,45 \text{ L} = 7,45 \text{ dm}^3 \right.$$

$$7,45 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$3 \cdot 7,45 = 4\pi r^3$$

$$r^3 = \frac{3 \cdot 7,45}{4\pi}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 7,45}{4\pi}} = 1,211... \text{ (dm)}$$

Pallon pinta-ala:

$$A = 4\pi r^2$$

$$= 4\pi \cdot (1,211...)^2$$

$$= 18,446... \text{ (dm}^2\text{)}$$

Pallon pinta-ala on $18,446... \text{ dm}^2 = 1844,6... \text{ cm}^2 \approx 1845 \text{ cm}^2$.

Vastaus 1845 cm^2

K53

Pallon säde on alussa $r_1 = r$.

Säde pienenee 25 %, joten säde lopussa $r_2 = 0,75r$.

a) Pinta-alan muutos:

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{4\pi r_2^2}{4\pi r_1^2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{(0,75r)^2}{r^2} = 0,75^2 = 0,5625 = 56,25 \%$$

Pinta-ala pienenee $100 \% - 56,25 \% = 43,75 \% \approx 44 \%$

b) Tilavuuden muutos:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{4}{3}\pi r_2^3}{\frac{4}{3}\pi r_1^3} = \frac{r_2^3}{r_1^3} = \left(\frac{0,75r}{r}\right)^3 = 0,75^3 = 0,4218... = 42,18... \%$$

Tilavuus pienenee $100 \% - 42,18 \% = 57,81 \% \approx 58 \%$.

Vastaus a) 44 % b) 58 %

K54

Pallon säde on alussa r ja tilavuus $V_1 = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Lopussa puolipallon säde on R ja tilavuus $V_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$.

Tilavuus säilyy samana. Muodostetaan yhtälö.

$$V_1 = V_2$$

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \quad \left| \cdot \frac{3}{4\pi} \right.$$

$$r^3 = \frac{1}{2} \cdot R^3$$

$$2r^3 = R^3$$

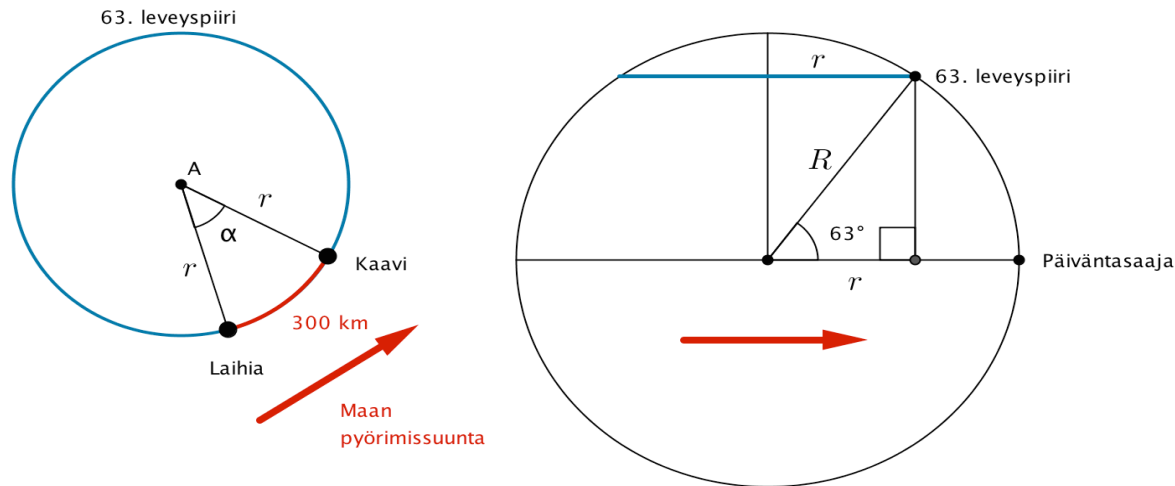
$$\frac{R^3}{r^3} = 2$$

$$\frac{R}{r} = \sqrt[3]{2} = 1,2599... = 125,99... \%$$

Säde suurenee $125,99... \% - 100 \% = 25,99... \% \approx 26 \%$.

Vastaus 26 %

K55



Lasketaan 63. leveyspiirin säde r .

$$\cos 63^\circ = \frac{r}{R}$$

$$r = R \cos 63^\circ \quad \left| \begin{array}{l} R = 6370 \text{ km} \end{array} \right.$$

$$= 6370 \cdot \cos 63^\circ$$

$$= 2891,919... \text{ (km)}$$

Lasketaan 330 km pituisen leveyspiirin kaarta vastaava keskuskulma.

$$b = \frac{\alpha}{360^\circ} 2\pi r$$

$$\alpha = \frac{360^\circ \cdot b}{2\pi r}$$

$$\left| \begin{array}{l} r = 2891,919... \text{ km} \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} b = 330 \text{ km} \end{array} \right.$$

$$= \frac{360^\circ \cdot 330}{2\pi \cdot 2891,919...}$$

$$= 6,538...^\circ$$

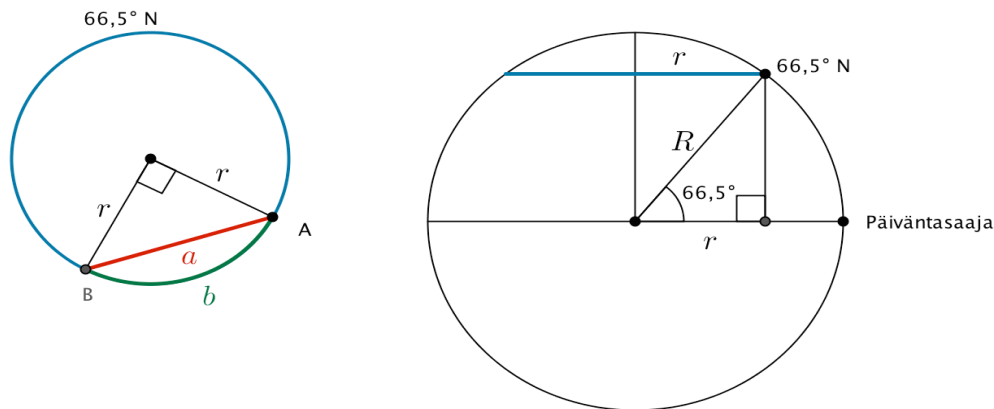
Maan täysi 360° kierros kestää 24 h, joten $6,538\dots^\circ$ kiertymiseen kuluu aikaa

$$\frac{6,538\dots^\circ}{360^\circ} \cdot 24 \text{ h} = 0,4358 \text{ h} = 26,152\dots \text{ min} \approx 26 \text{ min}.$$

Aurinko nousee lännempänä olevalla Laihialla 26 minuuttia myöhemmin kuin Kaavilla.

Vastaus 26 min

K56



Lasketaan pohjoisen napapiirin säde.

$$\cos 66,5^{\circ} = \frac{r}{R}$$

$$r = R \cos 66,5^\circ \quad | \quad R = 6371 \text{ km}$$

$$= 6371 \cdot \cos 66,5^\circ$$

$$= 2540,430... \text{ (km)}$$

- a) Pisteiden A ja B välisen tunnelin pituus on kantana suorakulmaisessa tasakylkisessä kolmiossa, jonka kylkenä on napapiirin säde r .

$$a^2 = r^2 + r^2$$

$$= 2r^2 \quad \Big| \quad r = 2540,430... \text{ km}$$

$$a = (\pm)\sqrt{2r^2} = \sqrt{2}r = \sqrt{2} \cdot 2540,430... = 3592,71... \approx 3593 \text{ (km)}$$

b) Lyhyemmän napapiirin kaaren pituus:

$$b = \frac{90^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi r = \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 2540,430\dots = 3990,49\dots \approx 3990 \text{ (km)}$$

Vastaus a) 3593 km b) 3990 km

Voi myös tulkita vastauksen tarkkuuden 90° asteen kulman mukaisesti 2 merkitsevän numeron tarkkuudella:

Vastaus a) 3600 km b) 4000 km

K57

Särmiön tilavuus on

$$V = a \cdot b \cdot c$$

$$a = 10,25 \text{ m} = 102,5 \text{ dm}$$

$$b = 6,5 \text{ m} = 65 \text{ dm}$$

$$c = 4,5 \text{ m} = 45 \text{ dm}$$

$$= 102,5 \cdot 65 \cdot 45$$

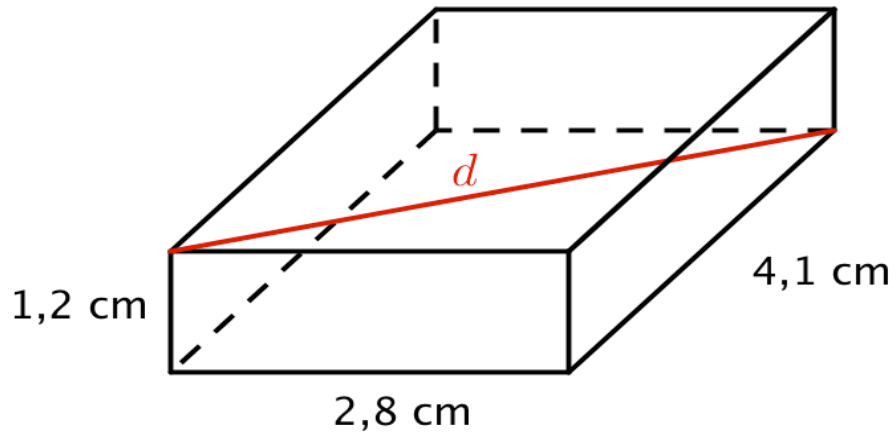
$$= 299\,812,5$$

$$\approx 300\,000 \text{ L}$$

Luokkaan mahtuu 300 000 litraa ilmaa.

Vastaus 300 000 L

K58



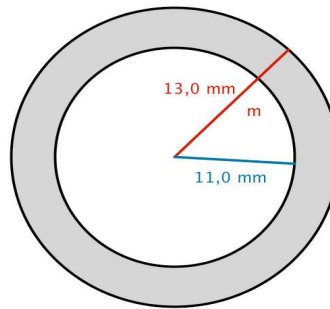
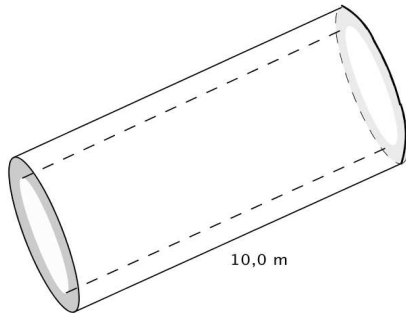
Lasketaan suorakulmaisen särmiön muotoisen tulitikkuaskin avaruuslävistäjän pituus.

$$d = \sqrt{1,2^2 + 2,8^2 + 4,1^2} = 5,107... \approx 5,1 \text{ (cm)}$$

Koska avaruuslävistäjän pituus on suurempi kuin parsinneulan pituus, neula mahtuu rasiaan.

Vastaus mahtuu

K59



Lasketaan kupariosan tilavuus.

$$V = V_{ulko} - V_{sisä}$$

$$= \pi r_{ulko}^2 \cdot 10,0 - \pi r_{sisä}^2 \cdot 10,0$$

$$= \pi \cdot 13,0^2 \cdot 10,0 - \pi \cdot 11,0^2 \cdot 10,0 = 1507,96... \text{ (cm}^3\text{)}$$

$$V = A_p h = \pi r^2 h$$

$$r_{ulko} = \frac{26,0}{2} \text{ mm} = 13,0 \text{ mm}$$

$$r_{sisä} = \frac{22,0}{2} \text{ mm} = 11,0 \text{ mm}$$

Lasketaan kuparin massa.

$$m = \rho V$$

$$\rho = 8960 \text{ kg/m}^3$$

$$V = 1507,96... \text{ cm}^3$$

$$= 1,50796... \text{ dm}^3$$

$$= 0,00150796... \text{ m}^3$$

$$= 8960 \cdot 0,00150796...$$

$$= 13,511... \approx 13,5 \text{ (kg)}$$

Vastaus 13,5 kg

K60

Lasketaan yhden pallon tilavuus V .

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{1}{8} \cdot \pi r^2 \cdot h & \left| \begin{array}{l} h = 11,0 \text{ mm} \\ r = \frac{44,0 \text{ mm}}{2} = 22,0 \text{ mm} \end{array} \right. \\
 &= \frac{1}{8} \cdot \pi \cdot 22,0^2 \cdot 11,0 \\
 &= 2090,72... \text{ (mm}^3\text{)}
 \end{aligned}$$

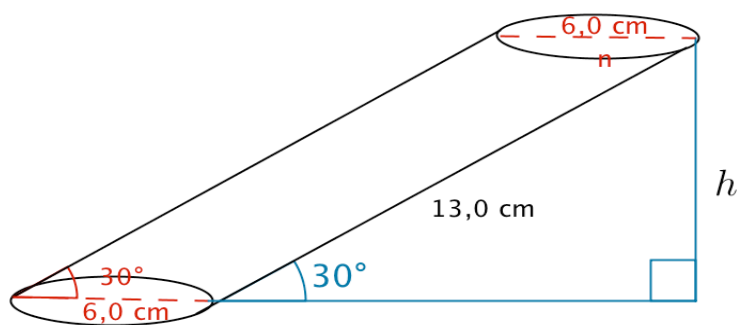
Lasketaan pallon säde R .

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{4}{3} \pi R^3 \\
 R^3 &= \frac{3V}{4\pi} \\
 &= \frac{3 \cdot 2090,72...}{4\pi} \\
 &= 499,12... \text{ (mm}^3\text{)} \\
 R &= \sqrt[3]{499,12...} = 7,93... \text{ (mm)}
 \end{aligned}$$

Pallon halkaisija on $2 \cdot 7,93... \text{ mm} = 15,86... \text{ mm} \approx 15,9 \text{ mm}$.

Vastaus 15,9 mm

K61



Lasketaan lieriön korkeus.

$$\sin 30^\circ = \frac{h}{13,0}$$

$$h = 13,0 \cdot \sin 30^\circ = 6,5 \text{ (cm)}$$

Lasketaan vinon lieriön tilavuus.

$$V = A_p h$$

$$= \pi r^2 h \quad \left| \begin{array}{l} r = \frac{6,0 \text{ cm}}{2} = 3,0 \text{ cm} = 0,30 \text{ dm} \\ h = 6,5 \text{ cm} = 0,65 \text{ dm} \end{array} \right.$$

$$= \pi \cdot 0,30^2 \cdot 0,65 = 0,1837... \text{ (dm}^3\text{)}$$

Lasketaan massa.

$$m = \rho V \quad \left| \begin{array}{l} \rho = 8,4 \text{ kg/dm}^3 \\ V = 0,1837... \text{ dm}^3 \end{array} \right.$$

$$= 8,4 \cdot 0,1837... = 1,543... \approx 1,5 \text{ (kg)}$$

Vastaus 1,5 kg

K62

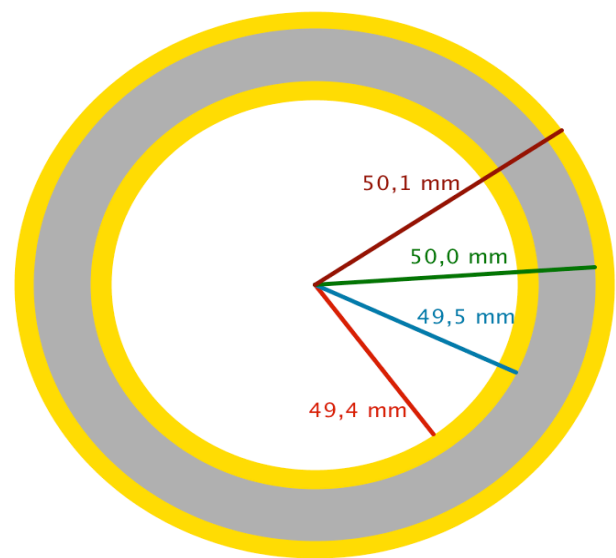
$$r_{sisä} = \frac{9,9 \text{ cm}}{2} = 49,5 \text{ mm}$$

$$r_{ulko} = \frac{10 \text{ cm}}{2} = 50,0 \text{ mm}$$

Maalikerrosten poikkileikkaukset ovat ympyrärenkaita. Lasketaan ulko- ja sisäpinnoille levitettyjen maalikerrosten tilavuudet.

$$\begin{aligned} V_{sisä} &= \pi r_{sisä}^2 \cdot h - \pi (r_{sisä} - 0,1)^2 \cdot h \\ &= \pi h \cdot (49,5^2 - 49,4^2) \\ &= 9,89 \cdot \pi h \text{ (mm}^3\text{)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{ulko} &= \pi (r_{ulko} + 0,1)^2 \cdot h - \pi r_{ulko}^2 \cdot h \\ &= \pi h \cdot (50,1^2 - 50^2) \\ &= 10,01 \cdot \pi h \text{ (mm}^3\text{)} \end{aligned}$$



Verrataan ulkopintaan kuluneen maalin tilavuutta sisäpintaan kuluneen maalin tilavuuteen.

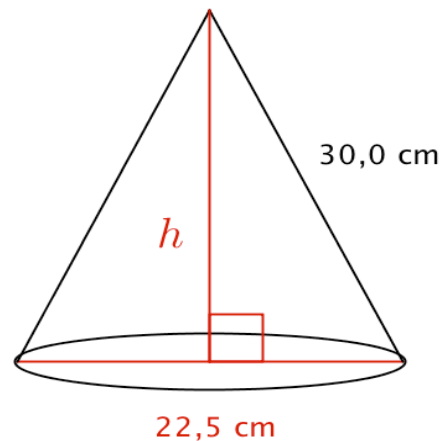
$$\frac{V_{ulko}}{V_{sisä}} = \frac{10,01 \cdot \cancel{\pi h}}{9,89 \cdot \cancel{\pi h}} = 1,0121... = 101,21... \% \approx 101,2 \%$$

Ulkopintaan kuluu $101,2 \% - 100 \% = 1,2 \%$ enemmän maalia.

Vastaus 1,2 %

Huomaa: Annettu tieto putken pituudesta ei ole välttämätön.

K63



Pohjan säde on $r = \frac{22,5 \text{ cm}}{2} = 11,25 \text{ cm} = 1,125 \text{ dm}$.

Sivujanalan pituus on $30,0 \text{ cm} = 3,00 \text{ dm}$.

Lasketaan kartion korkeus.

$$3,00^2 = h^2 + 1,125^2$$

$$h^2 = 3,00^2 - 1,125^2$$

$$= 7,734... (\text{dm}^2)$$

$$h = (\pm)\sqrt{7,734...} = 2,781... (\text{dm})$$

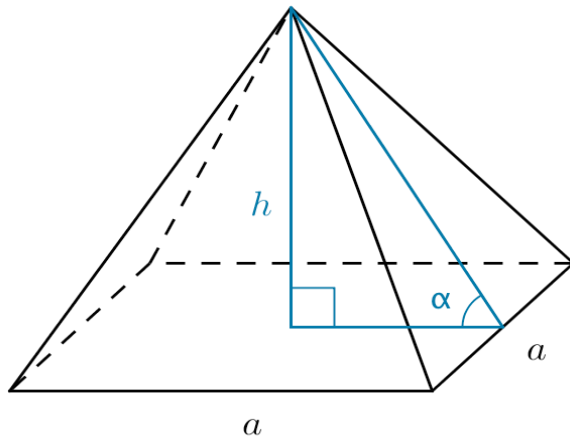
Lasketaan kartion tilavuus.

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 1,125^2 \cdot 2,781... = 3,685... (\text{dm}^3)$$

Kartion tilavuus on $3,685... \text{ dm}^3 = 3,685... \text{ L} = 36,85... \text{ dl} \approx 36,9 \text{ dl}$.

Vastaus 36,9 dl

K64



Lasketaan pohjaneliön sivu a pohjan pinta-alan avulla.

$$A = 5,3 \text{ ha} = 5,3 \cdot (100 \text{ m})^2 = 53\,000 \text{ m}^2$$

$$a^2 = 53\,000$$

$$a = (\pm)\sqrt{53\,000} = 230,217\dots \text{ (m)}$$

Lasketaan alkuperäinen korkeus h suorakulmaisen kolmion avulla.

$$\tan \alpha = \frac{h}{\frac{a}{2}}$$

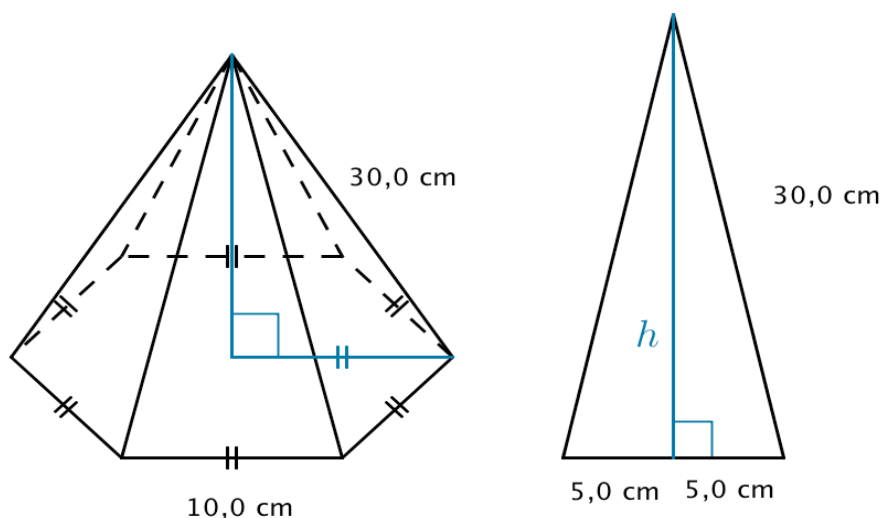
$$h = \frac{a}{2} \cdot \tan \alpha \quad \left| \begin{array}{l} \alpha = 51^\circ 52' = 51,866\dots^\circ \\ a = 230,217\dots \text{ m} \end{array} \right.$$

$$= \frac{230,217\dots}{2} \cdot \tan 51,866\dots^\circ = 146,627\dots \approx 147 \text{ (m)}$$

Pyramidin alkuperäinen korkeus on ollut 147 m.

Vastaus 147 m

K65



Pyramidin kaikki kuusi sivutahkoa ovat samanlaisia tasasivuisia kolmioita. Lasketaan sivutahkon korkeus.

$$30,0^2 = h^2 + 5,0^2$$

$$h^2 = 30,0^2 - 5,0^2$$

$$= 875$$

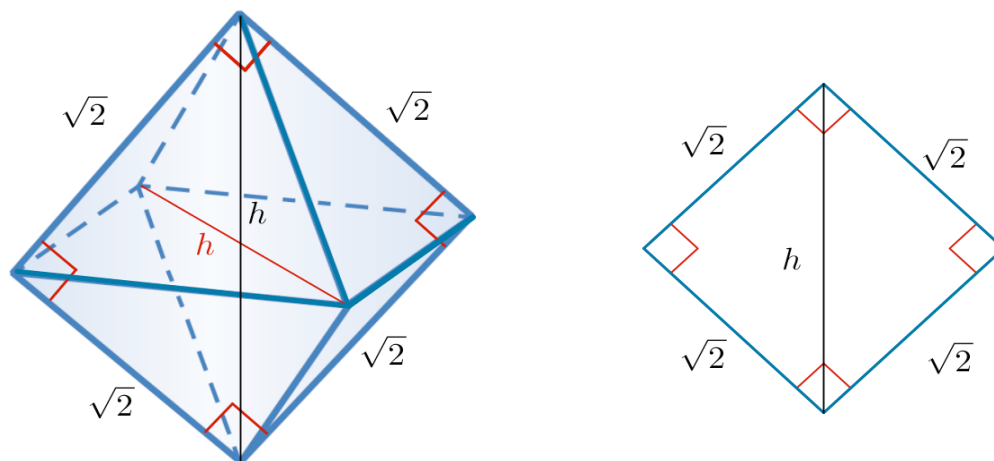
$$h = (\pm)\sqrt{875} = 29,580... \text{ (cm)}$$

Vaippa koostuu kuudesta samanlaisesta kolmiosta.

$$A_v = 6 \cdot \frac{10,0 \cdot 29,580...}{2} = 887,411... \approx 887 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Vastaus 887 cm^2

K66



Säännöllisen oktaedrin poikkileikkaus on neliö.

Oktaedrin korkeus h on $\sqrt{2}$ -sivuisen neliön lävistäjä.

$$h^2 = \sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2$$

$$= 2 + 2$$

$$= 4$$

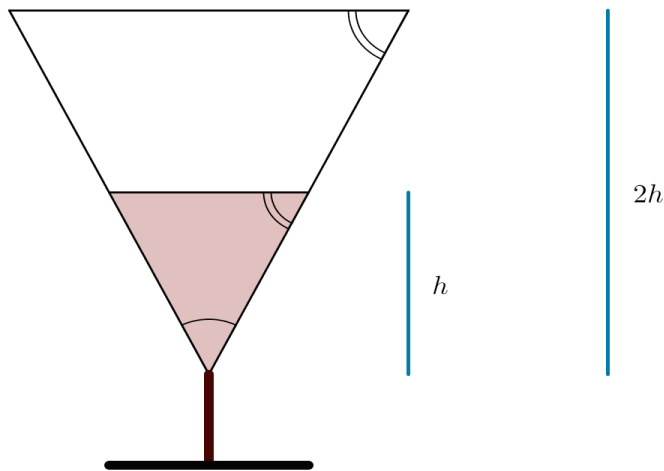
$$h = (\pm)\sqrt{4} = 2$$

Oktaedrin tilavuus saadaan laskemalla yhteen kahden neliöpohjaisen pyramidin tilavuudet.

$$V_{\text{oktaedri}} = 2 \cdot V_{\text{pyramidi}} = 2 \cdot \frac{1}{3} A_p \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{3} A_p h = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2}^2 \cdot 2 = \frac{4}{3}$$

Vastaus Tilavuus on $\frac{4}{3}$.

K67



Viinilasin poikkileikkauskuvioon muodostuu kaksi tasakylkistä kolmiota, jotka ovat yhdenmuotoiset (kk, huippukulma yhteinen ja samankohtaiset kulmat yhtä suuret).

Merkitään sisätilan korkeutta $2h$:lla, jolloin nesteosan korkeus on h .

Tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio. Muodostetaan yhtälö.

$$\frac{V_{neste}}{V_{lasi}} = \left(\frac{h}{2h} \right)^3 = \left(\frac{1}{2} \right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$V_{neste} = \frac{V_{lasi}}{8} \quad | \quad V_{lasi} = 1,75 \text{ dl}$$

$$= \frac{1,75}{8}$$

$$= 0,21875$$

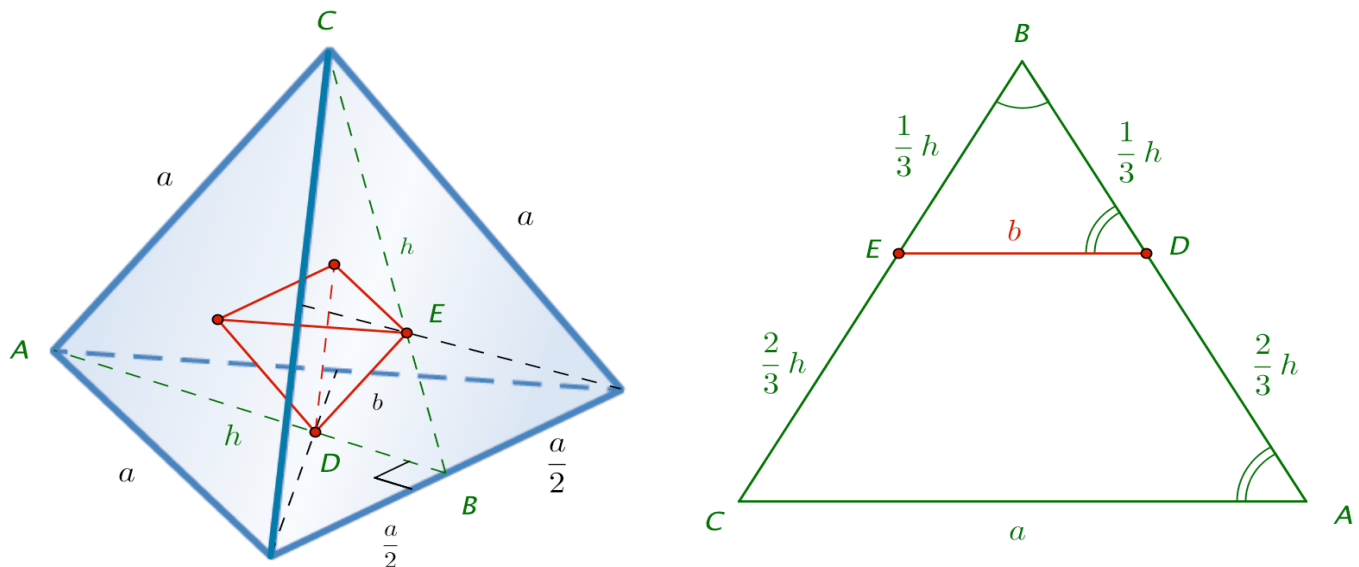
$$\approx 0,219 \text{ (dl)}$$

Vastaus 0,219 dl

K68

Tetraedrissa on neljä tahkoa, joten syntyvässä Platonin kappaleessa on neljä kärkeä. Tetraedri on ainoa Platonin kappaleista jossa on neljä kärkeä. Siis syntyvä kappale on tetraedri.

Merkitään syntyvän tetraedrin särmää kirjaimella b . Piirretään mallikuva.



Tetraedrin tahkot ovat tasasivuisia kolmioita ja niiden keskipisteet ovat mediaanien leikkauspisteitä. Nämä pisteet jakavat tahkojen mediaanit suhteessa 2 : 1 kärjestä lukien. Mediaanit ovat samalla sivutahkojen korkeusjanoja.

Markitään alkuperäisen tetraedrin sivutahkon mediaanin pituutta kirjaimella h .

Poikkileikkauskuvio ABC on tasasivuinen kolmio. Kolmiot ABC ja EDB ovat yhdenmuotoiset (kk, huippukulma yhteinen ja samankohtaiset kulmat yhtä suuret).

Ratkaistaan kysytty pienemmän tetraedrin särmä b vastinjanojen suhteen avulla.

$$\frac{b}{a} = \frac{\frac{1}{3}h}{h} = \frac{1}{3}$$

$$b = \frac{1}{3}a$$

Syntyneen tetraedrin särmän pituus on $\frac{1}{3}a$.

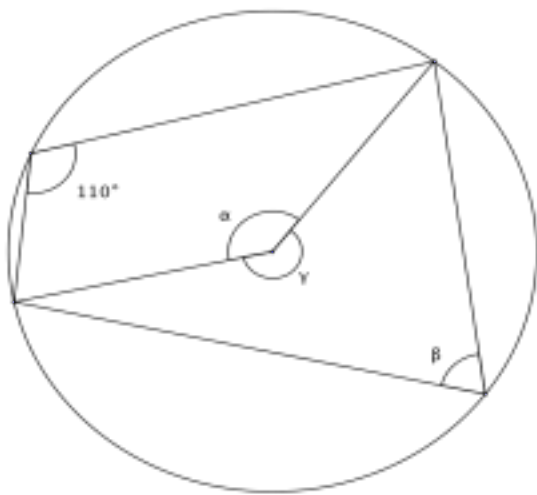
Vastaus $\frac{1}{3}a$

1

a) $\beta = 90^\circ - 63^\circ = 27^\circ$

b) Kulma β on 84 asteen keskuskulmaa vastaava kehäkulma, joten $\beta = 84^\circ : 2 = 42^\circ$

c)



Kulma γ on 110 asteen kehäkulmaa vastaava keskuskulma.

$$\gamma = 2 \cdot 110^\circ = 220^\circ$$

$$\alpha = 360^\circ - 220^\circ = 140^\circ$$

Kulma β on kulmaa α vastaava kehäkulma.

$$\beta = 140^\circ : 2 = 70^\circ$$

Vastaus a) 27° b) 42° c) 70°

2

a) Maaston matka x ratkeaa verrantoyhtälöstä.

$$\frac{33}{x} = \frac{1}{400\,000}$$

Vastinmatkojen suhde on mittakaava.

$$x = 13\,200\,000 \text{ (mm)}$$

Matka maastossa on $13\,200\,000 \text{ mm} = 13\,200 \text{ m} = 13,2 \text{ km} \approx 13 \text{ km}$.

b) Myös peruskartan matka y ratkeaa verrantoyhtälöstä. Ilmoitetaan todellinen matka millimetreissä.

$$\frac{y}{13\,200\,000} = \frac{1}{20\,000}$$

Vastinmatkojen suhde on mittakaava.

$$20\,000y = 13\,200\,000$$

$$| : 20\,000$$

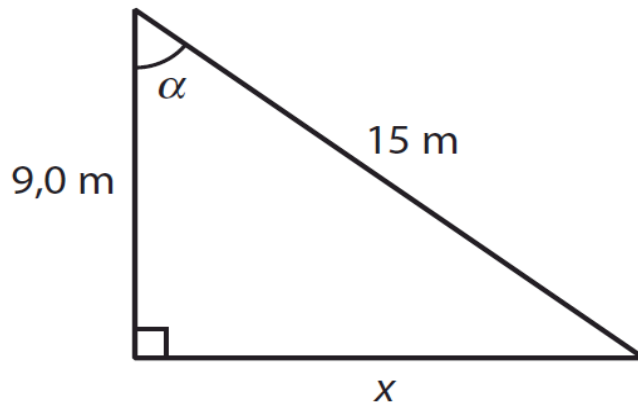
$$y = 660 \text{ (mm)}$$

Matka peruskartalla on $660 \text{ mm} = 66 \text{ cm}$.

Vastaus Matka on a) 13 km b) 66 cm.

3

a)



$$\cos \alpha = \frac{9,0}{15}$$

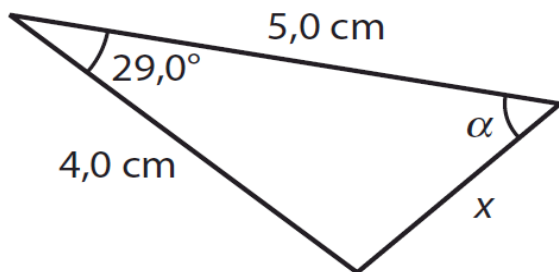
$$\alpha = \cos^{-1} \frac{9,0}{15} = 53,13...^{\circ} \approx 53^{\circ}$$

$$15^2 = x^2 + 9,0^2$$

$$x^2 = 15^2 - 9,0^2 = 144$$

$$x = (\pm)\sqrt{144} = 12 \text{ (m)}$$

b)



$$x^2 = 4,0^2 + 5,0^2 - 2 \cdot 4,0 \cdot 5,0 \cdot \cos 29,0^\circ$$

$$= 6,015...$$

$$x = (\pm)\sqrt{6,015...} = 2,45... \approx 2,5 \text{ (cm)}$$

$$\frac{4,0}{\sin \alpha} = \frac{x}{\sin 29,0^\circ}$$

$$x \sin \alpha = 4,0 \cdot \sin 29,0^\circ$$

$$\sin \alpha = \frac{4,0 \cdot \sin 29,0^\circ}{x}$$

$$= \frac{4,0 \cdot \sin 29,0^\circ}{2,45...}$$

$$= 0,790...$$

$$\alpha = \sin^{-1} 0,790... = 52,24...^\circ \approx 52^\circ$$

$$\text{tai } \alpha = 180^\circ - 52,24...^\circ = 127,75...^\circ$$

Tarkistetaan kelpaavatko saadut kulmat annetun kolmion kulmiksi laskemalla kolmion kolmas kulma β .

- Kun $\alpha = 52,24...^\circ$, niin
 $\beta = 180^\circ - 29,0^\circ - 52,24...^\circ = 98,75...^\circ$
(kelpaa kolmion kulmaksi)
- Kun $\alpha = 127,75...^\circ$, niin
 $\beta = 180^\circ - 29,0^\circ - 127,75...^\circ = 23,24...^\circ$
(kelpaa kolmion kulmaksi)

Tapaus $\alpha = 127,75...^\circ$ ei kuitenkaan kelpaa tehtävän ratkaisuksi, koska α ei ole kolmion suurin kulma (se ei ole pisimmän sivun vastainen kulma).

Kysytyn kulman on siis oltava 52° .

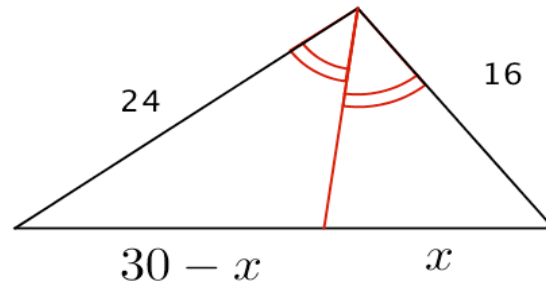
Vastaus a) $\alpha = 53^\circ$, $x = 12$ m
 b) $\alpha = 52^\circ$, $x = 2,5$ cm

4

- a) Mediaanien leikkauspiste jakaa mediaanit suhteessa 2 : 1 kärjestä lukien. Osien pituudet ovat $\frac{1}{3} \cdot 36 = 12$ ja $\frac{2}{3} \cdot 36 = 24$.

b)

Suurin kulma on pisimmän sivun vastainen kulma. Osat ovat x ja $30 - x$. Kulmanpuolittaja jakaa vastaisen sivun viereisten sivujen suhteessa.



$$\frac{x}{30 - x} = \frac{16}{24}$$

$$24x = 16(30 - x)$$

$$24x = 16 \cdot 30 - 16x$$

$$16x + 24x = 16 \cdot 30$$

$$40x = 16 \cdot 30$$

$$x = \frac{16 \cdot 30}{40} = 12$$

$$30 - x = 30 - 12 = 18$$

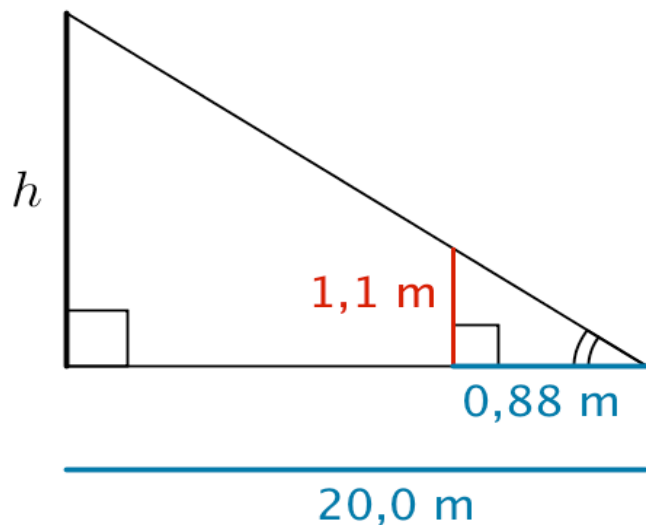
Osien pituudet ovat 18 ja 12.

Vastaus

a) 12 ja 24

b) 12 ja 18

5



Syntyvät suorakulmaiset kolmiot ovat yhdenmuotoiset (kk, terävä kulma yhteinen, mlemmissä suora kulma).

Vastinjanojen suhde on vakio.

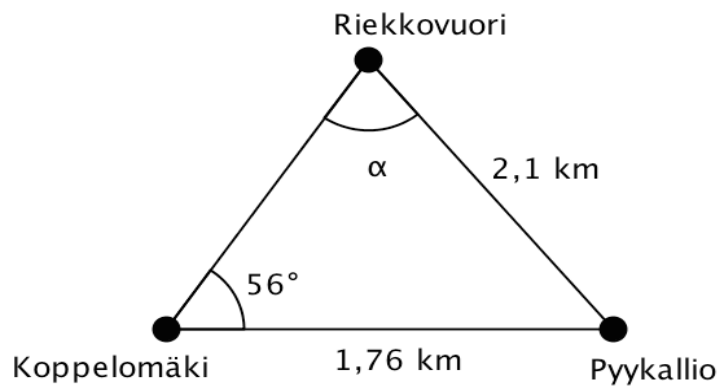
$$\frac{h}{1,1} = \frac{20,0}{0,88}$$

$$h = \frac{h}{1,1} = \frac{1,1 \cdot 20,0}{0,88} = 25,0 \text{ (m)}$$

Lipputangon korkeus on 25,0 metriä.

Vastaus 25,0 m

6



Sinilause:

$$\frac{1,76}{\sin \alpha} = \frac{2,1}{\sin 56^\circ}$$

$$1,76 \cdot \sin 56^\circ = 2,1 \cdot \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{1,76 \cdot \sin 56^\circ}{2,1} = 0,694\dots$$

$$\alpha = \sin^{-1} 0,694\dots = 44,01\dots^\circ \approx 44^\circ$$

$$\text{tai } \alpha = 180^\circ - 44,01\dots^\circ = 135,98\dots^\circ$$

Tarkistetaan kelpaavatko saadut kulmat laskemalla kolmion kolmas kulma β .

- Kun $\alpha = 44,01\dots^\circ$, niin
 $\beta = 180^\circ - 56^\circ - 44,01\dots^\circ = 79,98\dots^\circ$ (kelpaa)
- Kun $\alpha = 135,98\dots^\circ$, niin
 $\beta = 180^\circ - 56^\circ - 135,98\dots^\circ = -11,98\dots^\circ$ (ei kelpaa)

Siis Koppelomäen ja Pyykallion väli näkyy 44° kulmassa.

Vastaus 44°

7

Lasketaan keilapallon tilavuus.

$$\begin{aligned} V &= \frac{4}{3} \pi r^3 & \left| \begin{array}{l} r = \frac{26,0 \text{ cm}}{2} = 13,0 \text{ cm} = 1,30 \text{ dm} \end{array} \right. \\ &= \frac{4}{3} \pi \cdot 1,30^3 \\ &= 9,202... \text{ (dm}^3\text{)} \end{aligned}$$

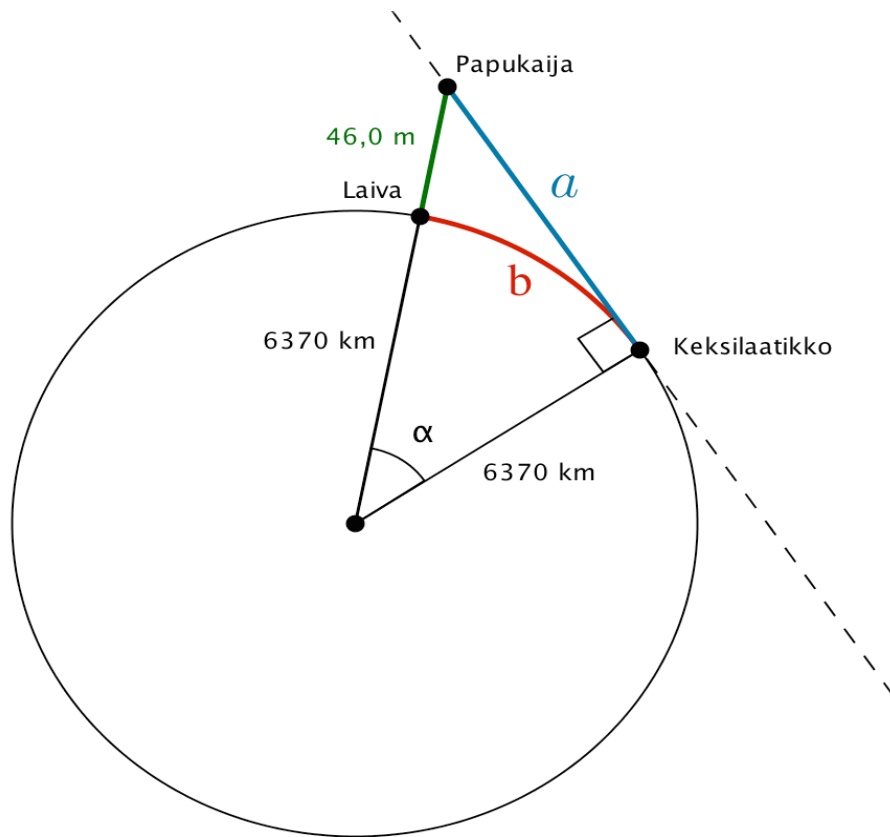
Lasketaan keilapallon massa.

$$\begin{aligned} m &= \rho V & \left| \begin{array}{l} \rho = 19,32 \text{ kg/dm}^3 \\ V = 9,202... \text{ dm}^3 \end{array} \right. \\ &= 19,32 \cdot 9,202... \\ &= 177,797... \\ &\approx 178 \text{ (kg)} \end{aligned}$$

Tavaravaaka näytti keilapallon painoksi 178 kg.

Vastaus 178 kg

8



- a-kohdassa kysytään pitkin tangenttisuoraa mitattua papukaijan ja keksilaatikon välistä etäisyyttä a .
- b-kohdassa kysytään ympyräkaaren pituutta b .

a) Lasketaan etäisyys a Pythagoraan lauseella.

Hypotenuusan pituus on $6370 \text{ km} + 46,0 \text{ m} = 6370,046 \text{ km}$.

$$6370,046^2 = 6370^2 + a^2$$

$$a^2 = 6370,046^2 - 6370^2 = 586,04...$$

$$a = (\pm)\sqrt{586,04...}$$

$$= 24,208306... \approx 24,2 \text{ (km)}$$

b) Lasketaan ensin keskuskulma α .

$$\cos \alpha = \frac{6370}{6370,046} = 0,999992...$$

$$\alpha = \cos^{-1} 0,999992... = 0,2177...^{\circ}$$

Lasketaan keskuskulmaa α vastaavan ympyräkaaren pituus b .

$$\begin{aligned} b &= \frac{\alpha}{360^{\circ}} \cdot 2\pi \cdot 6370 \\ &= \frac{0,2177...^{\circ}}{360^{\circ}} \cdot 2\pi \cdot 6370 \\ &= 24,208190... \approx 24,2 \text{ (km)} \end{aligned}$$

c) Verrataan saatuja etäisyyksiä a ja b .

$$\begin{aligned} a - b &= 24,208306... \text{ km} - 24,208190... \text{ km} \\ &= 0,000116... \text{ km} \\ &= 11,6... \text{ cm} \approx 10 \text{ cm} \end{aligned}$$

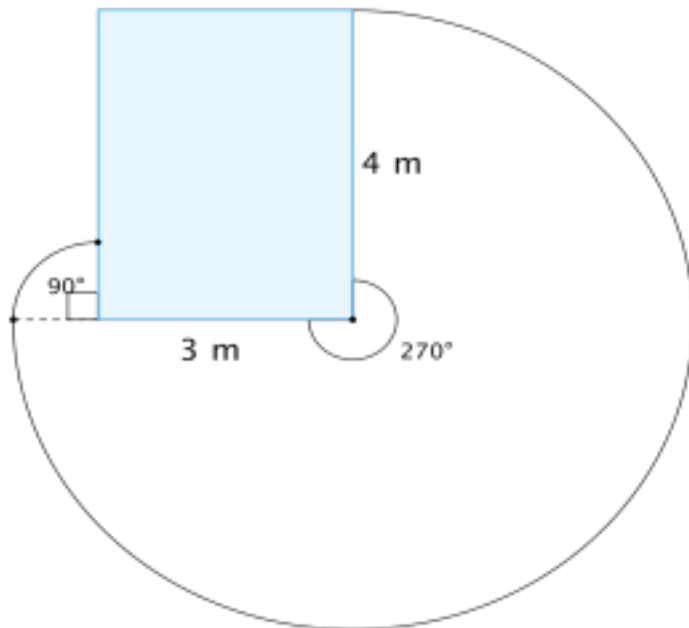
Etäisyyksillä on eroa noin 10 cm.

Huomaa: lähtöarvojen mittaustarkkuus asettaa tämän c-kohdan päätelmän hieman kyseenalaiseksi.

Vastaus a) 24,2 km
 b) 24,2 km
 c) 10 cm

9.

a)



Alue muodostuu kahdesta ympyräsektorista.

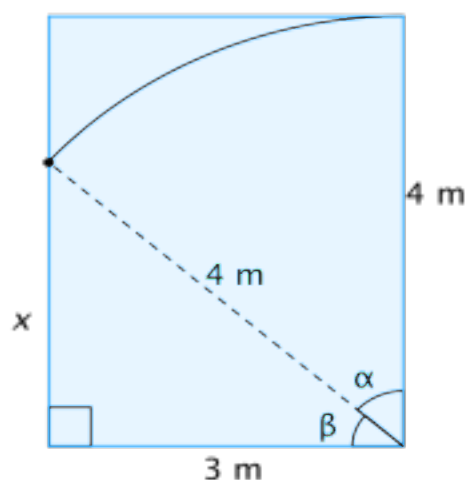
$$A = \frac{270^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 4^2 + \frac{90^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 1^2$$

$$= 12\pi + \frac{1}{4}\pi$$

$$= \frac{49}{4}\pi \approx 38$$

Lammas ylettyy liikkumaan 38 m^2 laajuiselle alueelle.

b)



Lammas ylettyy liikkumaan alueella, joka koostuu ympyräsektorista ja suorakulmaisesta kolmiosta.

Suorakulmaisen kolmion toinen kateetti voidaan ratkaista

Pythagoraan lauseella.

$$x^2 = 4^2 - 3^2$$

$$x^2 = 7$$

$$x = \pm\sqrt{7} \quad x > 0$$

$$x = \sqrt{7}$$

Kolmion pinta-ala $A_k = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{7}$.

Ratkaistaan kulma β .

$$\cos \beta = \frac{3}{4}$$

$$\beta \approx 41^\circ$$

$$\alpha \approx 90^\circ - 41^\circ = 49^\circ$$

Sektorin pinta-ala $A_s = \frac{49}{360} \pi \cdot 4^2$

Alueen koko pinta-ala on

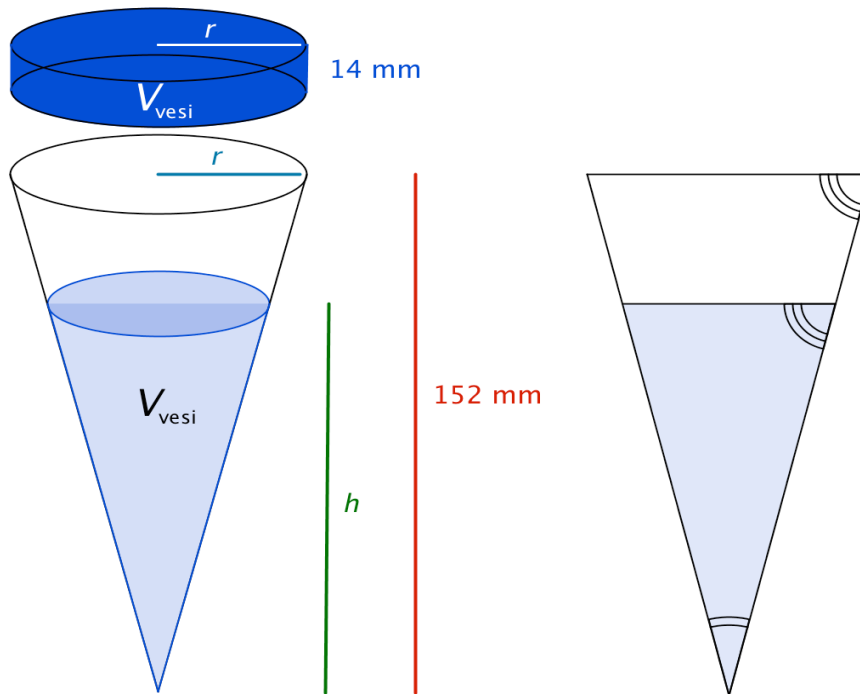
$$A = A_k + A_s = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{7} + \frac{49^\circ}{360^\circ} \pi \cdot 4^2$$

$$A \approx 11$$

Lammas ylettyy liikkumaan 8 m^2 laajuisella alueella.

Vastaus a) 38 m^2 b) 11 m^2

10



Pystyssä, kärjellään seisovan suoran ympyräkartion poikkileikkaukseen syntyy kaksi tasakylkistä kolmiota, jotka ovat yhdenmuotoiset (kk, huippukulma yhteinen ja samankohtaiset kulmat yhtä suuret). Tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio.

$$\frac{V_{\text{vesi}}}{V_{\text{kartio}}} = \left(\frac{h}{152} \right)^3$$

$$h^3 = \frac{V_{\text{vesi}} \cdot 152^3}{V_{\text{kartio}}}$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{V_{\text{vesi}} \cdot 152^3}{V_{\text{kartio}}}} = 152 \cdot \sqrt[3]{\frac{V_{\text{vesi}}}{V_{\text{kartio}}}}$$

Toisaalta ympyräkartiosta olevan veden tilavuus on sama kuin r -säteisen suoran ympyrälieriön tilavuus, jossa r on kartion yläosan säde.

$$V_{\text{vesi}} = A_p h = \pi r^2 \cdot 14$$

Lasketaan kartion tilavuuden ja veden tilavuuksien suhde.

$$\frac{V_{\text{vesi}}}{V_{\text{kartio}}} = \frac{\cancel{\pi r^2} \cdot 14}{\frac{1}{3} \cancel{\pi r^2} \cdot 152} = \frac{14}{\frac{1}{3} \cdot 152} = \frac{3 \cdot 14}{152} = \frac{42}{152}$$

Nyt saadaan laskettua kysytty korkeus h .

$$h = 152 \cdot \sqrt[3]{\frac{V_{\text{vesi}}}{V_{\text{kartio}}}} = 152 \cdot \sqrt[3]{\frac{42}{152}} = 99,002... \approx 99 \text{ (mm)}$$

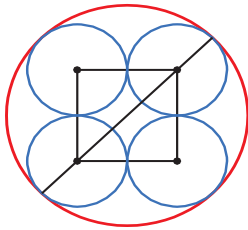
Koska $99 \text{ mm} \leq 152 \text{ mm}$, kaikki satanut vesi mahtuu kartioon.

Vesi nousee kartiossa 99 mm korkeuteen.

Vastaus 99 mm

Vihjeet, MAA3

24. **Vihje:** Merkitse tuntiviisarin etenemää kulmaa kirjaimella x . Kuinka suuri on minuuttiviisarin kiertämä kulma tällöin? Muodosta yhtälö täyden kulman avulla.
35. **Vihje:** Käytä hyödyksi tasakylkisiä kolmioita sekä kolmion kulmien summaa.
46. **Vihje:** Merkitse toisen lävistäjän osia kirjaimilla a ja b , sekä lävistäjää vastaan olevia korkeuksia h_1 ja h_2 . Muodosta kolmioiden avulla suhde $a : b$ kahdella eri tavalla ja muodosta yhtälö.
162. **Vihje:** Tutki yhdenmuotoisia suorakulmaisia kolmioita, joiden yhteisenä terävänä kulmana on puolikas alkuperäisen kolmion huippukulmasta.
171. **Vihje:** Tutki yhdenmuotoisia suorakulmaisia kolmioita, joiden yhteisenä terävänä kulmana on puolikas alkuperäisen kolmion huippukulmasta.
173. **Vihje:** Piirrä mallikuva, jossa näkyvät kolmion sivujen keskinormaalit ja merkitse kuvaan ympyrän säteet. Tutki pientä ja isoa kolmiota. Hyödynnä kolmioiden yhdenmuotoisuutta.
174. **Vihje:** Piirrä mallikuva, jossa näkyvät kolmion sivujen keskinormaalit ja merkitse kuvaan ympyrän säteet. Tutki pientä ja isoa kolmiota. Hyödynnä kolmioiden yhdenmuotoisuutta.
186. **Vihje:** Laske ensin Maan kiertoradan pituus.
194. **Vihje:**



209. **Vihje:** Muodosta yhtälö.

- 216. Vihje:** Yhdistä kukan terälehtien kärkipisteet.
- 233. Vihje:** Piirrä ympyrä, joka kulkee saaren päätepisteiden ja tarkkailijan sijaintipisteen kautta.
- 245. Vihje:** Käytä kosinilausetta.
- 254. Vihje:** Tasojen välinen kulma on välillä $[0^\circ, 90^\circ]$.
- 277. Vihje:** Pallopinnalla lyhin reitti kahden pisteen välillä kulkee pitkin isoympyrää.
- 286. Vihje:** Jaa pääty viiteen yhtenevään tasakylkiseen kolmioon.
- 296. Vihje:** Jaa pääty viiteen yhtenevään tasakylkiseen kolmioon.
- 299. Vihje:** Laske pohjan pinta-ala tilavuuden avulla.
- 322. Vihje:** Kolmion keskipiste on yhtä kaukana kolmion kärjistä. Muodosta suorakulmainen kolmio, jonka hypotenuusana on porattu reikä ja toinen kateetti pyramidin pohjalla. Laske kateettien pituudet annettujen tietojen avulla.
- 324. Vihje:** Oktaedrin sisään muodostuu kuutio, jonka särmä on sillä leikkauspinnalla, joka alkaa oktaedrin kärjestä ja kulkee kahden vierekkäisen tahkon keskijanoja pitkin. Tunnista yhdenmuotoiset kolmiot ja ratkaise kuution särmän pituus.

Seuraava on kertaustehtävään:

- 68. Vihje:** Tetraedrin sisään muodostuu pienempi tetraedri, jonka särmä on sillä leikkauspinnalla, joka alkaa isomman tetraedrin kärjestä ja kulkee kahden vierekkäisen tahkon keskijanoja pitkin. Tunnista yhdenmuotoiset kolmiot ja ratkaise pienemmän tetraedrin särmän pituus.

Eukleides Aleksandrialainen (n. 325 – 265 eaa.)

Kreikkalainen Eukleides Aleksandrialainen oli matemaatikko, joka kokosi geometrian perusteet teokseen *Alkeet* (Στοιχεῖα, *Stoikheia*). Eukleideen lähtökohtana oli taso, siis se sama taso, johon mekin olemme koko kouluaikamme tottuneet piirtämään pisteitä, suoria ym. Teoksessa Eukleides esitti viisi euklidisen geometrian aksioomaa eli alkuoletusta, joista hän pyrki johtamaan muita geometrian lauseita todistuksineen. Eukleideen Alkeissa on nykymatematiikan standardien mukaan monia puutteita mutta silti se on yksi eniten käytetyistä matematiikan oppikirjoista matematiikan historiassa. Alkeet-teoksen alkuosia suomennettiin jo aiemmin mutta koko tasogeometrian osuuden suomensi ensimmäistä kertaa Kuopion kymnaasin lehtori Peter (Pekka) Aschan vuonna 1859. Kirjan on nykysuomentanut ja kommentoinut Jyväskylän yliopiston lehtori Lauri Kahanpää vuonna 2011.

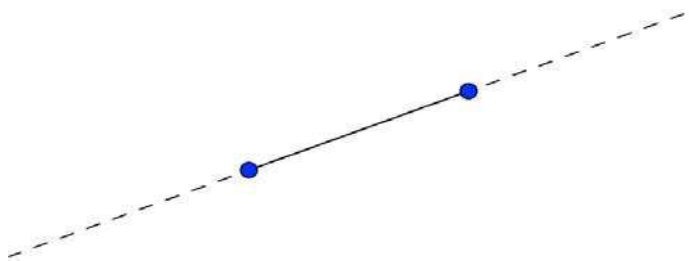
Euklidisen geometrian aksioomat

Eukleideen aksioomat

1) *Voidaan vetää suora viiva mistä pisteestä tahansa mihin pisteeseen tahansa.*

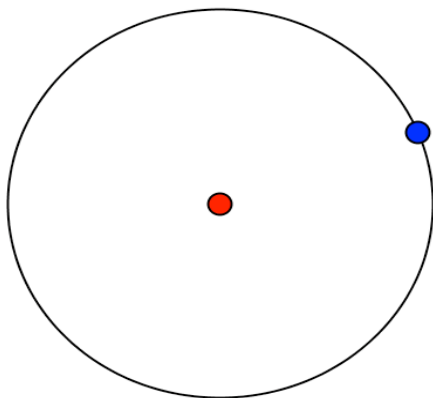


2) *Janaa voidaan jatkaa kumpaankin suuntaan yli päätepisteidensä.*



Jana voidaan siis aina jatkaa suoraksi, joka jatkuu loputtomiin molempiin suuntiin.

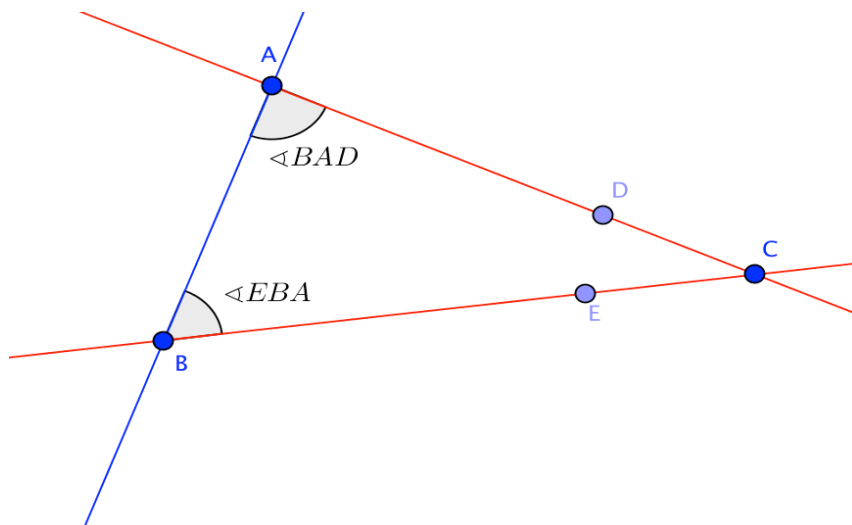
3) Pisteen ympäri voidaan piirtää minkä tahansa toisen pisteen kautta kulkeva ympyrä.



4) Kaikki suorat kulmat ovat yhtä suuria

Aksiooma on tärkeä, koska se tekee mahdolliseksi käyttää suoraa kulmaa standardina, jolla voidaan määrittää kulman yksikkö. Esimerkiksi suora kulma on 90 astetta, 100 goonia (graadia, uusastetta) ja $\frac{\pi}{2}$ radiaania.

5) Jos suora viiva AB leikkaa kahta muuta suoraa viivaa AD ja BE pisteissä A ja B siten, että D ja E ovat samalla puolella AB :tä ja kulmat $\angle BAD$ ja $\angle EBA$ ovat yhteensä alle kaksi suoraa kulmaa, niin suorat AD ja BE leikkaavat toisensa ja leikkauspiste C on samalla puolella AB :tä kuin D ja E .



Aksioomasta 5 seuraa, että pisteen B kautta voidaan piirtää täsmälleen yksi suoran AD kanssa yhdensuuntainen suora. Tällöin molemmat kulmista $\angle BAD$ ja $\angle EBA$ ovat suoria kulmia.

Lähde:

Lauri Kahanpää (toim.): Kuusi ensimmäistä kirjaa Eukleideen alkeista, eli tasogeometria. Kirjapaino Kopi-Jyvä, Jyväskylä 2011

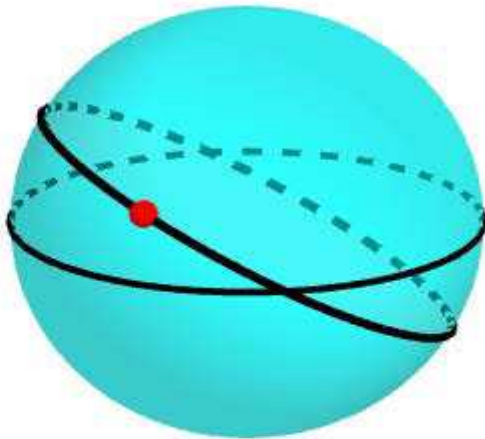
Hilbertin aksioomat

Saksalainen matemaatikko David Hilbert (1862-1943) julkaisi vuonna 1899 teoksen *The Foundations of Geometry* (*Grundlagen der Geometrie*). Teoksessa hän esitti Eukleideen yli 2000 vuotta vanhan geometrian nykyaikaisessa muodossa sisältäen 20 aksioomaa.

Epäeuklidinen geometria

Matemaatikot yrittivät ainakin tuhannen vuoden ajan todistaa paralleeli- eli yhdensuuntaisuusaksioomaa 5 neljän muun aksiooman avulla siinä onnistumatta. 1700-luvulla havaittiin, että on mahdollista rakentaa geometria myös olettamalla, että suoran ulkopuolisen pisteen kautta voidaan piirtää ääretön määrä suoria, jotka eivät leikkaa alkuperäistä suoraa (eli aksiooma 5 ei ole voimassa). 1800-luvun alkupuolella asia täsmentyi ja näin päädyttiin epäeuklidiseen geometriaan.

Epäeuklidinen geometria voidaan rakentaa myös olettamukselle, että suoran ulkopuolisen pisteen kautta ei voida piirtää yhtään suoraa, joka ei leikkaisi alkuperäistä suoraa. Esimerkki tällaisesta epäeuklidisesta geometriasta on elliptinen geometria eli pallogeometria, joka käsittelee kaksiulotteista palloksi kaareutuvaa pintaa. Suoran vastine on tällöin pallopinnan isoympyrä (kts. Luku 5.2 Pallo). Pallogeometriassa ei siis ole lainkaan yhdensuuntaisia suoria, koska kaikki suorat leikkaavat toisiaan.



Linkit

Lauri Kahanpää (toim.): Kuusi ensimmäistä kirjaa Eukleideen Alkeista, eli Tasogeometria, NÄYTELUKU: <http://users.jyu.fi/~laurikah/ETG/LaurinALKEET5.pdf>

David Hilbert: The Foundations of Geometry.
<https://math.berkeley.edu/~wodzicki/160/Hilbert.pdf>

Kymmenpotenssimuoto

Yleisimpiä suuria lukuja:

miljoona 10^6

miljardi 10^9

biljoona 10^{12}

triljoona 10^{18}

Englannin kielessä

käytetään erilaista

asteikkoa:

million 10^6

billion 10^9

trillion 10^{12}

Itseisarvoltaan suurten ja pienten lukujen kirjoittaminen ja lausuminen voi olla työlästä, ja siksi ne ilmaistaan usein luvun 10 potenssien avulla. Esimerkiksi:

$$2\,176\,782\,336$$

$$\approx 2\,180\,000\,000$$

$$= 2,18 \cdot 10^9 \quad (2,18 \text{ miljardia})$$

$$0,0000036$$

$$= 3,6 \cdot 10^{-6} \quad (3,6 \text{ miljoonasosaa})$$

Samalla saadaan ilmaistua luvun tarkkuus ja suuruusluokka selvästi.

Kymmenpotenssimuoto

Luvun *kymmenpotenssimuoto* tarkoittaa luvun esittämistä muodossa $a \cdot 10^n$, missä n on kokonaisluku ja kerroin a on (yleensä) vähintään yksi ja pienempi kuin kymmenen: $1 \leq a < 10$.

Havainnollistetaan luvun muuntamista kymmenpotenssimuotoon ja kymmenpotenssimuodon muuntamista tavalliseksi luvuksi:

Luku	Tulo	Kymmenpotenssimuoto
3500	$3,5 \cdot 1000$	$3,5 \cdot 10^3$
350	$3,5 \cdot 100$	$3,5 \cdot 10^2$
0,035	$3,5 \cdot 0,01$	$3,5 \cdot 10^{-2}$
0,0035	$3,5 \cdot 0,001$	$3,5 \cdot 10^{-3}$

Luvun 10 eksponentti ilmaisee, kuinka monta askelta pilkkua siirretään, ja eksponentin etumerkki, mihin suuntaan.

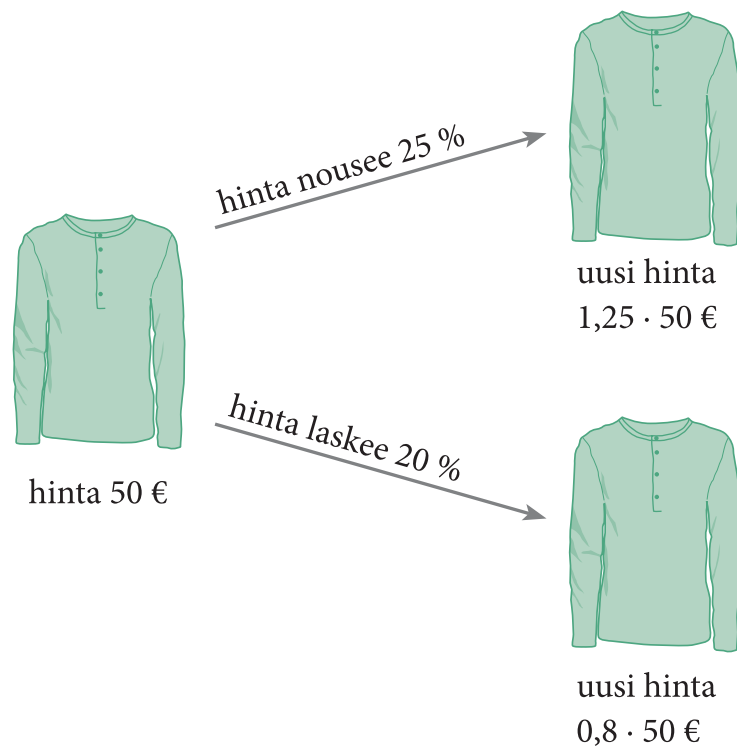
3.2

Prosentuaalinen muutos

Muuttuneen arvon laskeminen

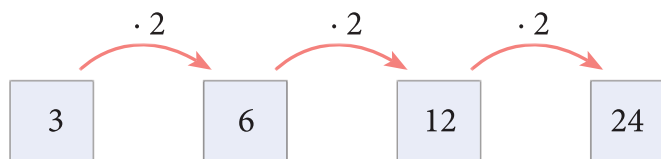
Kun tunnetaan suureen prosentuaalinen muutos, voidaan muuttunut arvo laskea helpoiten prosenttikertoimen avulla. Prosenttikerroin kuvaa perusarvon ja muuttuneen arvon (vertailuarvon) välistä suhdetta.

perus-arvo	muutos	prosenttikerroin	muuttunut arvo
a	suurenee 25 %	$100 \% + 25 \% = 125 \%$ $= 1,25$	$1,25 \cdot a$
	pienenee 20 %	$100 \% - 20 \% = 80 \%$ $= 0,8$	$0,8 \cdot a$

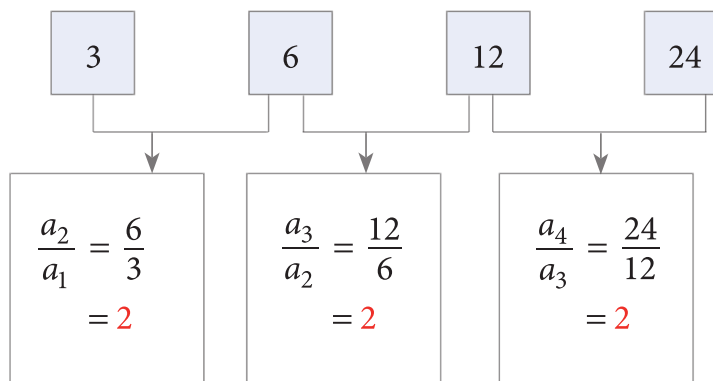


Geometrisen jonon yleinen jäsen

Tarkastellaan lukujonoa 3, 6, 12, 24, ... Jonon seuraava jäsen voidaan laskea kertomalla edellinen jäsen luvulla 2.



Tällaista lukujonoa sanotaan *geometriseksi jonoksi*. Kun jonosta valitaan mitkä tahansa kaksi peräkkäistä lukua, niiden suhde on 2. Tätä suhdetta kutsutaan jonon *suhdeluvuksi*.



Lukujono $a_1, 0, 0, 0, \dots$ voidaan sopia geometriseksi jonoksi, jonka suhdeluku on $q = 0$.

Geometrinen jono

Geometrinen jono on lukujono, jonka kahden peräkkäisen jäsenen suhde on aina sama.

Peräkkäisten jäsenten suhdetta $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ sanotaan jonon *suhdeluvuksi*.

Minkä tahansa geometrisen summan arvo voidaan laskea ensimmäisen termin a_1 , suhdeluvun q ja yhteenlaskettavien lukumäärän n avulla.

Jos suhdeluku $q = 1$, niin summa on

$$S_n = a_1 + a_1 + a_1 + \dots + a_1.$$

Summassa siis lasketaan lukuja a_1 yhteen n kappaletta, joten summa

$$S_n = na_1.$$

Geometrisen summa

Geometrisen summan $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ arvo voidaan tapauksessa $q \neq 1$ laskea kaavalla

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Kaavassa

- a_1 on summan ensimmäinen yhteenlaskettava
- q on suhdeluku
- n on yhteenlaskettavien määrä.

Kaavaa perustellaan erikoistapauksessa $n = 4$ harjoitustehtävässä 357.

ESIMERKKI 1



Esitä geometrisen summa $2 + 6 + 18 + 54 + 162 + 486$ sekä summakaavan $S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$ että summamerkin $\sum_{n=1}^k a_n$ avulla.

RATKAISU

Määritetään suhdeluku q , ensimmäinen yhteenlaskettava a_1 ja yhteenlaskettavien määrä n .

$$a_1 = 2 \qquad q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{6}{2} = 3 \qquad n = 6$$

Muodostetaan summakaava.

$$S_6 = 2 \cdot \frac{1 - 3^6}{1 - 3}$$

Muodostetaan lukujonon yleinen jäsen a_n .

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1}$$

Muodostetaan summamerkintä.

$$S_6 = \sum_{n=1}^6 (2 \cdot 3^{n-1})$$

VASTAUS

$$S_6 = 2 \cdot \frac{1 - 3^6}{1 - 3} \quad \text{ja} \quad S_6 = \sum_{n=1}^6 (2 \cdot 3^{n-1})$$

Neliöyhtälön ratkaiseminen

ESIMERKKI 4



Mitkä luvut toteuttavat yhtälön?

- a) $x^2 = 9$ b) $x^2 = 5$ c) $x^2 = 0$ d) $x^2 = -1$

RATKAISU

- a) Koska $3^2 = 9$ ja $(-3)^2 = 9$, niin yhtälön $x^2 = 9$ toteuttavat luvut 3 ja -3 .
- b) Koska $(\sqrt{5})^2 = 5$ ja $(-\sqrt{5})^2 = 5$, niin yhtälön $x^2 = 5$ toteuttavat luvut $\sqrt{5}$ ja $-\sqrt{5}$.
- c) Yhtälön $x^2 = 0$ toteuttaa vain luku 0.
- d) Koska minkään reaaliluvun neliö ei ole negatiivinen luku, niin yhtälöä $x^2 = -1$ ei toteuta mikään reaaliluku.

VASTAUS

- a) 3 ja -3 b) $\sqrt{5}$ ja $-\sqrt{5}$ c) 0 d) ei mikään reaaliluku

Neliöyhtälön $x^2 = a$ ratkaisut

Kun $a \geq 0$, yhtälön $x^2 = a$ toteuttavat luvun a neliöjuuri ja luvun a neliöjuuren vastaluku.

$$x^2 = a$$

$$x = \sqrt{a} \text{ tai } x = -\sqrt{a}$$

Voidaan merkitä myös $x = \pm\sqrt{a}$.

Kun $a < 0$, yhtälöä $x^2 = a$ ei toteuta mikään reaaliluku.

Minkä tahansa geometrisen summan arvo voidaan laskea ensimmäisen termin a_1 , suhdeluvun q ja yhteenlaskettavien lukumäärän n avulla.

Jos suhdeluku $q = 1$, niin summa on

$$S_n = a_1 + a_1 + a_1 + \dots + a_1.$$

Summassa siis lasketaan lukuja a_1 yhteen n kappaletta, joten summa

$$S_n = na_1.$$

Geometrisen summa

Geometrisen summan $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ arvo voidaan tapauksessa $q \neq 1$ laskea kaavalla

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Kaavassa

- a_1 on summan ensimmäinen yhteenlaskettava
- q on suhdeluku
- n on yhteenlaskettavien määrä.

Kaavaa perustellaan erikoistapauksessa $n = 4$ harjoitustehtävässä 357.

ESIMERKKI 1



Esitä geometrisen summa $2 + 6 + 18 + 54 + 162 + 486$ sekä summa-

kaavan $S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$ että summamerkinnän $\sum_{n=1}^k a_n$ avulla.

RATKAISU

Määritetään suhdeluku q , ensimmäinen yhteenlaskettava a_1 ja yhteenlaskettavien määrä n .

$$a_1 = 2 \qquad q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{6}{2} = 3 \qquad n = 6$$

Muodostetaan summakaava.

$$S_6 = 2 \cdot \frac{1 - 3^6}{1 - 3}$$

Muodostetaan lukujonon yleinen jäsen a_n .

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1}$$

Muodostetaan summamerkintä.

$$S_6 = \sum_{n=1}^6 (2 \cdot 3^{n-1})$$

VASTAUS

$$S_6 = 2 \cdot \frac{1 - 3^6}{1 - 3} \quad \text{ja} \quad S_6 = \sum_{n=1}^6 (2 \cdot 3^{n-1})$$

Neliöyhtälön ratkaiseminen

ESIMERKKI 4



Mitkä luvut toteuttavat yhtälön?

- a) $x^2 = 9$ b) $x^2 = 5$ c) $x^2 = 0$ d) $x^2 = -1$

RATKAISU

- a) Koska $3^2 = 9$ ja $(-3)^2 = 9$, niin yhtälön $x^2 = 9$ toteuttavat luvut 3 ja -3 .
- b) Koska $(\sqrt{5})^2 = 5$ ja $(-\sqrt{5})^2 = 5$, niin yhtälön $x^2 = 5$ toteuttavat luvut $\sqrt{5}$ ja $-\sqrt{5}$.
- c) Yhtälön $x^2 = 0$ toteuttaa vain luku 0.
- d) Koska minkään reaaliluvun neliö ei ole negatiivinen luku, niin yhtälöä $x^2 = -1$ ei toteuta mikään reaaliluku.

VASTAUS

- a) 3 ja -3 b) $\sqrt{5}$ ja $-\sqrt{5}$ c) 0 d) ei mikään reaaliluku

Neliöyhtälön $x^2 = a$ ratkaisut

Kun $a \geq 0$, yhtälön $x^2 = a$ toteuttavat luvun a neliöjuuri ja luvun a neliöjuuren vastaluku.

$$x^2 = a$$

$$x = \sqrt{a} \text{ tai } x = -\sqrt{a}$$

Voidaan merkitä myös $x = \pm\sqrt{a}$.

Kun $a < 0$, yhtälöä $x^2 = a$ ei toteuta mikään reaaliluku.